

## 数式処理システムを併用した最速降下線問題の

## 数値解法と空気抵抗考慮に関する考察

横井 利彰

本稿は、数式処理システム(Computer Algebra System)と数値解析手法を併用して、拡張性の高い数値近似解を得る手法について考察する。主な題材として古典的問題である「最速降下線問題」を選び、理論解の確認、区分関数近似による汎関数の数式導出と多変数非線形関数極値計算による数値的近似解の導出を行い、変分法を用いずとも十分に正確な解が得られることを示す。さらに、空気抵抗の考慮のように現実的な設定条件下での最速降下線の近似解を得る方法についての考察を行い、数式処理システムを用いて必要な計算式を導出することで、計算の可能性を示すこととした。

キーワード： 数式処理システム, 変分問題, 数値計算, 区分関数近似

## 1 まえがき

一般のプログラミング言語環境は、計算機内部の2進数で表された数値の世界での計算手順を表す。これに対し、数式処理システム(Computer Algebra System)は、代数式のまま、数式の整理(因数分解, 約分), 微分・積分, 線形・非線形方程式の代数解導出, 線形・非線形微分方程式の代数解導出, 行列の代数演算など, それまで筆算でしか行えなかった面倒な代数的処理を行う環境である。有名なものにはイリノイ州立大学シャンペーン・アバナ校のSteven Wolframが開発したMathematicaがあるが、実際にはこれまでに多数の処理系が開発されてきており、Maxima[1]などオープンソースでありながら高機能でユーザインタフェースの充実した環境もある[2]。

本稿では、これまで実際に研究と複数の講義で活用してきた経験を元に、数式処理と数値計算手法を併用することの効果をも、1696年にJohann Bernoulliが提示した「最速降下線問題」[3]を主な例として示す。さらに、代数式の導出が困難な部分では、数値計算手法を併用することで、同問題での空気抵抗の考慮など、現実的な応用に不可欠な要素を考慮できる可能性があることを示してゆくこととする。

## 2 数式処理システムについて

数式処理システムは、数式や数字同士の数学的処理ルールを組み込んだ文字列処理系ととらえることができる。内部的にはLISP言語が使用されているものが多くC言語

で記述されているものも一部にある。

数値計算もちろん可能であるが、数字一桁ずつでの演算(人間の手順と同じ)であるので極めて遅く、一般のプログラミング言語のように有効桁数約16桁の数値同士の四則演算がコンピュータの1クロックで行える環境と比較すべきものではなく、場面に依じて適切に使い分ける必要がある。

とくにシミュレーション研究では、対象の現象を記述する関係式から、求めたいポテンシャル値などの関係式を導いた上で、プログラミング言語で計算できる形式に変換することが必要になる。数式処理を使えば、かなりの労力削減ができ作業ミスが減るとともに、数学的専門知識を最大限に活用できることになる点は大きいといえる。

## 2.1 数式処理システムの例

現時点では、オープンソースの処理系だけでも19種類以上に上り、市販のもので10種類に上る[2]。私個人は、約20年前から関心を持ち、東京大学大型計算機センターで動作していたREDUCE(多項式処理に重点)や、MS-DOS上で動作していたmuMath、そしてMathematicaを使用してきた。しかし近年Maximaの処理系がオープンソースとしてはかなり充実してきたこともあり、学生が自分のパソコンで体験できる環境を整える意味からも、授業で活用している。Maximaの母体はMacysmaで、これは1968年から1982年にかけてMITでのプロジェクトMACとして開発されたもので、そのアイデアは、MathematicaやMapleなどの主要な処理系に採用されたといわれている[4]。今回本論で取り上げるMaximaは、MacysmaをGPL(General Public License)とすることを条件に米国エ

ネルギー省から公開の許可を受け、William F. Schelter氏によって Common Lisp で実装され、xmaxima という GUI の実装、gnuplot との連携による高度グラフィクス機能の提供などにより、商用版にひけをとらない機能が提供されるようになったものである。

これらの処理系は、目的は同じでも内部処理の実装方法や到達度の違いがあることから、後述の非線形微分方程式の求解では、処理系の差が具体的な差となって現れてくることとなった。

## 2. 2 授業での利用

Maxima の機能の充実と安定を受けて、2008 年度以降の講義「シミュレーション技術(環境情報学研究科環境情報学専攻)」、「応用数値解析特論(工学研究科電気工学専攻)」、「マトリクス計算特論(他大学大学院)」などで、インストール方法、基本操作解説、数値解析手法の数式導出の実例提示、数式処理を使用する課題の提示などを行ってきた。

### (1)有限要素法の定式化での活用

有限要素法は、「未知のポテンシャル分布関数」によって決定されるエネルギー汎関数  $\chi(\phi(x, y))$  が最小となるような、ポテンシャル分布関数  $\phi(x, y)$  を決定する手法であり、エネルギー汎関数の停留化問題の解法の一つである。基本的な手順として、解析対象を有限個の小領域にわけ、それらの中では温度や電位などのポテンシャルの変化を、単純な関数の接続で近似する(区関数近似)。区関数近似の際に導入する「補間関数」により、幾何形状とポテンシャル値を変数分離でき(式(1))、結果として、エネルギー最小の法則で解を求める問題が、多変数関数の極値問題に帰着できる。

$$\phi^{(e)}(x, y) = N_i^{(e)} \phi_i^{(e)} + N_j^{(e)} \phi_j^{(e)} + N_k^{(e)} \phi_k^{(e)} \quad (1)$$

エネルギー汎関数の停留化の場合には、ポテンシャル変数の自乗と相互積でエネルギー式が表現できることから(式(2))、多変数の極値条件(式(3))を適用すると、未知数に関する連立一次方程式(式(4))を導くことができ解が得られる。

$$\chi(\phi(x, y)) \equiv \chi(\phi_1, \phi_2, \Lambda, \phi_n, \phi_1^2, \phi_2^2, \Lambda, \phi_n^2, \phi_1 \phi_2, \phi_1 \phi_3, \Lambda, \phi_{n-1} \phi_n) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \phi_i} = 0 \Big|_{i=1, n} \quad (3)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (4)$$

以上の過程では、式(1)によって一般化されたある三角形要素での区関数近似を元にして、偏微分を行ってエネルギー式を導き、またそのエネルギーを要素内で積分するなどの操作が必要であるが、これらをすべて数式処理システムで行うことが可能で、その様子を講義で解

説している。

## 3 最速降下線問題での活用

本節では、最速降下線問題(Brachistochrone problem)を例に、区関数近似の考え方を適用した数値解法の適用方法とその精度、発展性について述べる。

特に、数値近似解法の有効性が確認できれば、より現実的な条件を加味した解を求める可能性が広がる。これは純粋な数学問題としての美しさから、現実問題の解決に役立つ手法への転換となる。

### 3. 1 最速降下線問題

1696 年に Johann Bernoulli は、発表した論文の中で数学者に対し、最も速やかに降下する経路(最速降下線)を決定するという問題を示した。これは、同一鉛直線上にない二点 A, B が与えられたとき、一つの質点が A から B へ最も短い時間で、滑り落ちるような A, B を結ぶ曲線を見いだすという問題である(図 1)。(ただし、y 軸は下向きにとっていることに注意。摩擦や空気抵抗は考慮していない。)

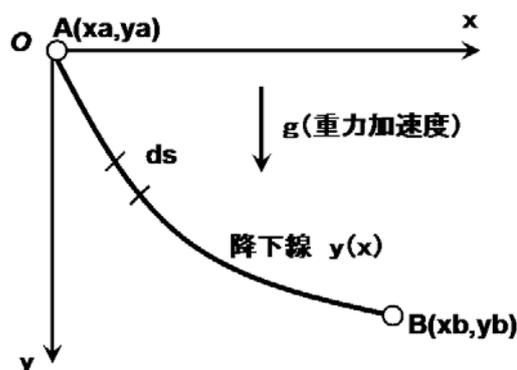


図 1 最速降下線問題の概念図

汎関数 地点 A から地点 B までの所要時間 T は、式(5)となる。

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad (5)$$

ここで、任意の位置(y座標が y であるような)での速度 v は式(6)で得られ、また式(7)の関係から、式(8)を得る。

$$v = \sqrt{2gy} \quad (6)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (7)$$

$$T = \int_{xa}^{xb} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx \quad (8)$$

点A, Bを結ぶ最も短い線は直線であるが、これが最速降下線ではないことは容易に分かる。直線の場合には進行方向加速度が一定であり、徐々に加速してスピードを上げてゆく。しかしもし、出発点Aにおいて、曲線が下方にまず向かうとすれば、直線の場合よりも早く落差によって速さを得ることができるため、少々経路が長くなっても到達までの所要時間が短くなる可能性が高いことになる。

**(1) 最速降下線問題の理論解[3]**

最速降下線問題は、Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli, Newton, de l'Hospitalらによって解かれてサイクロイド曲線であることが分かっている(式(9)(10), 図2)。また、この型の問題の一般的な解法は、Leonhard EulerとJoseph-Louis Lagrangeによって示されている。

$$x = \frac{C}{2}(t - \sin t), \quad y = \frac{C}{2}(1 - \cos t) \quad (9), (10)$$

サイクロイド曲線は図2のような曲線で、これは直径Cの円を点線に沿って右に転がしたときの、円の周囲上の一点の軌跡を表している。ここでtは媒介変数であり、図2では、t=0~πに変化させたときの様子を描いている。

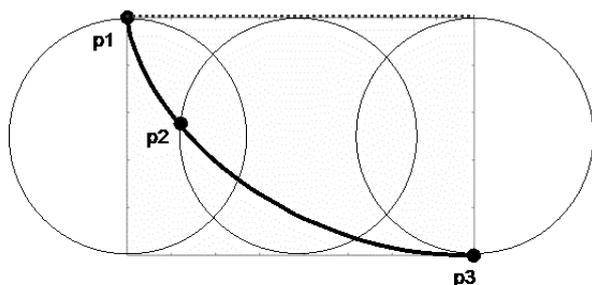


図2 サイクロイド曲線

**3.2 サイクロイド曲線の応用可能性**

図2のサイクロイド曲線は、点Aから点Bまでの曲線であるが、これを左右反転して右に接続して、このときの点Aの新しい位置をA'とすれば、実は点Aと点A'とを重力の作用だけで高速に移動できる曲線を表すことになる。この曲線では、元の点Aで質点が点Bに対して持つ位置エネルギーを使って加速して右方向に移動し、点A'に近づくに従って運動エネルギーが位置エネルギーに変換されて点A'の位置で静止する。というものである。

この方式の優れるところは、初期投入エネルギーが不

要であることと、移動のためのエネルギー回収が自動的に行われることにある。似た曲線を描くロケット方式では、まず重力に逆らうために大量のエネルギー投入を必要とする。さらに着地点ではそのエネルギーを回収することなく摩擦などの熱エネルギーに散逸させることで停止させることになる。

仮想の話ではあるが、もし東京-大阪間(約400km)をサイクロイド曲線で接続するとすれば、重力の作用だけで約8分間で結べる計算になる[3]。ただしこの場合サイクロイド曲線の最深部は地下127kmとなることからこのような深いトンネルは現実的には掘ることができない。また最深部での最高速度は、1600m/s(約マッハ4.7)に達することになるので現実には困難が多い。

しかし、もっと短距離でかつ人間の乗らない物流システム等であれば、最小限のエネルギー投入(空気抵抗対策、案内力システム)によって、拠点間で効率的に物体を移送できる可能性は残る。すでにJR方式のリニアではnull-flux方式により時速600km程度の速さでも電磁力による安定した案内が実現されている[5]。SF的になるが、2010年3月初旬にインドの月面探査機により、月の北極に約6億トンの水が発見されている。将来、月面に基地を設置する場合には、陽の当たる基地まで水を安定的に低エネルギーで移送する一方法として利用できる可能性もある(サイクロイド曲線の連結という手段もある)。空気抵抗も少なく、地殻も安定していること、使用できるエネルギーも限られる(太陽エネルギーなど)とすれば、その実現性は皆無とはいえないのではないだろうか。

他方、もし何らかの応用を地上で考える場合に避けられないのは、空気抵抗(速度に比例か二乗に比例)や摩擦(鉛直加重に比例)の考慮であろう。残念ながらその場合には、最速降下線はサイクロイドにはならず、理論的に曲線を求めるのはかなり困難と考えられる。しかし、先に述べた有限要素法などで採用される「区分関数近似」による数値解法を用いれば、実用的な曲線の近似解を求める可能性が開けることになる。

**3.3 数値解法の検討について**

以降では「最速降下線問題」を、区分関数近似の手法を用いて解く方法について述べる。有限要素法の定式化ではポテンシャルの自乗と相互積で汎関数が表されていたので扱いやすかったが、最速降下線問題では汎関数は式(8)のようになっており、複雑な多変数非線形関数の極値問題を扱うことになる。

この数値解法検討の目的の一つは、現在利用可能な数式処理システムが、どのように役に立つかを明らかにすることにある。

二つめは、区分関数近似でどれほどの精度を達成することができるかを明らかにすることにある。

三つめは、このアプローチによって、空気抵抗を考慮した現実解を得るようなスキームが描けるかどうかを明らかにすることにある。これについては5節でまとめて検討することにする。

これまでに自身では、約20年前に、数式処理を用いずに定式化し、プログラムを作成して簡単な可能性を検証したことはあるが、今回はその先の応用可能性を目指すことを考えて、あらためて数式処理を活用して進めることにする。これまでに他の研究者が数値解法について検討した論文では、数値解法が可能であることの検証が目的であるものや[6]、経路積分手法の検証例題として取り上げられたものがある[7]。

本稿では、数式処理システムの積極的活用による数式導出を行いながら、到達所要時間の算出精度の評価と、空気抵抗考慮についての発展可能性を含めて検討を行うこととする。

### 3.4 区分関数モデルの設定

最速降下線問題における区分関数モデルとして、最も容易でかつ変数の数が少ないものは、図3に示すようにx軸方向をn個に等分割し、それぞれに対応するy軸方向の値のみを可変とするモデルである。簡単のために各区間は直線で近似する。単純な計算を大量にこなせるデジタルコンピュータの特性を生かして解析するには、必要な精度に応じてこの区間を細かくする考えをとるのが得策といえる。

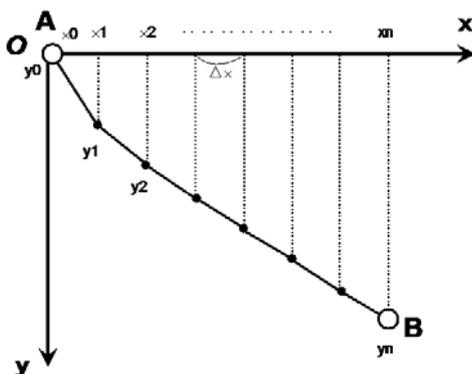


図3 最速降下線問題の区分関数モデル

### 3.5 区間内一定加速モデルの導出

図3のように各区間が直線であるモデルでは、一区内での加速度は一定値(重力加速度の接線成分)であるから、一定加速モデルとして容易に扱うことができる。

今、重力の接線成分を  $g_0$  とし、区間の長さを  $L$ 、区間での初速を  $v_0$  として式(11)の微分方程式を解く。その結果得られる速度  $v(t)$  の式を、式(12)のように区間内通

過所要時間  $t_e$  まで積分したものが  $L$  に等しいことから、 $t_e$  に関する2次方程式を解いて、 $g_0, v_0, L$  で表せばよい。

$$\frac{dv(t)}{dt} = g_0 \quad (11)$$

$$\int_0^{t_e} v(t) dt = L \quad (12)$$

以上の手順を、Maximaを用いて行った様子を、図4に示す。

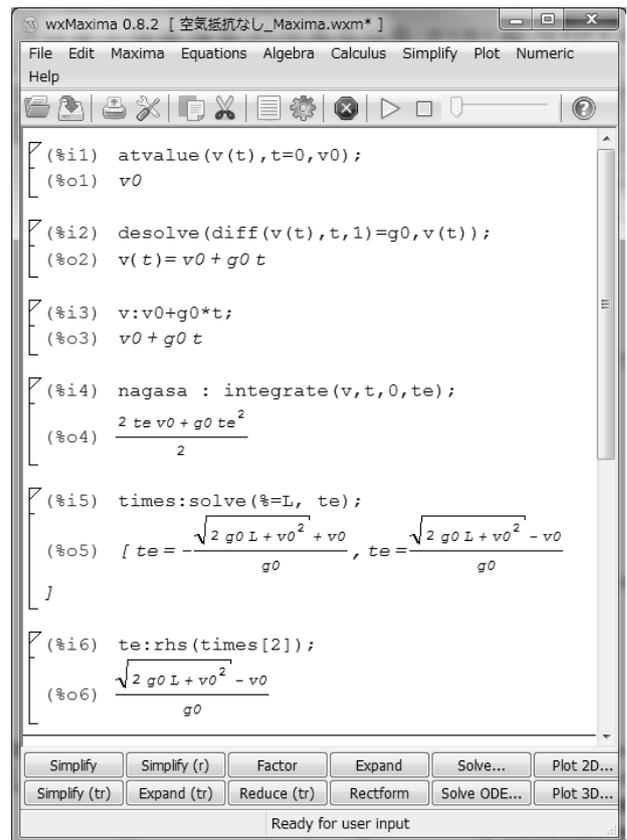


図4 Maximaによる区間内通過所要時間の導出

この結果から、通過所要時間  $t_e$  は式(13)となる。

$$t_e = \frac{\sqrt{2g_0L + v_0^2} - v_0}{g_0} \quad (13)$$

この  $t_e$  を、第  $k$  区間における通過所要時間  $T^{(k)}$  として書き直し、全区間について総和をとれば、区分関数モデルにおける総通過所要時間  $T$  を得ることができる(式(14))。

$$T = \sum_{k=1}^n T^{(k)} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{2g_0^{(k)}L^{(k)} + v_0^{(k)2} - v_0^{(k)}}}{g_0^{(k)}} \right\} \quad (14)$$

ただし、変数右肩の(k)は、区間kでの値であることを表すものとする。

式(14)の  $g_0^{(k)}$ ,  $L^{(k)}$  は、重力加速度  $g$  と区関数モデルの節となる点の  $x, y$  座標の組で表現でき、また  $v_0^{(k)}$  は、式(6)の  $y$  として区間(k)の開始点の  $y$  座標を代入すれば得られる。以上のことから、最終的に未知の変数である  $y_0 \sim y_n$  の関数として表現できる(式(15))。

$$T = T(y_0, y_1, \Lambda, y_n) \quad (15)$$

つまり、最速降下線の通過所要時間を汎関数として最短時間を求める変分問題は、多変数関数の極値問題に変換された。

あとは、多変数非線形関数の極値を求める数値計算プログラムを使用して(本研究ではマルカート法)、下記の条件を満たす解を数値的に求めればよい。

$$\text{極値条件: } \frac{\partial T}{\partial y_k} = 0 \quad |_{k=1, n-1} \quad (16)$$

$$\text{拘束条件: } y_0 = 0, y_n - 1.0 = 0 \quad (17)$$

なお、マルカート法における計算では、式(17)の重みを10とし、式(16)の重みは1.0とした。

今回の計算では、図1の  $x_a=y_a=0$  とし、 $x_b=\pi/2$ ,  $y_b=1$ ,  $C=1.0$ , 区間分割数  $n=40$  として計算を行った。結果から得られた区関数による近似解を、変分法による理論解と比較したグラフを図5に示す。

(Maxima のグラフ機能使用。y 軸を高度に選択。)

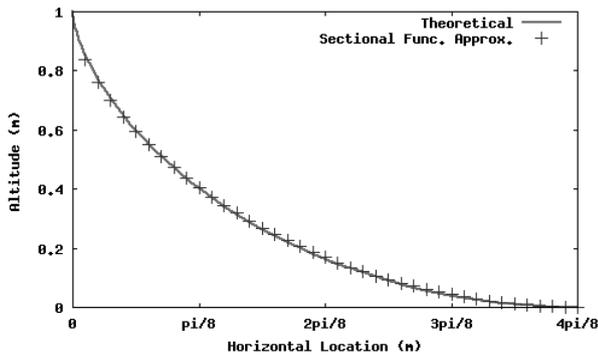


図5 理論解と区関数による近似解の比較

区間 AB の最短所要時間の理論値は、Maxima を利用してサイクロイド曲線を式(5)に適用することで、式(18)を導くことができた。

$$\pi \sqrt{\frac{C}{2g}} \quad (18)$$

本モデルでの所要時間の計算結果は下記の通りで、近似解の理論解に対する誤差は +0.21% に収まっている。

最短所要時間の理論値 = 0.709251529 [秒]

区関数近似による値 = 0.710748133 [秒]

ちなみに、直線経路とした場合の所要時間は式(13)を利用して計算でき、0.840780191 [秒]である。

#### 4 空気抵抗の考慮への課題と速度式の導出

以上までで、最速降下線問題を、区関数近似による手法で精度良く解けることを示した。しかし、区関数近似で解くことの意義は単なる数学的興味だけではない。最も大きな利点は、最速降下線問題を現実的な条件(空気抵抗考慮など)の下で解く拡張性に期待できることにある。

動摩擦の考慮については、すでに Mathworld において代数的に解いた例が紹介されている[8]。

そこで本稿では空気抵抗(低速では速度に比例、高速では速度の二乗に比例)を考慮した解析のために、各区間内での速度の関数を代数式の形で導き、区間内通過所要時間を求めることを検討する。

##### 4.1 速度に比例する空気抵抗のモデル(低速域)

区間内での接線方向速度  $v(t)$  に関する微分方程式は、次式で表される(ただし  $r$  は空気抵抗に関する比例定数)。

$$\frac{dv(t)}{dt} = g_0 - r \times v(t) \quad (19)$$

##### (1)Maxima による導出

式(19)を Maxima で代数的に解くと式(20)を得る。

$$v(t) = \frac{e^{-rt} (rv_0 - g_0) + g_0}{r} \quad (20)$$

ここで本稿の3.5節の手法と同様の手順で、区間内で時間について0から  $t_e$  まで積分し、その値が区間長  $L$  と等しいという条件で、 $t_e$  に関して代数的に解く操作を行ったところ、 $t_e$  を陰に含む代数方程式(21)までしか得ることができなかった。この場合、数値的に方程式(21)を満たす  $t_e$  を毎回求める必要がある。

$$t_e = \frac{e^{-rt_e} (e^{rt_e} (r^2 L - rv_0 + g_0) + rv_0 - g_0)}{g_0 r} \quad (21)$$

そこで Mathematica でも導出を試みた。

##### (2)Mathematica による導出

Maxima と同様に式(19)を解き、式(20)と同じ式を得た。そこで、さらに図6のようにして区間内通過所要時間  $t_e$  の代数的解の導出を試みた結果、式(22)を得た。

```
In[9]:=
s = ∫0te v dt
Out[9]= - $\frac{g_0 - r v_0}{r^2} + \frac{E^{-r t e} (g_0 + E^{r t e} g_0 r t e - r v_0)}{r^2}$ 
In[10]:= Solve[s == L, te]
```

図6 Mathematicaによる区間内通過所要時間の導出  
(速度に比例した空気抵抗の場合)

$$te \rightarrow \frac{1}{g_0 r} \left( g_0 + L r^2 - r v_0 + g_0 \text{ProductLog} \left[ E^{-\frac{r(Lr-v_0)}{g_0}} \left( -1 + \frac{r v_0}{g_0} \right) \right] \right) \quad (22)$$

ここでProductLog(対数積)は、別名ランベルトのw関数(あるいはオメガ関数)と呼ばれるものである。

以上のように、Mathematicaを用いた場合については、式(22)で、区間内通過所要時間teを陽な形式で算出する式を得ることができたが、そこに含まれるProductLogは具体的な各区間の情報に基づいて数値計算によって求める必要があるものと考えられる。

#### 4.2 速度の自乗に比例する空気抵抗のモデル (高速域)

区間内での接線方向速度v(t)に関する非線形微分方程式は、次式で表される(ただしrは空気抵抗に関する比例定数)。

$$\frac{dv(t)}{dt} = g_0 - r \times v(t)^2 \quad (23)$$

##### (1)Maximaによる導出

Maximaを用いて式(23)を代数的に解くことを試みたが、残念ながら解を得ることはできなかった。

##### (2)Mathematicaによる導出

式(23)の微分方程式を解いたところ図7のような速度に関する式を得た。この解に関しては、Maximaに渡して微分方程式の解であることを確認することができた。

```
In[2]:= DSolve[{v'[t] == g0 - r * v[t] * v[t], v[0] == v0}, v[t], t]
Out[2]:= {{v[t] ->  $\frac{\sqrt{g_0} \text{Tanh}[\sqrt{g_0} \sqrt{r} t + \text{ArcTanh}[\frac{\sqrt{r} v_0}{\sqrt{g_0}}]]}{\sqrt{r}}$ }}
```

図7 Mathematicaによる区間内速度関数の導出  
(速度の二乗に比例する空気抵抗)

ここで先と同様に、本稿の3.5節の手法の手順で、区間内通過所要時間teに関して代数的に解く操作を行ったところ、図8に示すような4つの解の計算式を得た。区間内での通過所要時間を得るためには、これらの解候補の値を算定し、物理的に適切な唯一解を得る必要がある。

#### 4.3 数式処理システムによる求解の差異について

4.1の結果から、速度に比例する空気抵抗の考慮を試みた場合には、数式処理システムの違いによって、区間内通過時間の解の表現式に差が生じることが明らかとなった。どちらの式が、計算精度と計算時間の点で有利であるかは、具体的な速度条件を設定した上で算定比較を行い、各手順の特質を精査する必要がある。

また、4.2の結果から、速度の自乗に比例する空気抵抗の考慮を試みた場合には、区間内所要時間として、複数の解候補が現れるため、具体的な定数の相互関係から、物理的に矛盾のない適切な解を選び出すアルゴリズムを、評価関数プログラム部分に組み込む必要があるものと考えられる。これらについては今後の課題としたい。

$$\left\{ \left\{ te \rightarrow \frac{-\text{ArcCosh} \left[ -\frac{E^{Lr} \sqrt{g_0}}{\sqrt{g_0 - r v_0^2}} \right] - \text{ArcTanh} \left[ \frac{\sqrt{r} v_0}{\sqrt{g_0}} \right]}{\sqrt{g_0} \sqrt{r}} \right\}, \right. \\ \left\{ te \rightarrow \frac{\text{ArcCosh} \left[ -\frac{E^{Lr} \sqrt{g_0}}{\sqrt{g_0 - r v_0^2}} \right] - \text{ArcTanh} \left[ \frac{\sqrt{r} v_0}{\sqrt{g_0}} \right]}{\sqrt{g_0} \sqrt{r}} \right\}, \\ \left\{ te \rightarrow \frac{-\text{ArcCosh} \left[ \frac{E^{Lr} \sqrt{g_0}}{\sqrt{g_0 - r v_0^2}} \right] - \text{ArcTanh} \left[ \frac{\sqrt{r} v_0}{\sqrt{g_0}} \right]}{\sqrt{g_0} \sqrt{r}} \right\}, \\ \left. \left\{ te \rightarrow \frac{\text{ArcCosh} \left[ \frac{E^{Lr} \sqrt{g_0}}{\sqrt{g_0 - r v_0^2}} \right] - \text{ArcTanh} \left[ \frac{\sqrt{r} v_0}{\sqrt{g_0}} \right]}{\sqrt{g_0} \sqrt{r}} \right\} \right\}$$

図8 Mathematicaによる区間内通過所要時間の導出  
(速度の二乗に比例する空気抵抗)

#### 5 まとめ

本稿では、数式処理システム(Computer Algebra System)と数値解析手法を併用して、拡張性の高い数値近似解を得る手法について、古典的問題である「最速降下線問題」を対象として検討を行った。その結果、区分関数近似にもとづく数値的近似解は、適切な式の導出と、これに応じた多変数非線形最適化計算プログラムを組み合わせることで、変分法を用いずとも十分に正確な解が得られることが明らかとなった。

また、空気抵抗考慮のように現実的な設定条件下での

最速降下線の近似解を得る方法についての考察を行った結果、数式処理システムによる解に差が現れる場合があることが明らかとなった。今後これらの差異についての精確な評価を推し進めることが必要である。

これらを解決できれば、今回提示した数値的な近似解法は、さらに現実的な条件、例えば速度によって空気抵抗と速度の関係が変化するような問題や、摩擦抵抗を同時に含むような複合問題についても、現実的な解を得られる可能性があるものと考えている。

## 参考文献

- [1] Maxima, a Computer Algebra System,  
<http://maxima.sourceforge.net/>
- [2] Computer Algebra System, Wikipedia,  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Computer\\_algebra\\_system](http://en.wikipedia.org/wiki/Computer_algebra_system)
- [3] (例えば) 科学者・技術者のための変分法, L. E. エル  
スゴルツ著, ブレイン図書出版
- [4] Macsyma, <http://en.wikipedia.org/wiki/Macsyma>
- [5] 正田英介, 藤江 恂治, 加藤純郎, 水間 毅, 「磁気  
浮上鉄道の技術」, オーム社, 平成4年
- [6] Aditya Mittal, Numerical Solution to the  
Brachistochrone Problem, Stanford University,  
Tue Nov 20 2001.  
<http://www.scientificchess.com/articles/Mittal-Numerical%20Solution%20to%20the%20Brachistochrone%20Problem.pdf>
- [7] 吉田洋明, 石川芳男, 山口雄仁, 近藤理良, 経路  
積分の概念に基づいた工学的最適化問題における  
新たな近似解法, 最適化シンポジウム講演論文集  
2002(5) pp. 189-194, 社団法人日本機械学会  
2002
- [8] Brachistochrone Problem,  
<http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html>