

[1] Random Process. $X(t)$

$$X(t) = \{ X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t), \dots \}$$

[2] Mean Value / Expectation

$$E[X(t)] \stackrel{d}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(t)$$

十分な Sample Function が
与えられているとき

⇒ Simulation
Numerical Solution

$$\stackrel{d}{=} \int_{-\infty}^{\infty} Xx f(Xx) dXx$$

Probability Density Function が
与えられているとき

⇒ Theoretical Solution

[Mean Value means a central trend.
Tendency.]

Random Process Mean Value Expectation Sample Func.

Simulation Numerical Solution Probability Density Function

[3] Standard Deviation 標準偏差 σ_{x_t}

Variance 分散値. $\sigma_{x_t}^2$

Mean Square Value 自乘平均值 $E[x^2(t)]$

$$E[x^2(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \quad (\text{definition})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_t^2 f(x_t) dx_t$$

↳ Coefficient of Variation 變動係數

= normalized standard deviation

$$V_{x_t} \stackrel{d}{=} \frac{\sigma_{x_t}}{E[x_t]}$$

$$\sigma_{x_t}^2 \stackrel{d}{=} E[x^2(t)] - \{E[x_t]\}^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2(t) - \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t) \right\}^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2(t) - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i(t) \cdot x_j(t)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ x_i^2(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_i(t) x_j(t) \right\}$$

つぎへ.

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ x_i^2(t) - x_i(t) \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j(t) \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ x_i^2(t) - x_i(t) E[x(t)] \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\left\{ x_i(t) - E[x(t)] \right\}^2 + x_i(t) E[x(t)] - \{E[x(t)]\}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ x_i(t) - E[x(t)] \right\}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i(t) \cdot E[x(t)] - \{E[x(t)]\}^2}_{E[x(t)]}$$

$$\therefore \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ x_i(t) - E[x(t)] \right\}^2$$

S.E.Q.

standard deviation Variance mean square value

coefficient of variance = ~~the~~ normalized standard deviation

[4] Autocorrelation Function

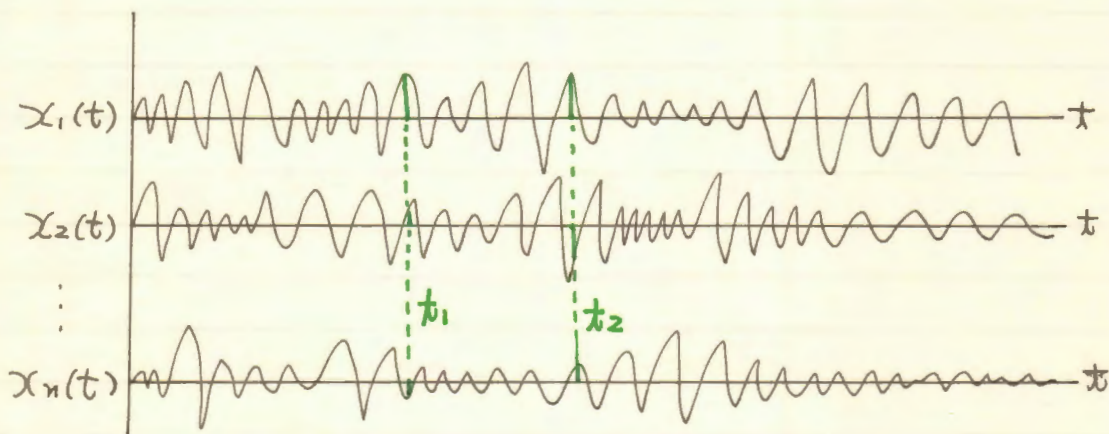
自己相関関数.

[Definition]

$$E[X(t_1) \cdot X(t_2)] \stackrel{d}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i(t_1) X_i(t_2)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_{t_1} X_{t_2} f(X_{t_1}, X_{t_2}) dX_{t_1} dX_{t_2}$$

$f(X_{t_1}, X_{t_2})$: Joint Probability Density Function



Product Multiplication

$$X_1(t_1) \cdot X_1(t_2)$$

$$X_2(t_1) \cdot X_2(t_2)$$

⋮

$$+ \underbrace{X_n(t_1) \cdot X_n(t_2)}$$

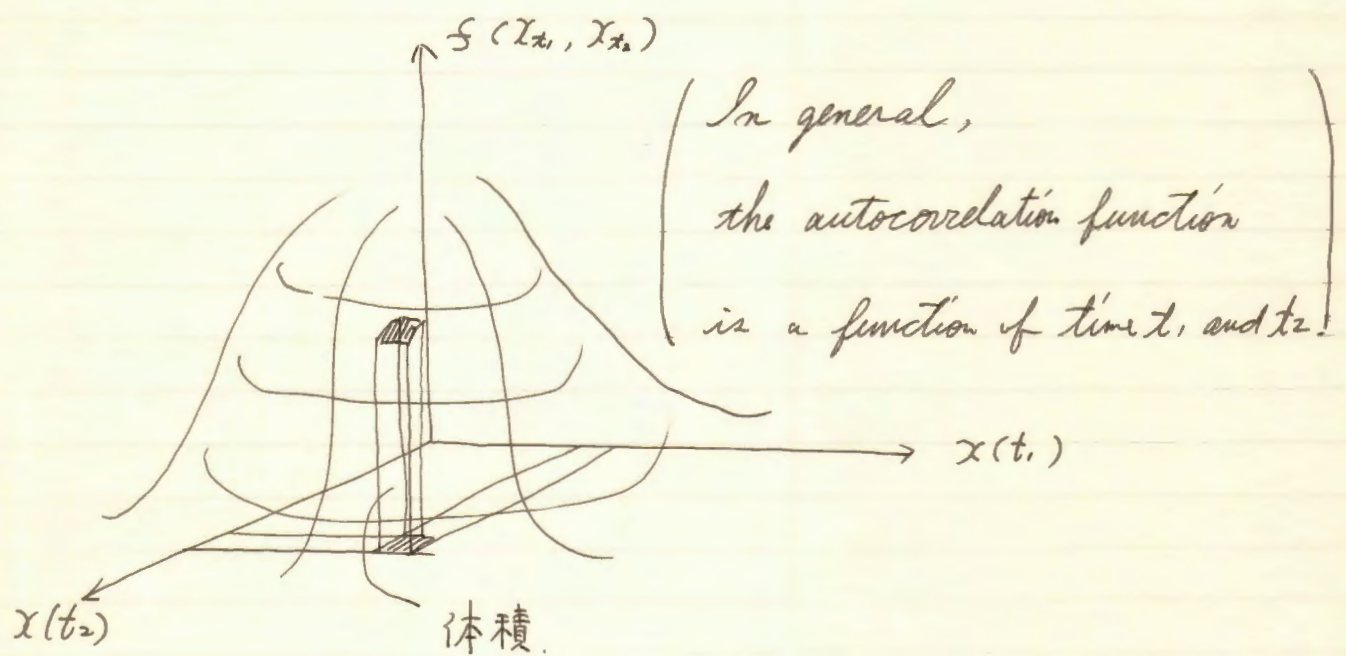
$$\frac{1}{n} \sum$$

傾向として、同符号の傾向であれば” 正の大きな値

” 異符号 ” ” 負の大きな値

いちぢるし” 傾向がなければ” 小さい値

を示すことが推測される。



When you get confused, go back to the origin.

Roman empire was not built in a day.

Study is as if we go a long way
with a heavy burden.

Sec1 ① Stationary Process 定常確率過程.

次の i) ii) が satisfy $\rightarrow X(t)$ は stationary

$$i) f(x_1) = f(x_2) = \dots = \text{constant}$$

$$\text{但し } x_i = X(t_i)$$

$$ii) f(x_i, x_j) = x_i \sim x_j = \tau \text{ のみの関数.}$$

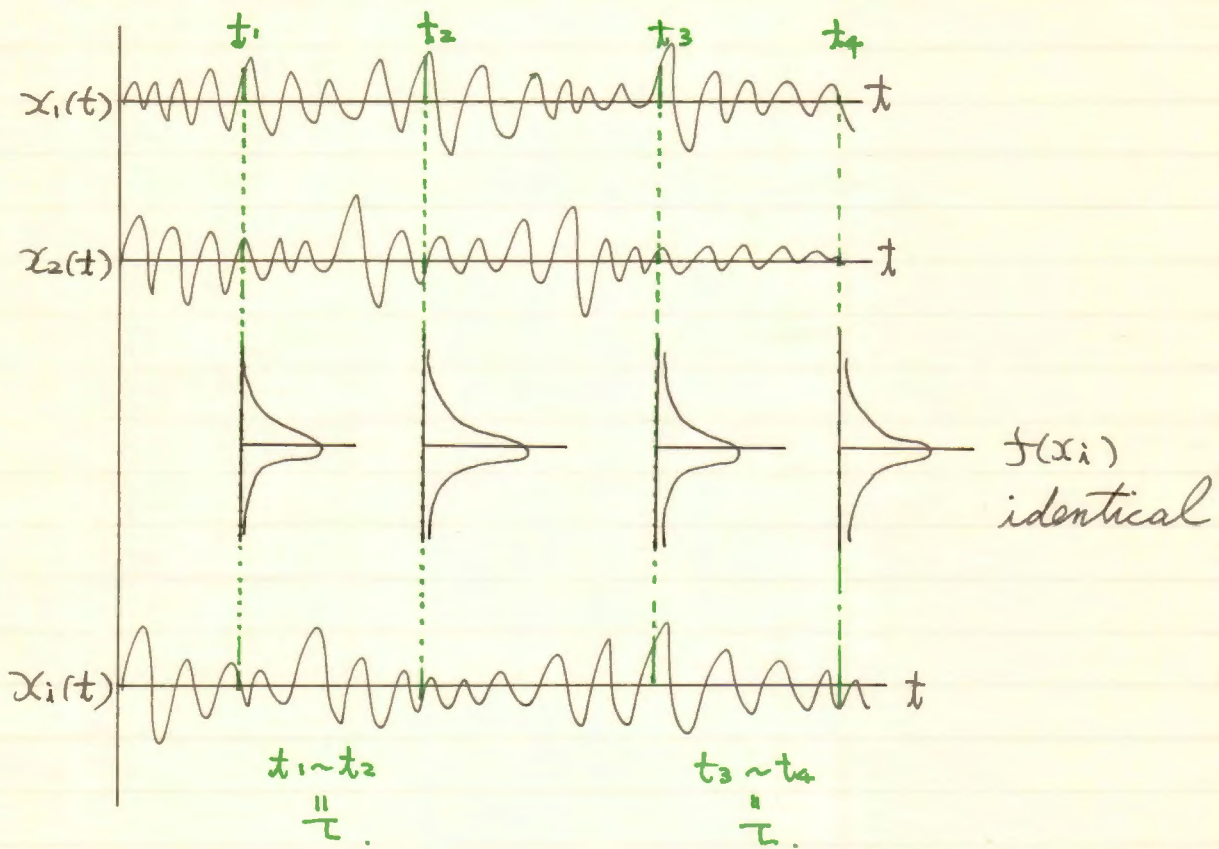
In other words (expressions)

$$i)' E[X(t)] = \text{constant}$$

independent of t

$$\therefore E[X_t] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_i) dx_i$$

$$ii)' E[X(t_i) \cdot X(t_j)] = R(t_i \sim t_j) = R(\tau)$$



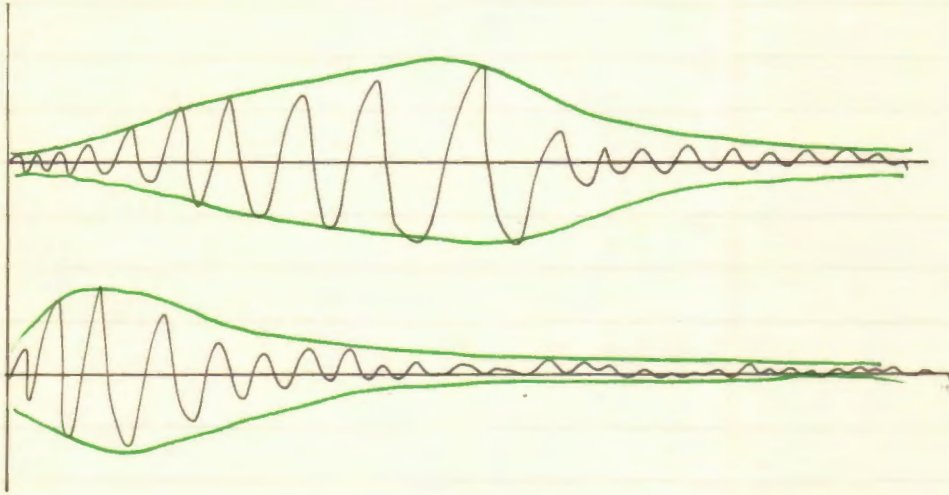
$$E[x(t_1) \cdot x(t_2)] = E[x(t_3) \cdot x(t_4)] = R(\tau)$$

Stationary Process



Mean Square Value	}	constant
Mean Value		
Variance		

In general, earthquake acceleration records
is non-stationary



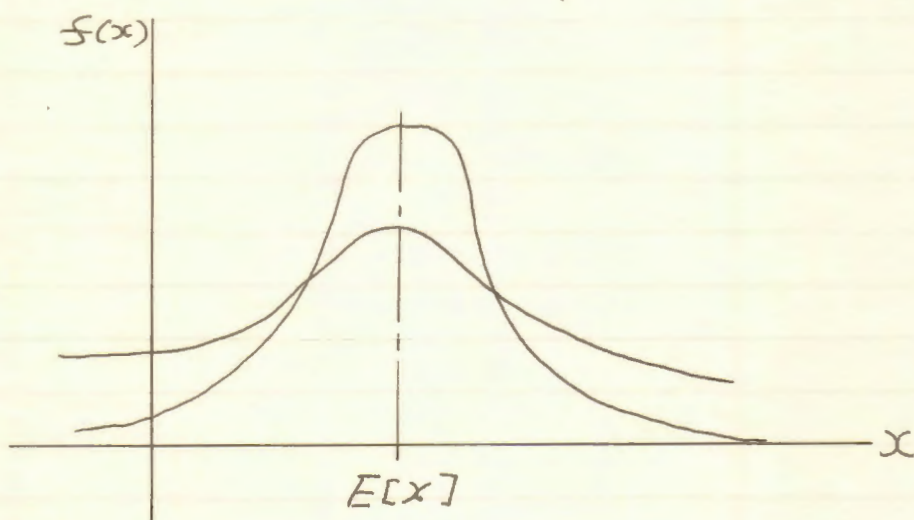
(註) 以前の non-stationary process をつくり出す考え方

$$X(t) = g(t) \cdot X_s(t)$$

$g(t)$: shape function (deterministic)

$X_s(t)$: stationary

(example.) Bell Shape type
(Gaussian Type.)



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp\left[-\frac{|x - E[x]|^2}{2\sigma_x^2}\right]$$

$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x : \text{standard deviation} \\ \sigma_x^2 : \text{variance} \end{array} \right.$

Stationary Gaussian Process



Non-stationary non-gaussian Process.

Stationary Process における Autocorrelation Function

(I) $R(\tau) = R(-\tau)$. Even Function

∴

$$E[x(t) \cdot x(t+\tau)] = R(\tau) \quad \dots (1)$$

$$t' = t + \tau \quad \text{shift}$$

$$E[x(t'-\tau) \cdot x(t')] = R(\tau) \quad \dots (2)$$

(1) において $\tau \rightarrow -\tau$

$$E[x(t) \cdot x(t-\tau)] = R(-\tau) \quad \dots (3)$$

Let's eqs. (2) and (3) be compared,
and then we lead to

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

S.E.Q.

first zone , second zone , zoning map , safety zone ,

tuition \rightarrow teacher \rightarrow professor

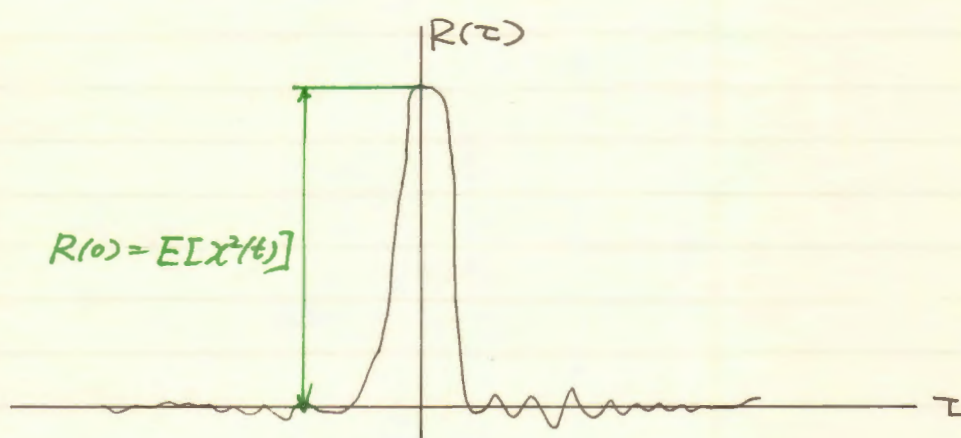
A good teacher should be a good agitator.

illusion , passive \leftrightarrow active , knowledge \leftrightarrow wisdom

$$(II) \quad R(0) = E[x^2(t)] = \text{M.S.V.}$$

$$\therefore R(0) = E[x(t) \cdot x(t+0)] = E[x^2(t)]$$

$$(III) \quad R(0) \geq |R(\tau)|$$



$\{x(0) \pm x(\tau)\}^2 \geq 0$ non-negative
" at least zero or greater than zero.

$$E[\{x(0) \pm x(\tau)\}^2] \geq 0$$

$$\therefore E[x^2(0)] \pm 2E[x(0) \cdot x(\tau)] + E[x^2(\tau)] \geq 0$$

$$R(0) \pm 2R(\tau) + R(0) \geq 0$$

$$R(0) \pm R(\tau) \geq 0$$

$$\therefore R(0) \geq |R(\tau)| \quad \text{S.E.Q.}$$

● Ergodic Process エルゴード過程

(ergodicity をもった process)

Stationary Process に対して, 次の i) ii) を satisfy する $X(t)$ を ergodic process と呼ぶ。

$$i) E[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T X_i(t) dt = \text{constant}$$

$$ii) R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T X_i(t) \cdot X_i(t+\tau) dt = \tau \text{ のみの function}$$

T : duration time
(継続 —)

In other expressions

i)' ある時間 t における期待値が, 1つのサンプル関数の時間方向の平均値に等しい。

ii)' 時間差 τ の自己相関係数は, 1つのサンプル関数においての, $X(t)$ と $X(t+\tau)$ の積の平均に等しい。

Ergodic $\xrightarrow{\text{always}}$ Stationary
 $\xleftarrow{\text{at necessarily}}$

① Power Spectrum (不変) パワースペクトル 単 spectra

$S(\omega)$.

Mean Square Power Spectral Density Function

自乗平均 パワースペクトル 密度関数.

(definition)

$$S(\omega) \stackrel{d}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) \stackrel{d}{=} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad \text{Inversible}$$

Fourier Transformation Pair

特性.

$$(I) \quad \boxed{S(\omega) = S(-\omega)} \quad \text{even function}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

$$e^{-i\omega\tau} = \cos\omega\tau - i\sin\omega\tau.$$

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

∴

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos\omega\tau d\tau - i \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \sin\omega\tau d\tau \right\}$$

$\sin\omega\tau$: odd function \downarrow
0

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos\omega\tau d\tau$$

$$\boxed{= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos\omega\tau d\tau} \quad \star$$

$R(\tau), \cos\omega\tau \Rightarrow$ even function

$$\therefore S(\omega) = S(-\omega)$$

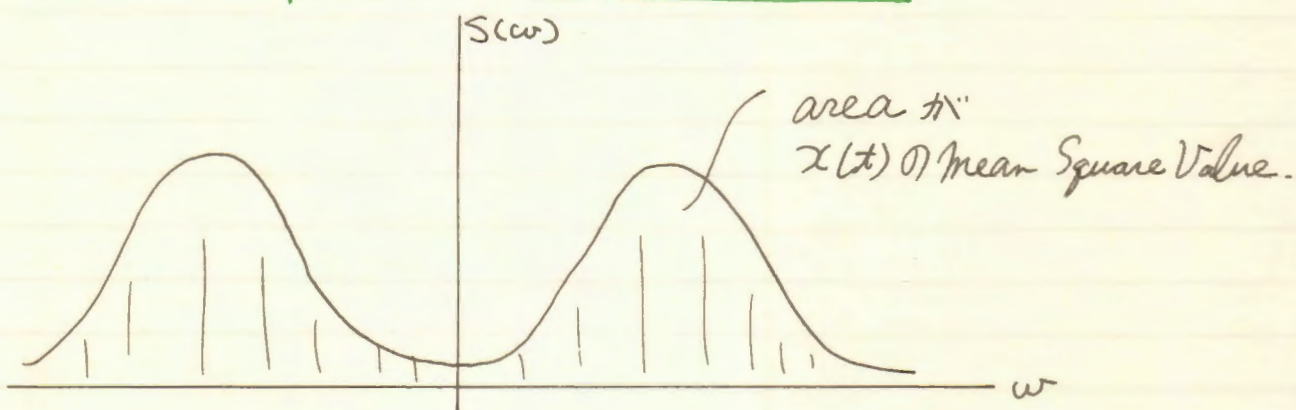
(II)

$$S(\omega) \geq 0$$

non-negative

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (*)$$

$$R(0) = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$



したがって $S(\omega) d\omega$ 自体が、 $(\omega, \omega+d\omega)$ の範囲の $E[x^2(t)]$ への寄与であるから、

$$S(\omega) \geq 0 \quad \text{である。}$$

ω の正領域だけで定義される Power Spectrum Func.

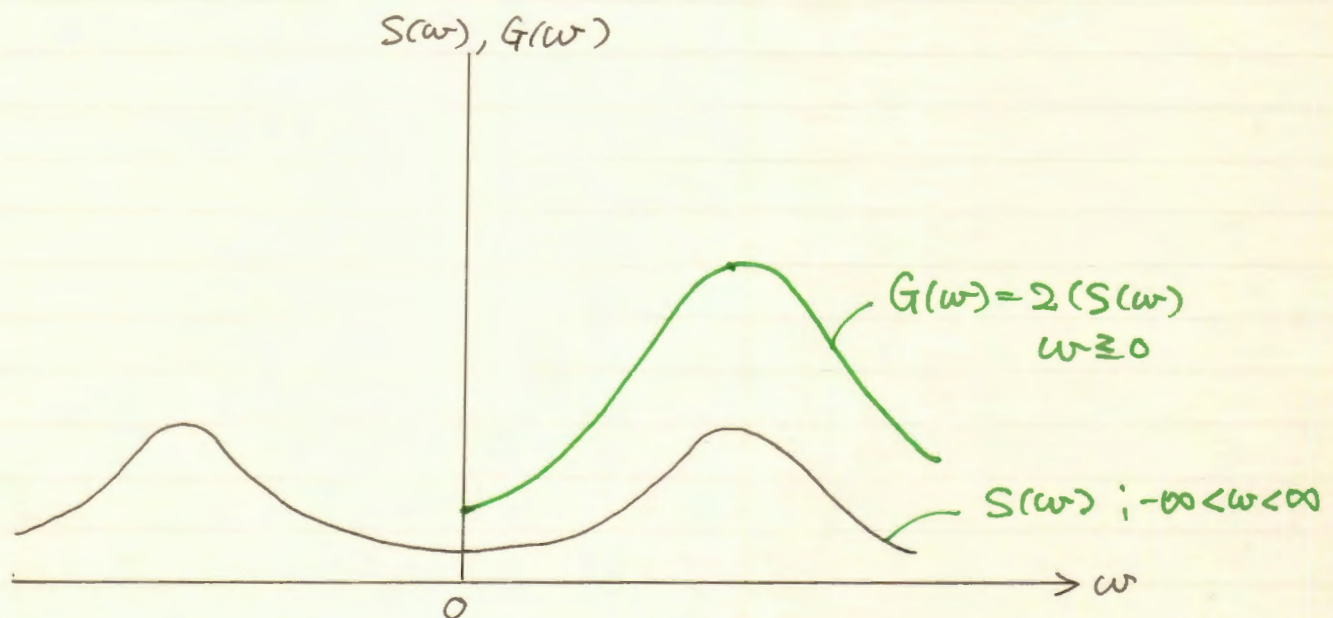
$$G(\omega) = 2S(\omega)$$

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad \omega \geq 0$$

$$R(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

よって

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$



5/9 ① $S(\omega)$, $X_i(t)$, $R(\tau)$ の傾向.

Stationary Process; $X(t)$

$$R(\tau) \iff S(\omega)$$

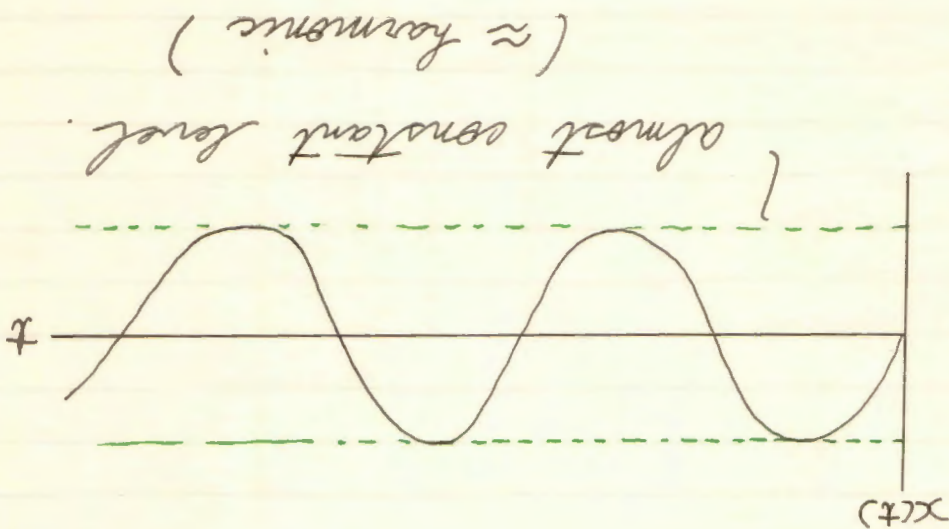
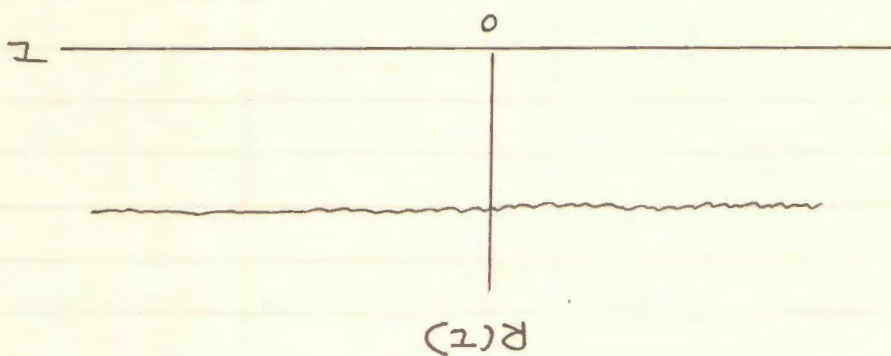
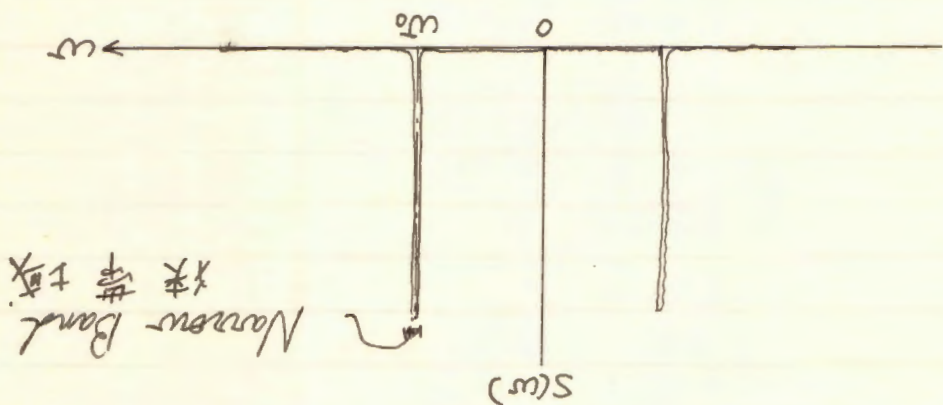
$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

振動数領域での特性.

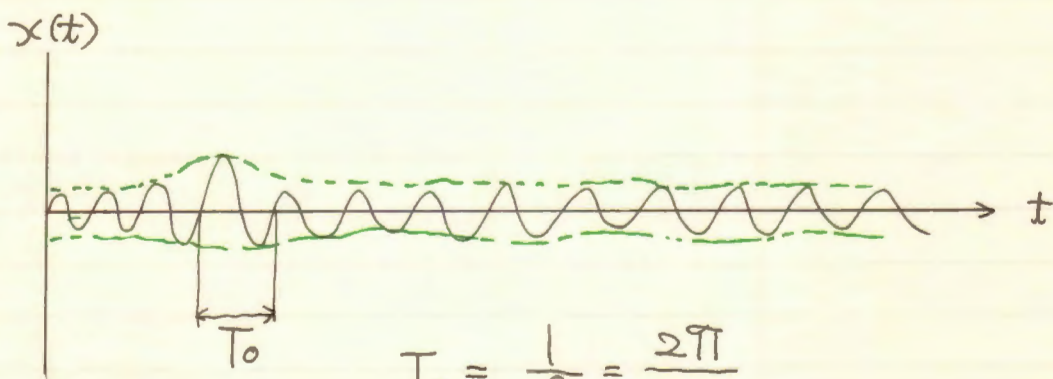
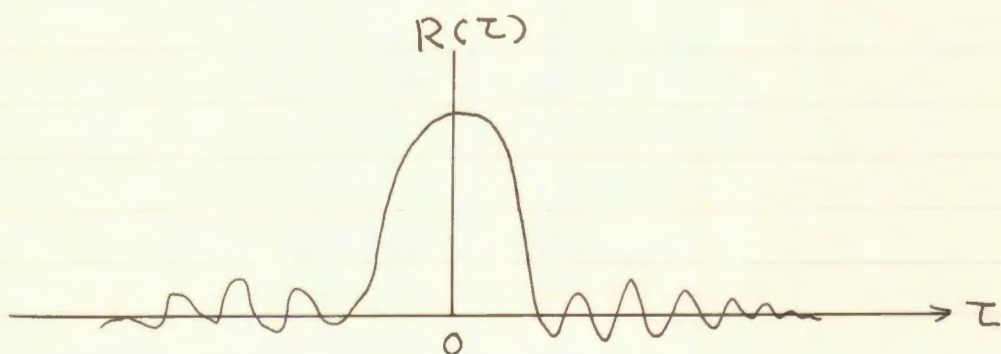
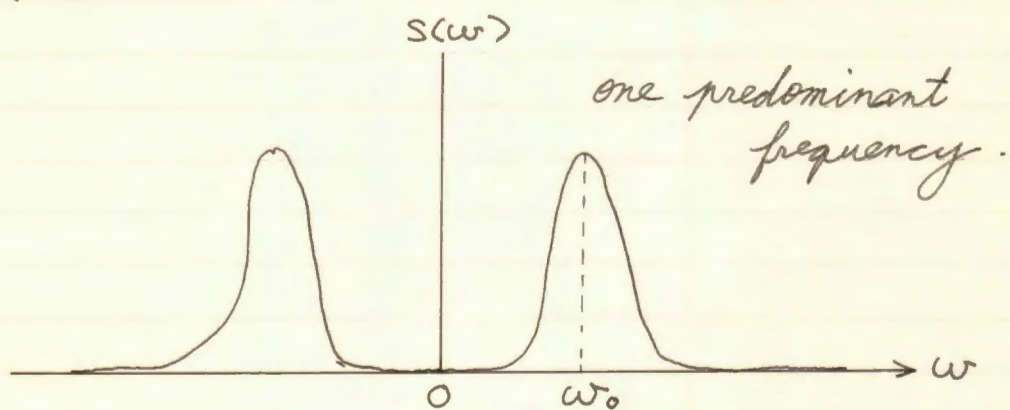
$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

時間領域での母集団特性.

恒向(I)



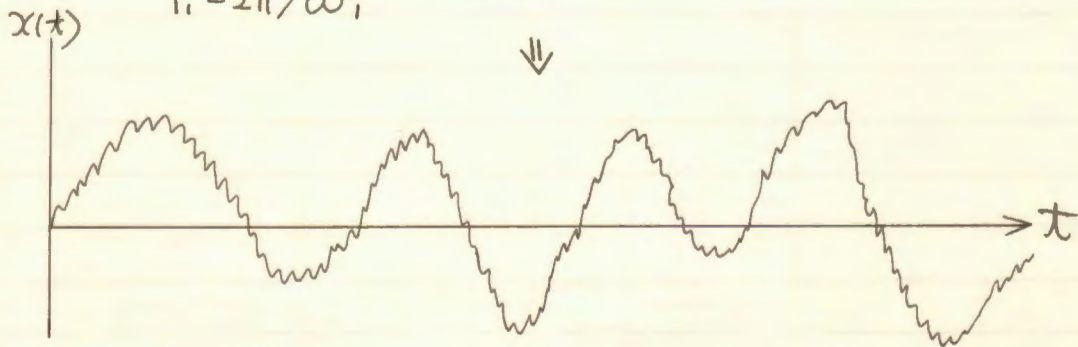
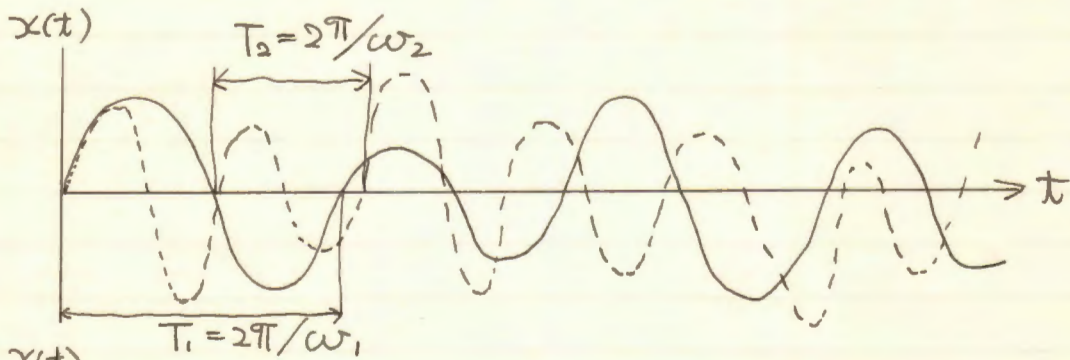
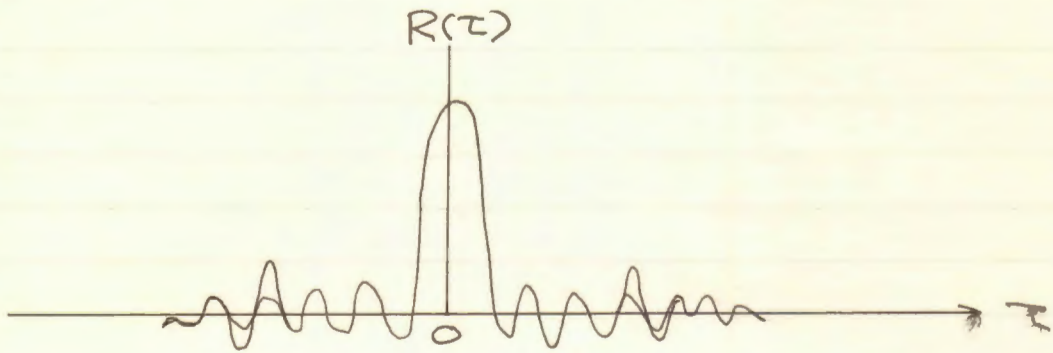
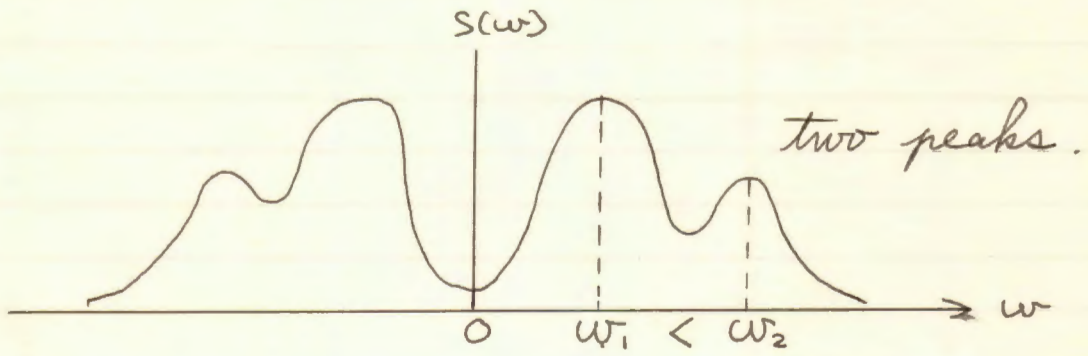
化質向(II).



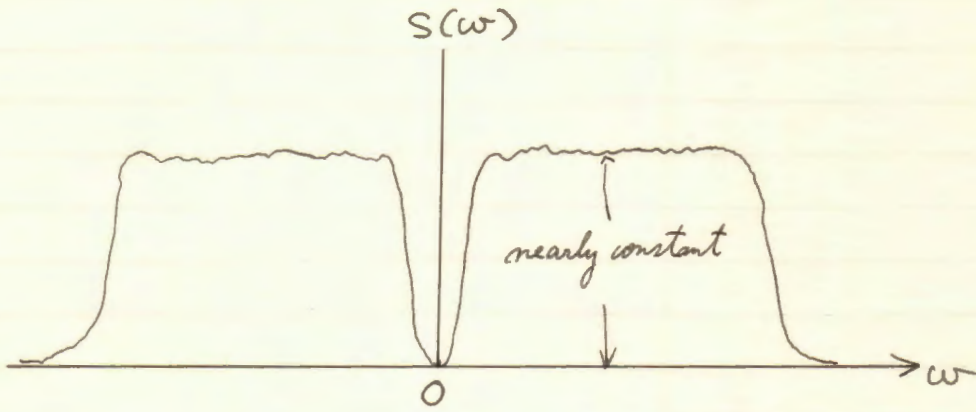
$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

f_0 $'_{sec}$, cps, Hz

傾向(Ⅲ)



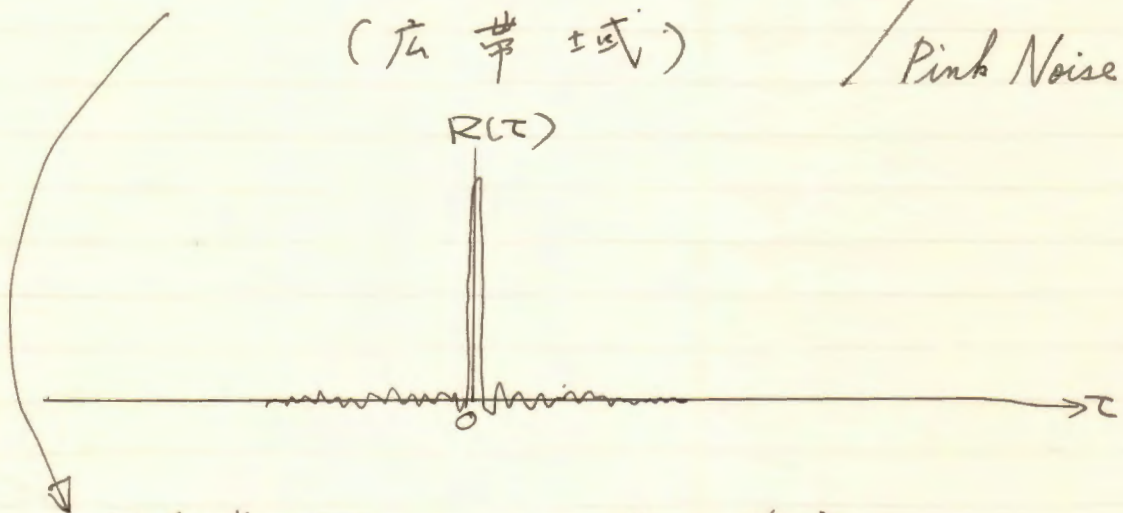
傾向(Ⅳ)



wide band Power Spectrum .

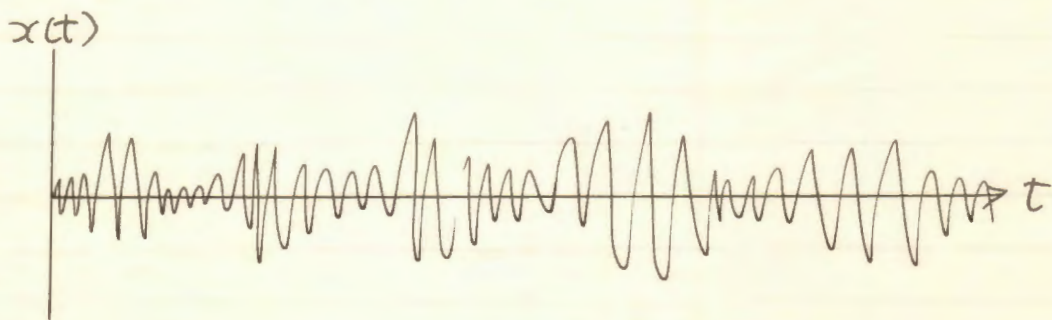
(広帯域)

/ Pink Noise

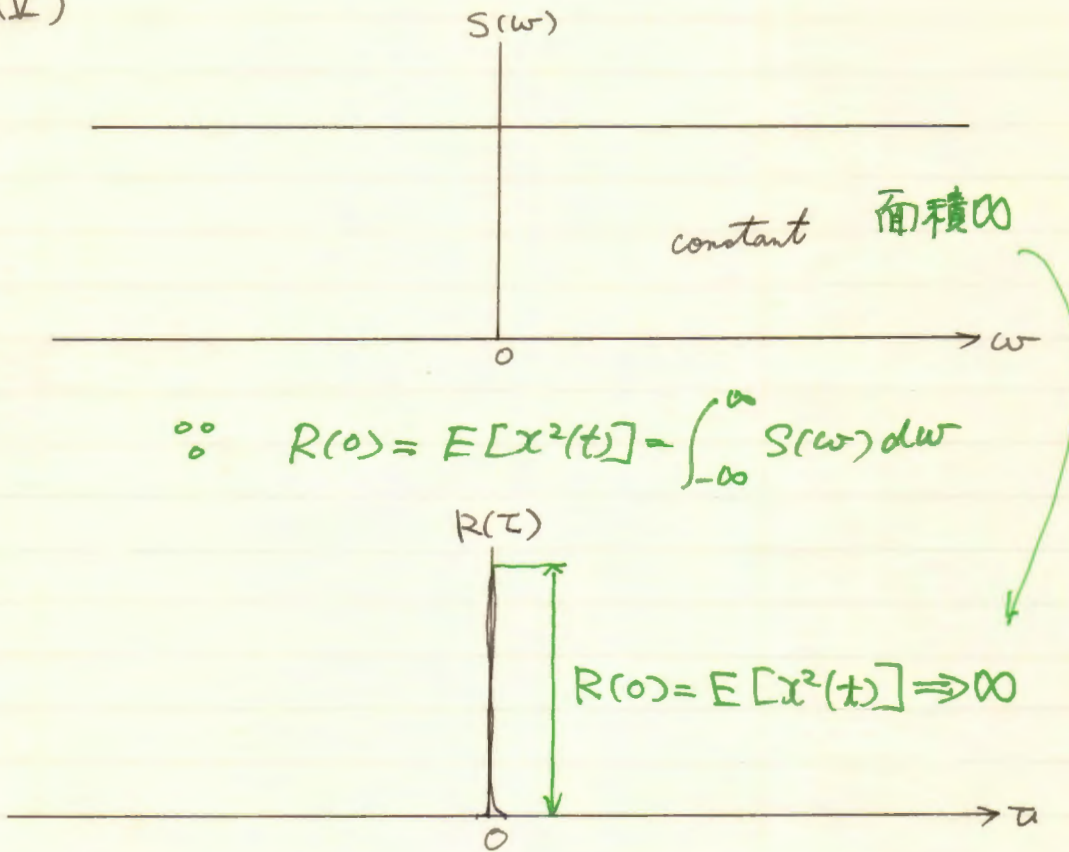


振動数成分が、ほぼ同一の強度で

広範囲に分布した。



傾向(V)

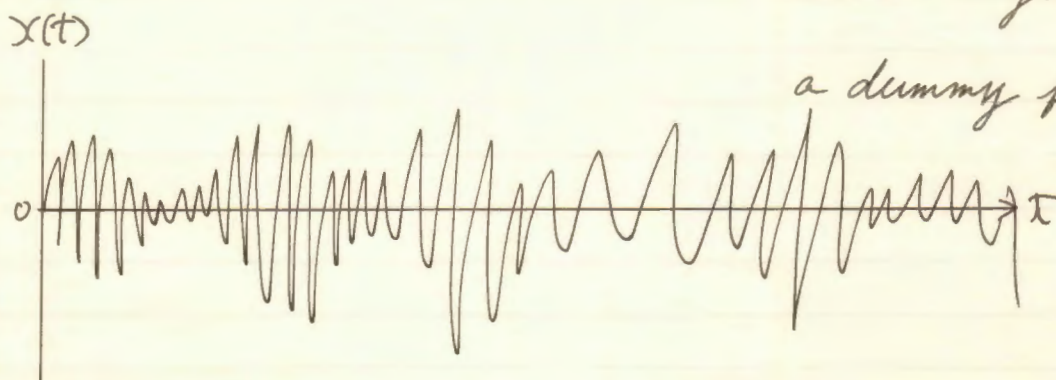


White Noise

Sun Beam 太陽光線

Tube light 管狀燈

a dummy fellow

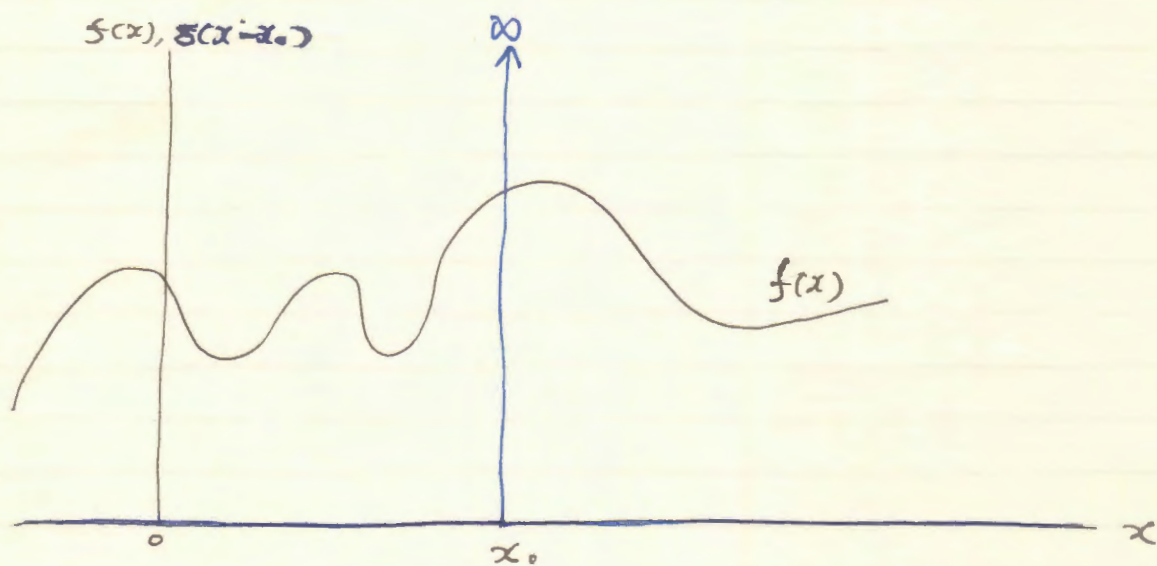


© Dirac Delta Function $\delta(x-x_0)$

definition

$$\text{(i)} \quad \delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty & \text{at } x=x_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) dx = 1, 0$$



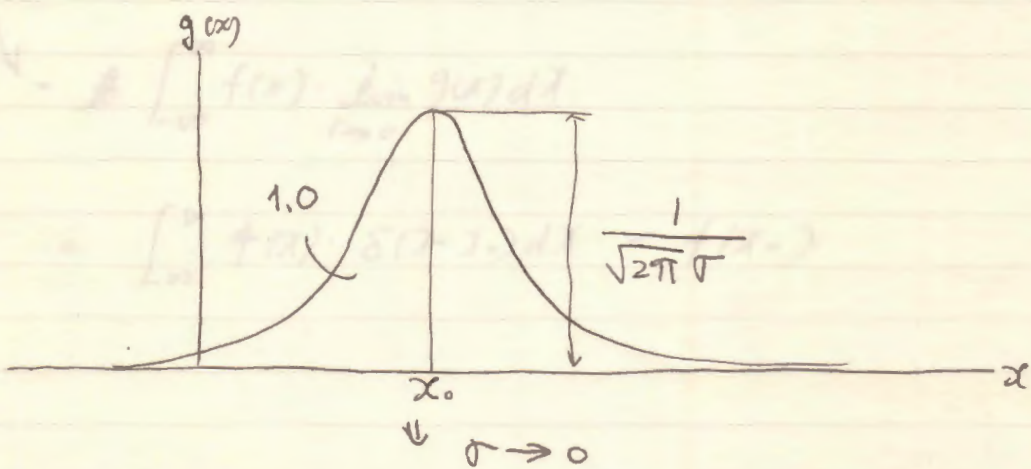
特性 1。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0)$$

特性 2。

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

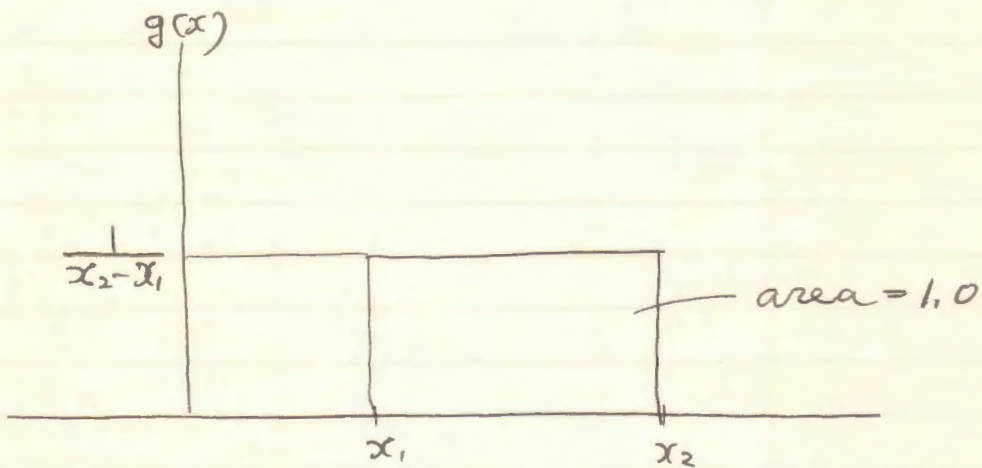
$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} g(x) = \delta(x-x_0)$$



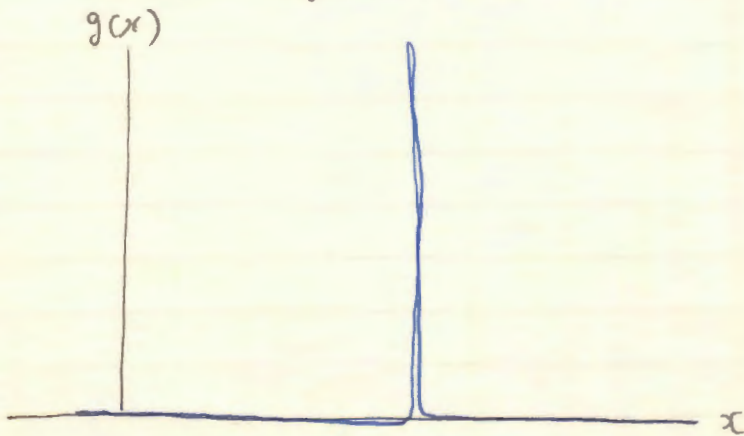
Ex 1] $f(x) = \sin x$ とする。

$g(x)$ と (2.4) 得る関数。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$\Downarrow x_2 - x_1 \rightarrow 0$



[EX2]

$R(\tau) = \delta(\tau)$ で与えられるとき.

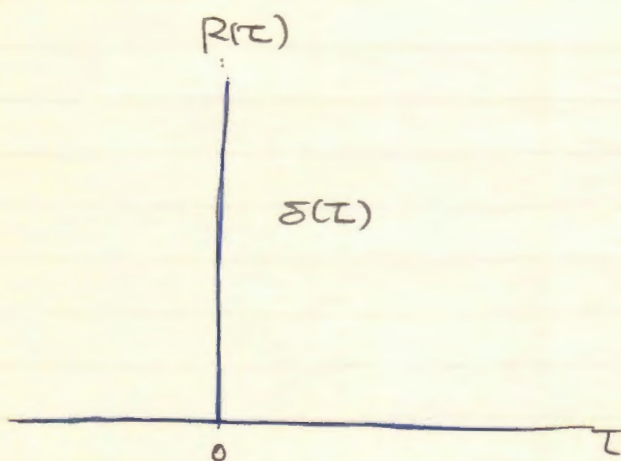
Power Spectrum の計算をせよ。

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-0) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-0) \cdot f(\tau) d\tau \quad (f(\tau) = e^{-i\omega\tau})$$

$$= \frac{1}{2\pi} f(0) = \frac{1}{2\pi} = \text{const}$$



[Ex3] $R(z) = e^{-a|z|}$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|z|} e^{-i\omega z} dz$$

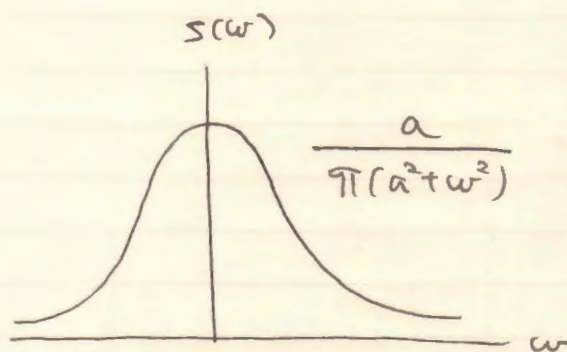
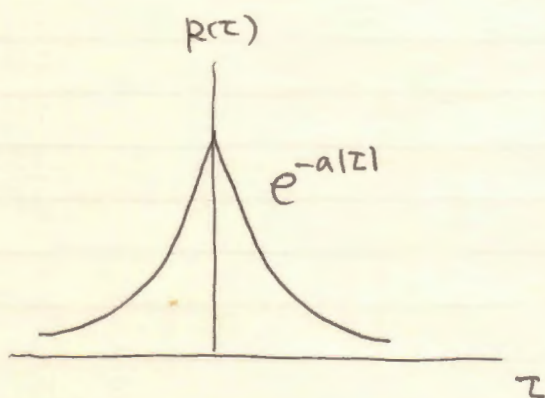
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{a\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a-i\omega)\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{a-i\omega} \left[e^{(a-i\omega)\tau} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-(a+i\omega)} \left[e^{-(a+i\omega)\tau} \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{a+i\omega}$$

$$= \frac{a}{\pi(a^2 + \omega^2)}$$



P23 (ii). $R(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T}$

(1) $S_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^0 \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^0 \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) \left(-\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega\tau}\right)' d\tau$$

$$= -\frac{1}{2\pi i\omega} \left\{ \left[\left(1 + \frac{\tau}{T}\right) e^{-i\omega\tau} \right]_{-T}^0 - \frac{1}{T} \int_{-T}^0 e^{-i\omega\tau} d\tau \right\}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i\omega} \left\{ 1 + \frac{1}{i\omega T} \left[e^{-i\omega\tau} \right]_{-T}^0 \right\}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i\omega} \left\{ 1 + \frac{1}{i\omega T} (1 - e^{i\omega T}) \right\}$$

(4) 同様にして

$$S_2(\omega) = -\frac{1}{2\pi i\omega} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) e^{-i\omega\tau} \right]_0^T + \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\omega\tau} d\tau \right\}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i\omega} \left\{ -1 - \frac{1}{i\omega T} \left[e^{-i\omega\tau} \right]_0^T \right\}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i\omega} \left\{ -1 - \frac{1}{i\omega T} (e^{-i\omega T} - 1) \right\}$$

$$S(\omega) = -\frac{1}{2\pi i\omega} \left\{ 1 + \frac{1}{i\omega T} (1 - e^{i\omega T}) - \left[-1 - \frac{1}{i\omega T} (e^{-i\omega T} - 1) \right] \right\}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i\omega} \cdot \frac{1}{i\omega T} (2 - e^{i\omega T} - e^{-i\omega T})$$

5/18. 2.7 相互相関関数 Cross correlation function

複数の確率過程の間の統計的特性を検討する。

$x_i(t)$: 構造物の基礎の加速度。

$x_j(t)$: 構造要素 j 点の変位。

$x_i(t)$ と $x_j(t)$ との間の統計的関係を考える。

[定義] $E[x_i(t_1) \cdot x_j(t_2)]$
↑
時間 t_1 にあたる加速度 時間 t_2 の変位。

・定常確率過程同士の間では、

$$R_{ij}(\tau) = E[x_i(t) \cdot x_j(t+\tau)]$$

相関の度合は時間差 τ (time lag)

のみで依存する。

$$R_{ij}(\tau) \cong \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_i^{(k)}(t) \cdot x_j^{(k)}(t+\tau) \Rightarrow \text{simulation}$$

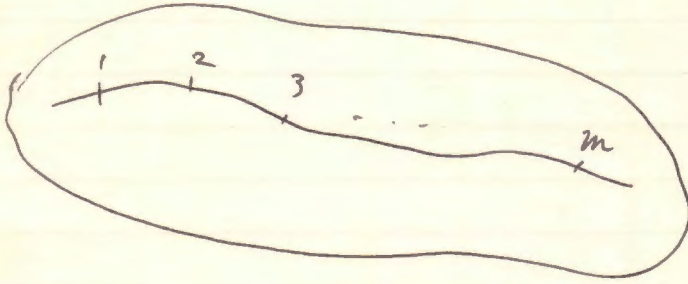
↑ k 番目の sample 関数。

相互パワースペクトル密度関数

$$S_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$i=j$ とき、 $S_{ij}(\omega) = S_{ii}(\omega)$... 1つの Process
の Power Spectrum

(例) 各地点の交通密度の相互関係.



m 箇の地点の交通密度 $\chi_i(t)$, $i=1, 2, \dots, m$

多次元定常確率過程

(m :次元)

相互相関マトリックス

(cross correlation matrix)

$$R(\tau) = \begin{bmatrix} R_{11}(\tau) & R_{12}(\tau) & \dots & R_{1m}(\tau) \\ R_{21}(\tau) & R_{22}(\tau) & \dots & R_{2m}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{m1}(\tau) & R_{m2}(\tau) & \dots & R_{mm}(\tau) \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \text{pl matrices} \end{matrix}$$

対角成分は、自己相関関数を表す。

相互パワースペクトル密度マトリックス.

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \dots & S_{1n}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \dots & S_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1}(\omega) & S_{m2}(\omega) & \dots & S_{mn}(\omega) \end{bmatrix}$$

○ $R_{ij}(\tau)$ と $R_{ji}(\tau)$ の関係.

$$R_{ij}(\tau) = E[x_i(t) \cdot x_j(t+\tau)] \quad \text{--- (1)}$$

$$R_{ji}(\tau) = E[x_j(t) \cdot x_i(t+\tau)] \quad \text{--- (2)}$$

1) 式で $\tau \rightarrow -\tau$

$$\begin{aligned} R_{ij}(-\tau) &= E[x_i(t) x_j(t-\tau)] \\ &= E[x_i(t+\tau) \cdot x_j(t)] \\ &= E[x_j(t) \cdot x_i(t+\tau)] \\ &= R_{ji}(\tau) \end{aligned}$$

$$\therefore R_{ij}(-\tau) = R_{ji}(\tau)$$

ただし $i=j$ のとき.

$$R_{ii}(-z) = R_{ii}(z) \quad \text{even function}$$

$$[\text{特性1}] \quad |R_{ij}(z)|^2 \leq R_{ii}(0) R_{jj}(0) \quad (2-87)$$

$$\left(\begin{array}{l} i=j \text{ 自己 — のとき.} \\ |R(z)|^2 \leq R(0)^2 \Rightarrow |R(z)| \leq R(0) \end{array} \right)$$

[特性 2]

$$S_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) \cos \omega\tau d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) \cdot$$

[特性2]

$$S_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) \cos \omega \tau d\tau - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

偶関数
ではない。

$i=j$ のとき
偶関数 \times 奇関数 \rightarrow 奇関数

Symmetric with respect to
(w. r. t.)
the origin

$$S_{ij}(\omega) = C_{ij}(\omega) + i Q_{ij}(\omega)$$

$C_{ij}(\omega)$: co-spectrum

$Q_{ij}(\omega)$: quad-spectrum

◦ 極座標表示が可了。

$$S_{ij}(\omega) = \sqrt{C_{ij}^2(\omega) + Q_{ij}^2(\omega)} e^{i \tan^{-1} \left\{ \frac{Q_{ij}(\omega)}{C_{ij}(\omega)} \right\}}$$

$$= |S_{ij}(\omega)| e^{i \theta_{ij}(\omega)}$$

↑
amplitude
振幅.

↑
phase angle
位相

[特性3] $|S_{ij}(\omega)|^2 \leq S_{ii}(\omega) S_{jj}(\omega)$ (2-100)

○ コヒーレンス関数 (coherence function)

$$(定義) \quad r_{ij}^2(\omega) = \frac{|S_{ij}(\omega)|^2}{S_{ii}(\omega) S_{jj}(\omega)}$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq r_{ij}^2(\omega) \leq 1 \\ \text{or} \\ -1 \leq r_{ij}(\omega) \leq 1 \end{array} \right]$$

$r_{ij}(\omega) = 1 \rightarrow$ 正の完全相関

$r_{ij}(\omega) = -1 \rightarrow$ 負の完全相関

$r_{ij}(\omega) = 0 \rightarrow$ 無相関.

2.9. 確率ポアソン過程 (Poisson) $N(t)$

確率計数過程 counting process.

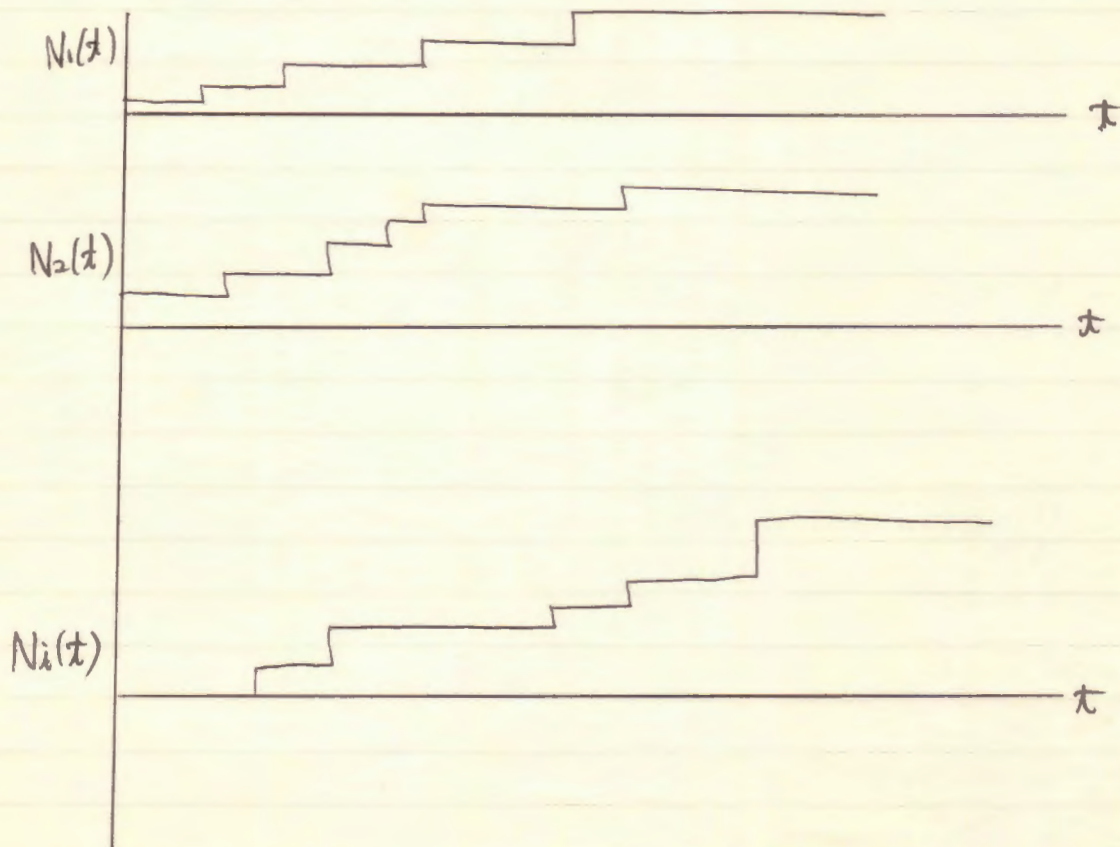
→ 整数値のみをとる.

cf. gate に arrive する cars の
一定時間間隔中

- Telephone operator を一定時間間隔中
に呼び出す回数.

等.

一方的に増えるだけである。
減ることはない。



$$N(t) = \{ N_1(t) \quad N_2(t) \quad \dots \dots \dots \}$$

Poisson Process の 3つの仮定.

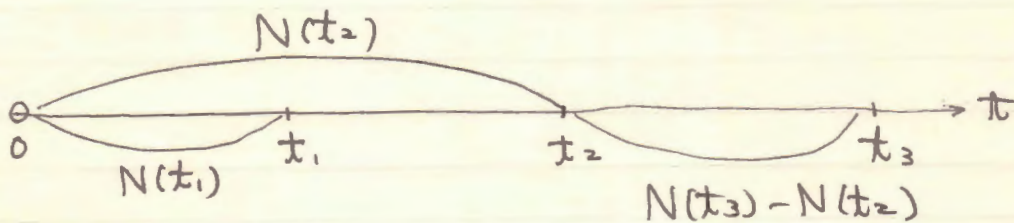
この1つの仮定でも満たされれば Poisson 分布は成り立たない。

(i) Independence

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots$$

$0 < t \leq t_1$ $(0, t_1]$ における到着量 $N(t_1)$
↑ ↑
open close
開区間 閉区間

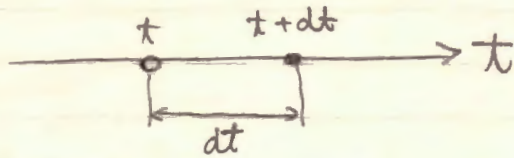
$0 < t \leq t_2$ $(0, t_2]$; $N(t_2)$



独立性とは: $N(t_1)$ と $N(t_3) - N(t_2)$ とは統計的に全く無関係である。

〈 重複しない区間における到着数は、過去における到着数とは独立である 〉

(ii) 微小時間 $(t, t+dt]$ 内に発生する



到着回数が1回である確率

$$\text{Probability} \left\{ \text{one arrive in } (t, t+dt] \right\} \\ = \lambda(t) dt$$

$\lambda(t)$: 到着率 / rate of arrival, rate of occurrence
 $0 \leq \lambda(t) dt \leq 1$.
時間 t によって変わる。

が存在する。

$$(iii) \lambda(t) dt \gg \sum_{k=2}^{\infty} \text{Prob} \left\{ k \text{ arrive in } (t, t+dt] \right\}$$

微小時間の到着回数はたかだか一台であり、
それ以上の到着数があるような場合は無視できる。

孤児は orphan (お-不安) you shall die
お-あは occur (お-る)

P30 ~ P32.

$P_{\{N_t\}}(n, t)$: $(0, t]$ に於いて $N(t) = n$ となる Prob.

$$P_{\{N_t\}}(n, t) = \frac{1}{n!} \left[\int_0^t \lambda(z) dz \right]^n e^{-\int_0^t \lambda(z) dz}$$

確率ポアソン過程の 確率関数.

↓
連続であれば 確率密度関数

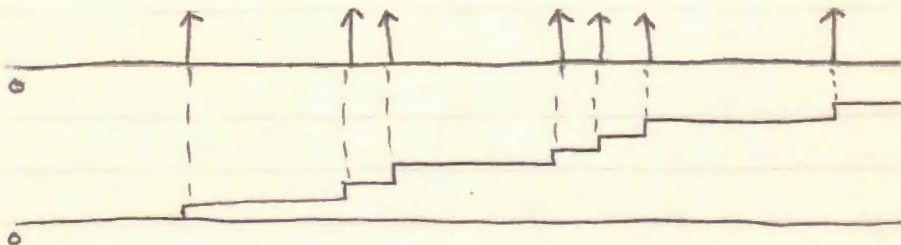
~ 定常ポアソン ~

$$\lambda(z) = \lambda_0 \text{ (constant)}$$

$$P_{\{N_t\}}(n, t) = \frac{1}{n!} (\lambda_0 t)^n e^{-\lambda_0 t}$$

例えば, 60分 に 10台 到着する Prob

$$\Rightarrow P_{\{N_t\}}(10, 60) \text{ 台/分}$$



大学院 応用数学 甲問題 1979年5月25日 17分

- 1 ~~(4)~~ $X = N(\mu_x, \sigma_x)$ のとき
- ~~(i)~~ Probability ($X \geq 3.0$) を計算せよ。 (但し $\mu_x = 2.3, \sigma_x = 1.5$)
 - ~~(ii)~~ Probability ($X \leq 0$)
 - ~~(iii)~~ Probability ($0 \leq X \leq 1.0$)

- 5 ~~(2)~~ $X = N(\mu_x, \sigma_x), Y = N(\mu_y, \sigma_y)$ のとき
- ~~(i)~~ $E[Z]$
 - ~~(ii)~~ σ_z^2 但し $Z = X + Y$ とし、 X と Y は互に独立とする。

- 10 (3) $X = N(\mu_x, \sigma_x), Y = N(\mu_y, \sigma_y)$ のとき
- $Z = X \cdot Y$ の確率密度関数を求めよ。 (但し X と Y は互に独立)

- ~~(4)~~ $X = \text{Unif}(0, 2\pi), Y = \text{Unif}(0, 2\pi)$ のとき
- ~~(i)~~ $Z = X + Y$ の確率密度関数
 - ~~(ii)~~ $Z = X - Y$ の

- 15 (5) ノット-スベクトルを計算せよ
- ~~(i)~~ $R(\tau) = \cos \omega_0 \tau$ のとき
 - ~~(ii)~~ $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ のとき 但し ω_0, α は定数

~~(6)~~ $N(t)$ の定常ポアソン過程 (但し到着率 λ_0 一定) のとき $X(t)$ を次のように定義することにする。

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } N(t) = 0 \text{ or } 1 \\ 0 & \text{if } N(t) \geq 2 \end{cases}$$

自己相関関数 $E[X(t_1)X(t_2)]$ を計算せよ。

$$2 \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)$$

[2] $N(t)$; 定常ポアソン過程, $P_{(N)}(N, t) = \frac{(\lambda_0 t)^n}{n!} e^{-\lambda_0 t}$

$$x(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} 1; & \text{if } N(t) = 0 \text{ or } 1 \\ 0; & \text{if } N(t) \geq 2 \end{cases}$$

(c) $E[x(t_1)x(t_2)] = ?$

$t_1 \geq t_2$ のとき.

$$P\{x(t_2) = 1 / x(t_1) = 1\} = 1$$

$$\left(\begin{array}{l} \because x(t_1) = 1 \rightarrow N(t_1) = 0 \text{ or } 1 \\ t_1 \geq t_2 \text{ より } N(t_1) \geq N(t_2) \\ \therefore N(t_2) = 0 \text{ or } 1 \rightarrow x(t_2) = 1 \end{array} \right)$$

$$R_x(t_1, t_2)$$

$$= 1 \times 1 \times P\{x(t_1) = 1 \cap x(t_2) = 1\}$$

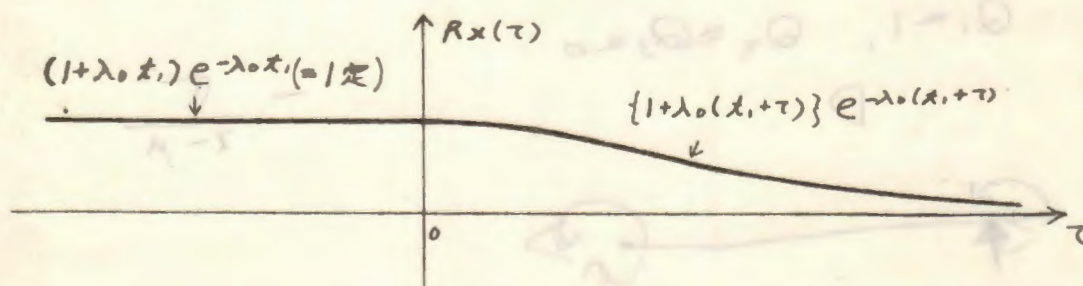
$$= P\{x(t_2) = 1\} P\{x(t_2) = 1 / x(t_1) = 1\}$$

$$= (1 + \lambda_0 t_1) e^{-\lambda_0 t_1}$$

$t_1 < t_2$ のときは同様に.

$$R_x(t_1, t_2) = (1 + \lambda_0 t_2) e^{-\lambda_0 t_2}$$

$$= \{1 + \lambda_0(t_1 + \tau)\} e^{-\lambda_0(t_1 + \tau)} \quad (\tau = t_2 - t_1)$$



应用力学特論

課題レポート

提出日 S54, 6,

橋梁研究室 9504

皆川 勝

$$(1) \quad X = N(\mu_X, \sigma_X)$$

$$f_X = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2}$$

$$\therefore P(a < X < b) = \int_a^b f_X dX \quad \text{であるから、}$$

$$\begin{aligned} \text{不定積分} \int_a^b f_X dX \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X} \int_a^b e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2} dX \end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad \text{とおけば、} \quad dX = \sigma_X dy \quad (*)$$

$$\int_a^b f_X dX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a'}^{b'} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy$$

$$\left(\text{ただし } a' = \frac{a - \mu_X}{\sigma_X}, \quad b' = \frac{b - \mu_X}{\sigma_X} \right)$$

\therefore 標準正規確率分布関数.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f_X dX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} t^2} dt$$

を用いて、

$$\int_a^b f_X dX = \Phi(b') - \Phi(a')$$

となる。

(i) Probability ($X \geq 3.0$)

$$\begin{aligned} P(X \geq 3.0) &= \int_3^{\infty} f_x dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{3-2.3}{1.5}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0.47}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= 1 - \Phi(0.47) \\ &= 0.3192 \quad (\text{標準正規確率分布数表より}) \end{aligned}$$

(ii) Probability ($X \leq 0$)

$$\begin{aligned} P(X \leq 0) &= \int_{-\infty}^0 f_x dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{2.3}{1.5}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1.53} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \Phi(-1.53) \\ &= 1 - \Phi(1.53) \\ &= 0.0630 \end{aligned}$$

(iii) Probability ($0 \leq X \leq 1.0$)

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 1.0) &= \int_0^1 f_x dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.53}^{\frac{1-2.3}{1.5}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.53}^{-0.87} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \Phi(-0.87) - \Phi(-1.53) \\ &= \{1 - \Phi(0.87)\} - \{1 - \Phi(1.53)\} \\ &= 0.1922 - 0.0630 \\ &= 0.1292 \end{aligned}$$

数表は、星谷勝著「確率論手法による構造解析」に付

$$(2) \quad X = N(\mu_x, \sigma_x^2), \quad Y = N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

$$(i) \quad E[X] = \mu_x, \quad E[Y] = \mu_y$$

\therefore X と Y は互いに独立であるから.

$$\begin{aligned} E[X+Y] &= \iiint (x+y) f(x,y) dx dy \\ &= \iiint x f(x,y) dx dy + \iiint y f(x,y) dx dy \\ &= \int x \left\{ \int f(x,y) dy \right\} dx + \int y \left\{ \int f(x,y) dx \right\} dy \\ &= \int x f(x) dx + \int y f(y) dy \\ &= E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

$$\therefore E[Z] = E[X] + E[Y] = \mu_x + \mu_y$$

(ii)

$$\sigma_x^2 = E[X^2] - \{E[X]\}^2 \text{ より}$$

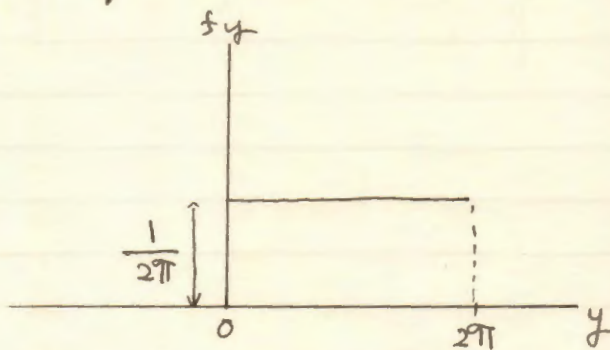
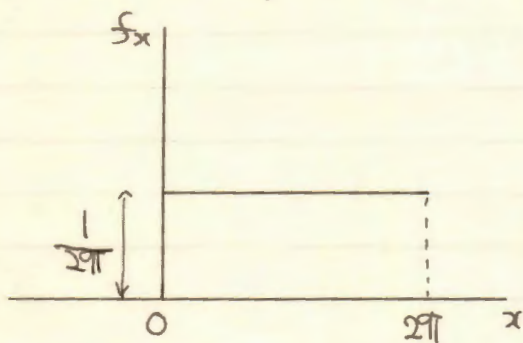
$$\begin{aligned} \sigma_{X+Y}^2 &= E[(X+Y)^2] - \{E[X+Y]\}^2 \\ &= E[X^2 + 2XY + Y^2] - \{E[X] + E[Y]\}^2 \\ &= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] - \{E[X]\}^2 - 2E[X]E[Y] - \{E[Y]\}^2 \\ &= E[X^2] - \{E[X]\}^2 + E[Y^2] - \{E[Y]\}^2 + 2E[X]E[Y] - 2E[X]E[Y] \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

(3) $x = N(\mu_x, \sigma_x)$, $y = N(\mu_y, \sigma_y)$

$z = x \cdot y$ の確率密度関数.

$$(4) \quad x = \text{Unif}(0, 2\pi) \quad y = \text{Unif}(0, 2\pi)$$



(i) $z = x + y$ の確率密度関数.

z の確率分布関数を $H(z)$ とする.

$$H(z) = \text{Prob}(x + y < z)$$

$$= \iint_{x+y < z} f_x(x) \cdot f_y(y) dy dx$$

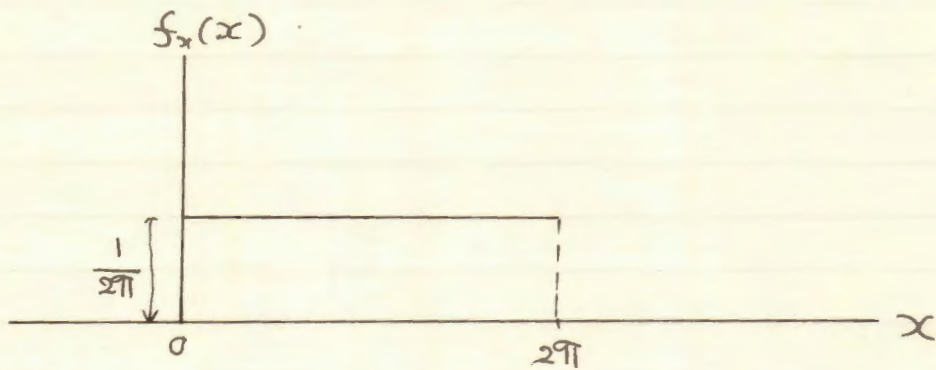
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_x(x) f_y(y) dy dx$$

$$w = x + y \text{ とおくと.} \quad \begin{cases} dy & z-x \rightarrow -\infty \\ w & z \rightarrow -\infty \\ dw & = dy \end{cases}$$

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^z f_x(x) f_y(w-x) dx dw = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(w-x) dx dw$$

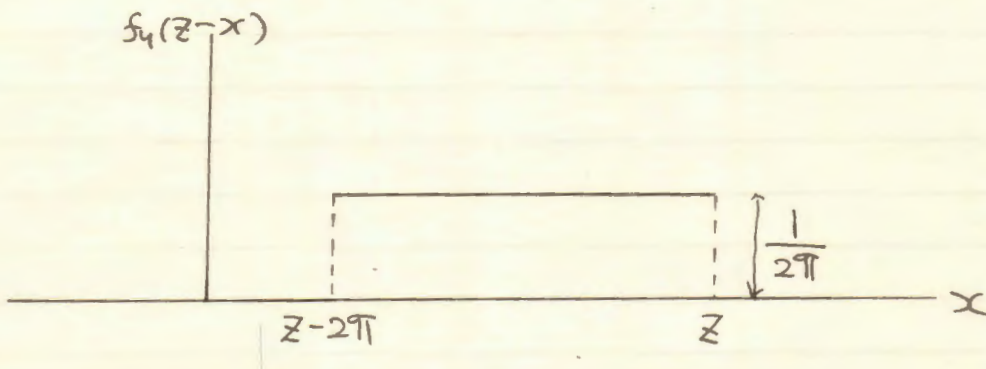
両辺を z で微分すると, z の確率密度関数を $f_z(z)$ とすれば

$$f_z(z) = H'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot f_y(z-x) dx$$



$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & (0 \leq y \leq 2\pi) \\ 0 & (y \leq 0, 2\pi \leq y) \end{cases}$$

$$\therefore f_y(z-x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & (z-2\pi \leq x \leq z) \\ 0 & (x \leq z-2\pi, z \leq x) \end{cases}$$



① $z \leq 0$ 又は $2\pi \leq z-2\pi$ 故に $z \leq 0$ 又は $4\pi \leq z$ のとき.

$$f_z(z) = 0$$

② $0 \leq z-2\pi \leq 2\pi$ 故に $2\pi \leq z \leq 4\pi$ のとき

$$f_z(z) = \int_{z-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{4\pi^2} [x]_{z-2\pi}^{2\pi} = \frac{4\pi - z}{4\pi^2}$$

③ $0 \leq z \leq 2\pi$ のとき

$$f_z(z) = \int_0^z \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{4\pi^2} [x]_0^z = \frac{z}{4\pi^2}$$

(ii) $Z = X - Y$ の確率密度関数.

(i) と同様にして.

$$H(Z) = \text{Prob}(X - Y < Z)$$

$$= \iint_{x-y < Z} f_x(x) f_y(y) dy dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-Z}^{\infty} f_x(x) f_y(y) dy dx$$

$w = x - y$ とおく.

$$dy = -dw.$$

y	$x - Z \rightarrow \infty$
w	$Z \leftarrow -\infty$

$$H(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^Z f_x(x) f_y(x-w) dw dx$$

$$= \int_{-\infty}^Z \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(x-w) dx dw$$

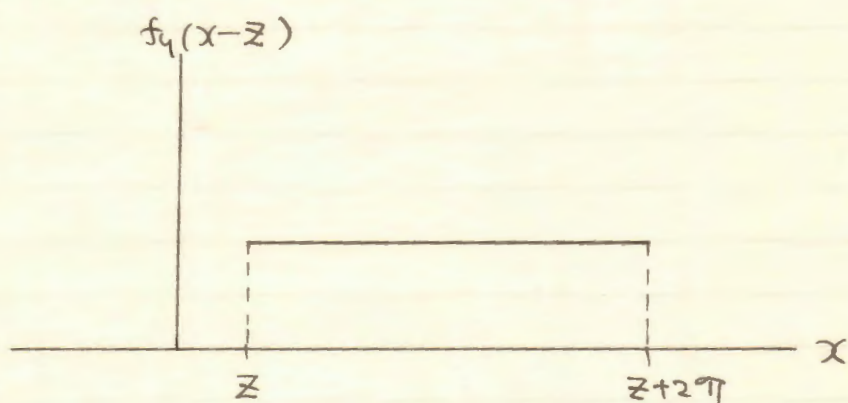
両辺を Z で微分すると.

$$f_Z(Z) = H'(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(x-Z) dx$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & (0 \leq y \leq 2\pi) \\ 0 & (y \leq 0, 2\pi \leq y) \end{cases}$$

例)

$$f_y(x-z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & (z \leq x \leq 2\pi+z) \\ 0 & (x \leq z, 2\pi+z \leq x) \end{cases}$$



① $z+2\pi \leq 0$ or $2\pi \leq z \rightarrow z \leq -2\pi$ or $2\pi \leq z$ のとき.

$$f_z(z) = 0$$

② $0 \leq z \leq 2\pi$ のとき.

$$f_z(z) = \int_z^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{4\pi^2} (-z + 2\pi)$$

③ $0 \leq z+2\pi \leq 2\pi$ となる $-2\pi \leq z \leq 0$ のとき

$$f_z(z) = \int_0^{z+2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{4\pi^2} (z+2\pi)$$

(5) パワースペクトル計算.

(i) $R(\tau) = \cos \omega_0 \tau$

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau d\tau \end{aligned}$$

(1) $\omega \neq \pm \omega_0$ のとき.

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos(\omega_0 \tau + \omega \tau) + \cos(\omega_0 \tau - \omega \tau) \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(\omega_0 \tau + \omega \tau)}{\omega_0 + \omega} + \frac{\sin(\omega_0 \tau - \omega \tau)}{\omega_0 - \omega} \right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

$$|\sin(\omega_0 \tau + \omega \tau)| \leq 1, \quad |\sin(\omega_0 \tau - \omega \tau)| \leq 1$$

よ)

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} [0 + 0] = 0$$

(2) $\omega = \omega_0$ or $\omega = -\omega_0$ のとき

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos^2 \omega_0 \tau d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (1 - \cos 2\omega_0 \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\tau - \frac{\sin 2\omega_0 \tau}{2\omega_0} \right]_0^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

(1), (2) よ), $S(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right\}$

$$(ii) R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \{ \cos(\omega_0 + \omega)\tau + \cos(\omega_0 - \omega)\tau \} d\tau. \end{aligned}$$

$\therefore \int_0^{\infty}$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0 + \omega)\tau d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha\tau} \right)' \cos(\omega_0 + \omega)\tau d\tau \\ &= \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0 + \omega)\tau \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \right) \{ (\omega_0 + \omega) \sin(\omega_0 + \omega)\tau \} d\tau \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\omega_0 + \omega}{\alpha^2} \left\{ \left[e^{-\alpha\tau} \sin(\omega_0 + \omega)\tau \right]_0^{\infty} - (\omega_0 + \omega) \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0 + \omega)\tau d\tau \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{(\omega_0 + \omega)^2}{\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0 + \omega)\tau d\tau \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0 + \omega)\tau d\tau = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2}$$

同様に

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos(\omega_0 - \omega)\tau d\tau = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2}$$

$$\therefore S(\omega) = \frac{\alpha}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 + (\omega_0 + \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \right\}$$

6/29

確率ポアソン過程の統計量.

ポアソン過程 ; $N(t)$. integer

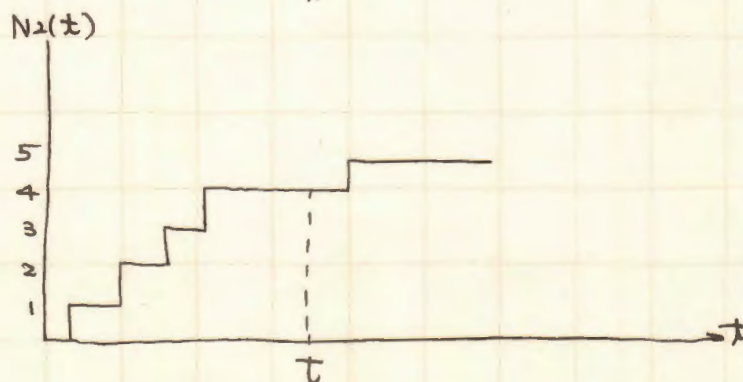
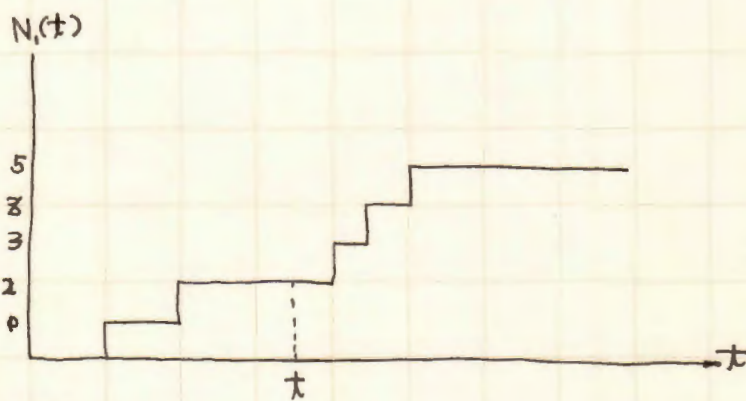
確率関数.

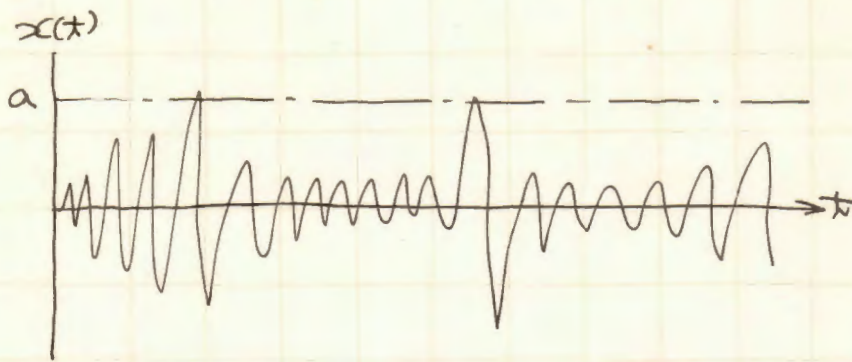
定常 ; $P_{int}(m, t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$

非定常 ; $P_{int}(m, t) = \frac{1}{m!} \left[\int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]^m e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$

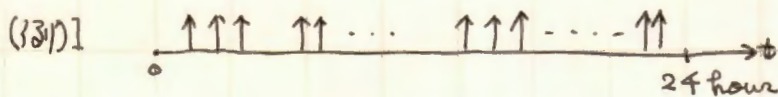
定常とは ... 到着率 $\lambda(\tau) = \lambda_0$ と定常になるといふ意味に於て
定常ポアソン過程といふ。

$P_{int}(m, t)$; $(0, t]$ に $N(t) = m$ となる確率.
↑ ↑
excluded included





(0, t) における振幅 a に到達する回数 $N(t) \rightarrow$ ポアソン過程にモデル化できる。



24 hour で 280 台



$$\text{到着率 } \lambda_0 = \frac{280}{24 \times 60 \times 60} \text{ 台/sec}$$

(例2) Supermarket の counter に arrive する customers 数を定常ポアソン過程で表わすことができるとする。

到着率 2.1 人/min

このとき、5分間に customers が 24人来る確率

$$P_{\{N\}}(24, 5) = \frac{(2.1 \times 5)^{24}}{24!} e^{-2.1 \times 5} =$$

☆ 定常の場合を考える。

期待値 $E[N(t)] = \lambda_0 t$ と予想される。

非連続量であるから

$$E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_{\{N(t)\}}(n, t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda_0 t)^n}{n!} e^{-\lambda_0 t}$$

$$= e^{-\lambda_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_0 t)^n}{(n-1)!}$$

$$= \lambda_0 t e^{-\lambda_0 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_0 t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \lambda_0 t e^{-\lambda_0 t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_0 t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$n=0$ は意味をたない。

$$n-1 = m \text{ とおす}$$

$$E[N(t)] = \lambda_0 t e^{-\lambda_0 t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda_0 t)^m}{m!}$$

$$= \lambda_0 t e^{-\lambda_0 t} \cdot e^{\lambda_0 t}$$

$$= \lambda_0 t$$

$$\therefore \boxed{E[N(t)] = \lambda_0 t}$$

自乗平均値 ~~は~~ $E[N^2(t)]$

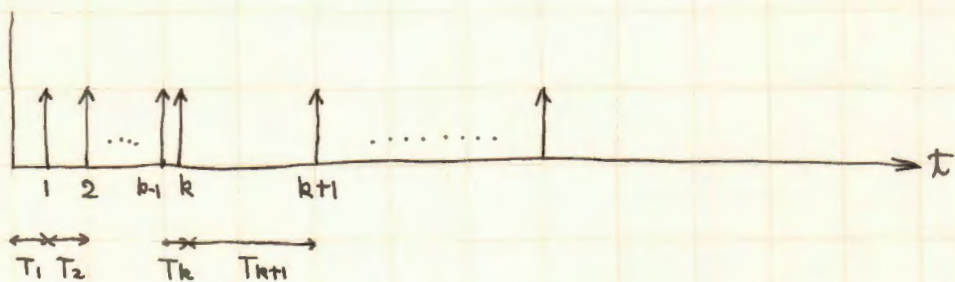
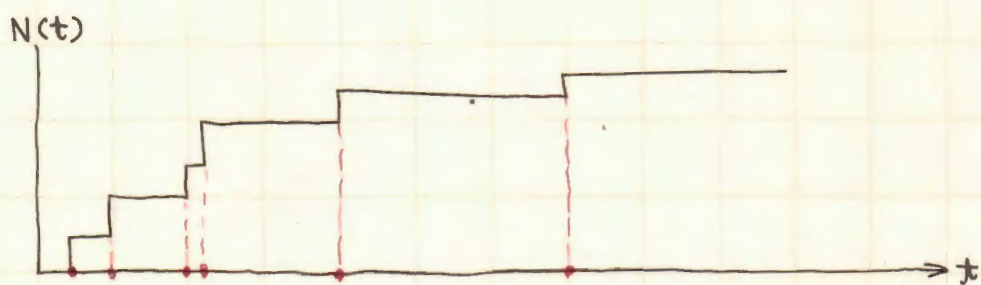
$$E[N^2(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot P_{SN}(n, t) = (\lambda_0 t)^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{(\lambda_0 t)^n}{n!} e^{-\lambda_0 t}$$

分散 $\text{Var}[N(t)] = E[N^2(t)] - \{E[N(t)]\}^2$
 $= \lambda_0 t$

定常ポアソン過程においては、期待値と分散は等しい。

到着時間々隔. p37.



T_k は確率変数 \longrightarrow 指数分布

$$\text{Prob} \{ T_k \geq x \} = \text{Prob} \{ N(t_k) - N(t_{k-1}) = 0; t_k - t_{k-1} = x \}$$

t_{k-1} から t_k までの到着台数が 0

到着時間々隔が大きい \Rightarrow 時間 x の間に到着しない確率
大きい確率

$$= P_{|N|}(0, x) = \frac{(\lambda_0 x)^0}{0!} e^{-\lambda_0 x} = e^{-\lambda_0 x}$$

$$\therefore 1 - \text{Prob} \{ T_k \leq x \} = e^{-\lambda_0 x}$$

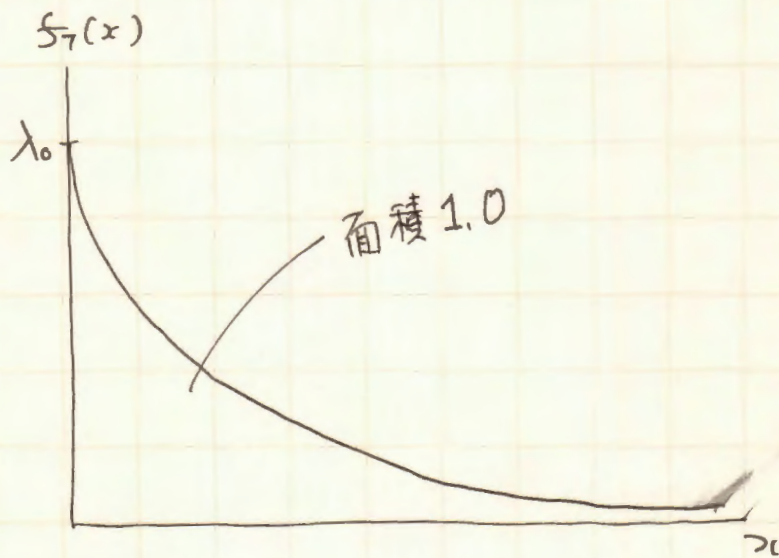
$$\therefore 1 - F_{T_k}(x) = e^{-\lambda_0 x}$$

両辺を x で微分すると.

$$-f_{T_k}(x) = -\lambda_0 e^{-\lambda_0 x}$$

時間間隔 T_R の確率密度関数は

$$f_T(x) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 x}, \quad x \geq 0$$



$$N(t) \quad P_{\{N\}}(n, t) = \frac{(\lambda_0 t)^n}{n!} e^{-\lambda_0 t}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & ; N(t) = 0 \text{ or } 1 \\ 0 & ; N(t) \geq 2 \end{cases}$$

(1) $t_1 \geq t_2$

$$\begin{aligned} E[x(t_1)x(t_2)] &= 1 \times 1 \times \text{Prob}\{x(t_2)=1 \cap x(t_1)=1\} \\ &+ 0 \times 1 \times \text{Prob}\{x(t_2)=0 \cap x(t_1)=1\} \\ &+ 1 \times 0 \times \text{Prob}\{x(t_2)=1 \cap x(t_1)=0\} \\ &+ 0 \times 0 \times \text{Prob}\{x(t_2)=0 \cap x(t_1)=0\} \end{aligned}$$

$$= \text{Prob}\{x(t_2)=1 \cap x(t_1)=1\}$$

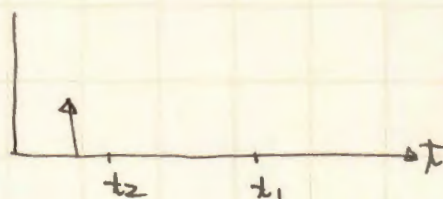
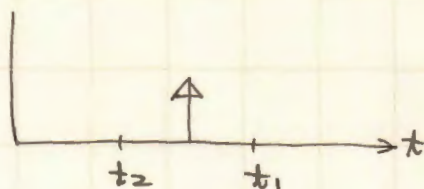
$$= \text{Prob}\{x(t_1)=1\} \cdot \text{Prob}\{x(t_2)=1 / x(t_1)=1\}$$

$$= \text{Prob}\{x(t_1)=1\}$$

$$= P_{\{N\}}(0, t_1) + P_{\{N\}}(1, t_1)$$

$$= e^{-\lambda_0 t_1} + \lambda_0 t_1 e^{-\lambda_0 t_1}$$

$$= (1 + \lambda_0 t_1) e^{-\lambda_0 t_1}$$



条件付確率.



1. → たまために1台着いた
 t_2 の時には 0 台か 1 台.
 $x(t_1) = 1$

$$\downarrow$$

$$N(t_2) = 0 \text{ or } 1$$



$$N(t_2) = 0 \text{ or } 1$$



$$\text{Prob}\{x(t_2)=1 / x(t_1)=1\} = 1$$

(1)

[2] 同様に

$t_2 \geq t_1$ のとき.

$$E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = (1 + \lambda_0 t_2) e^{-\lambda_0 t_2} \quad \text{--- (2)}$$

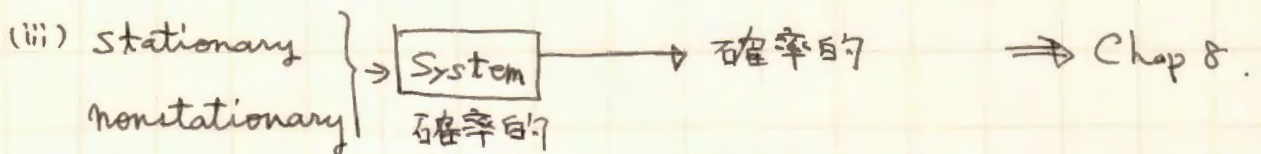
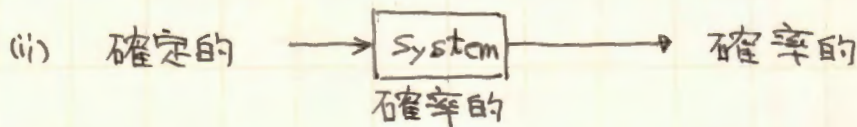
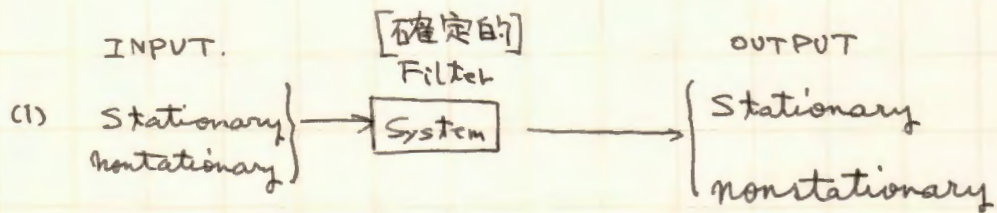
(1), (2) より,

$$E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = (1 + \lambda_0 t_1) e^{-\lambda_0 t_1} + (1 + \lambda_0 t_2) e^{-\lambda_0 t_2}$$

第4章 1自由度系の線形応答解析.

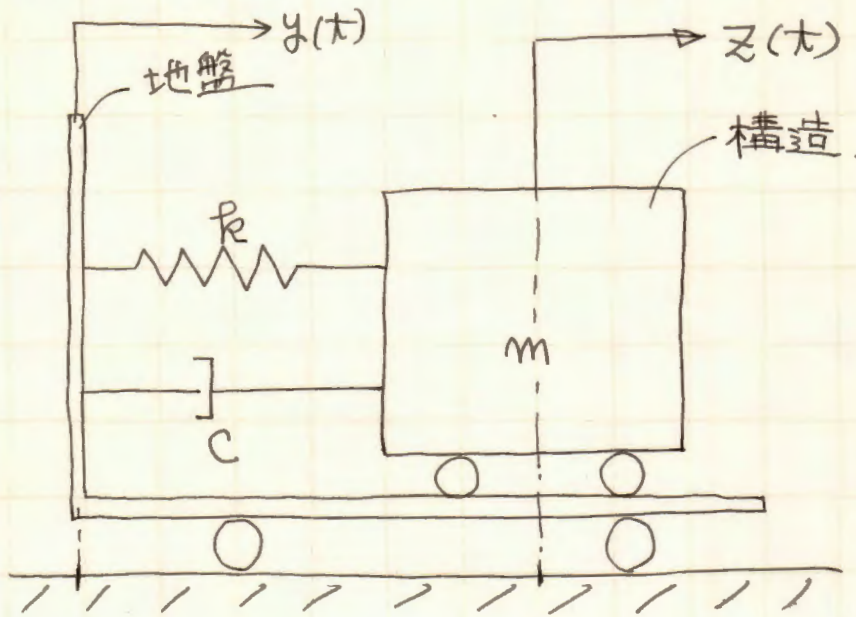
決定論的方法 — 従来の方法

確率過程理論 — $\left\{ \begin{array}{l} \text{定常入力} \\ \text{非定常入力 } E[f(t), f(t)] \end{array} \right.$ $E[f(t)] = R_f(t) =$
 応答は一般には非定常.



INPUT の不確定性の方が, System の不確定性より order が高い。

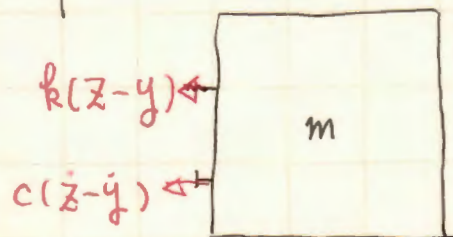
4.2 Single degree of freedom system (SDF)



INPUT \rightarrow 地盤の動き

OUTPUT \rightarrow 構造物の応答

振動方程式 Governing Equation (支配方程式)



\leftarrow 絶対座標に対して

$$\sum F = m \ddot{z}$$

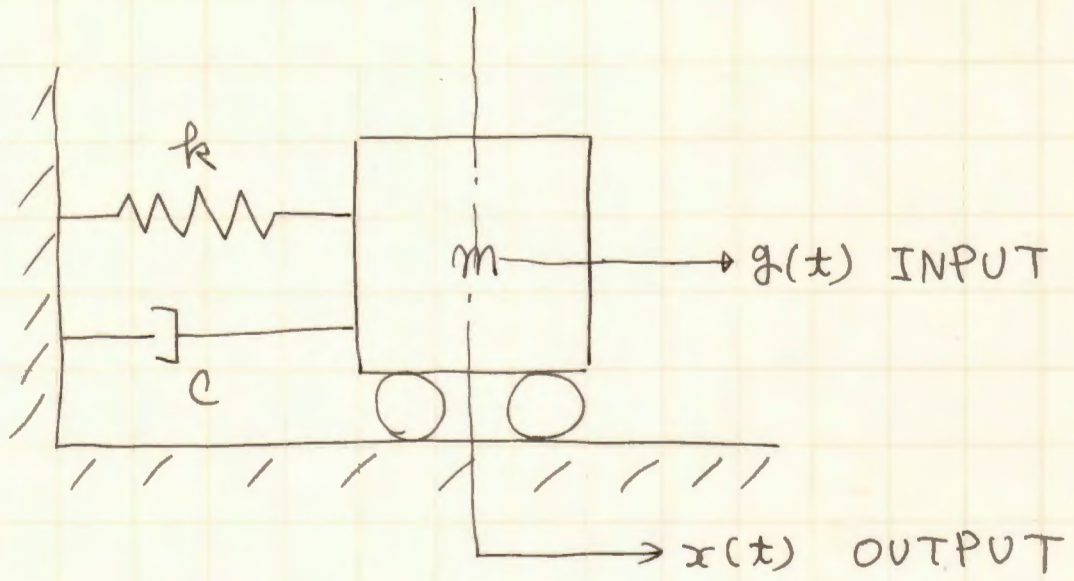
$$-k(z-y) - c(\dot{z}-\dot{y}) = m \ddot{z}$$

$$x(t) = z(t) - y(t) \rightarrow \text{相対変位}$$

$$-kx - c\dot{x} = m(\ddot{x} + \ddot{y})$$

$$\therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y}$$

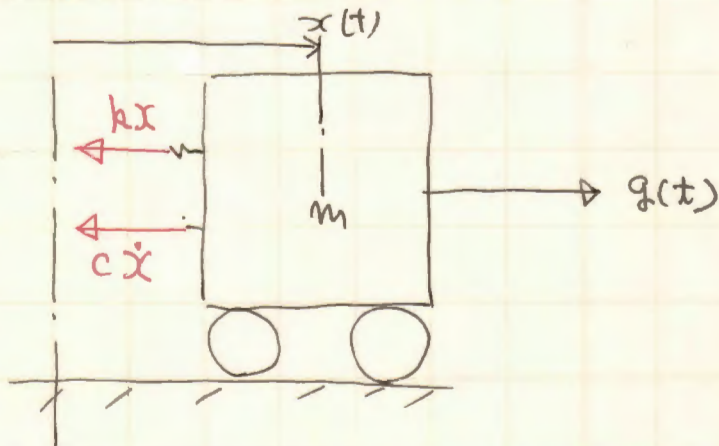
—— (4.2)



振動方程式

free body diagram

変位 $x(t)$



$$\sum F = m \ddot{x} \quad (\text{Newton 第二法則})$$

$$q(t) - kx - c\dot{x} = m \ddot{x}$$

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = q(t) \quad \text{--- (4.1)}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = g(t)$$

両辺を m で割る

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}g(t)$$

非齊次 = 階線形常微分方程式

齊次. $\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

非減衰 ($c=0$) \rightarrow 自由振動.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = e^{\lambda t} \text{ とする}$$

$$(\lambda^2 + \frac{k}{m})e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\therefore \lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i$$

$$x(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{k}{m}} i t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} i t}$$

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = A_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t + A_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

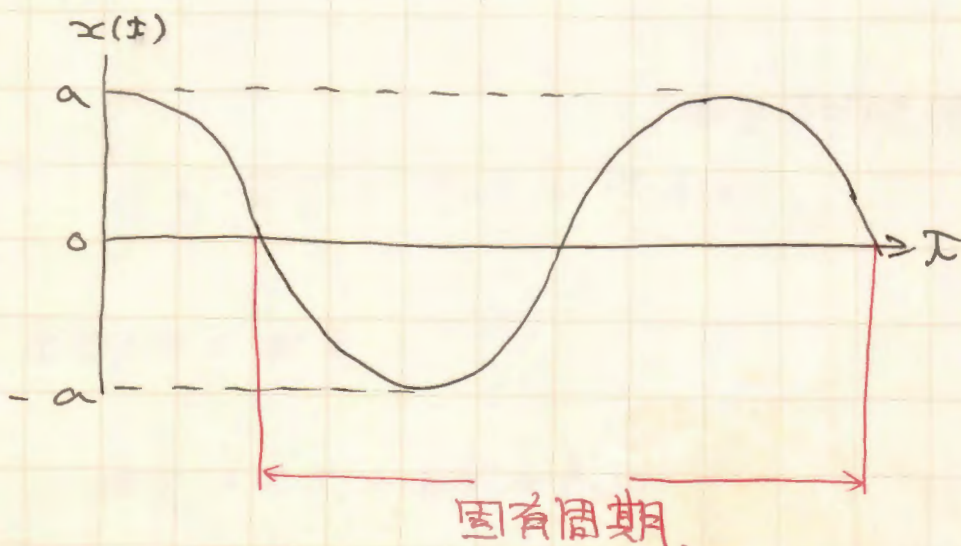
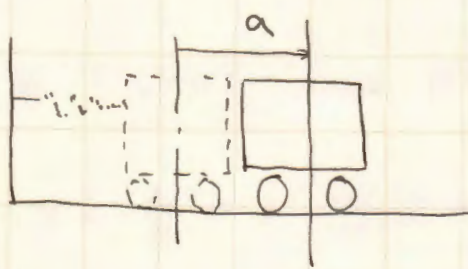
(Ex) 初期条件. $\begin{cases} x(0) = a \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

$$\dot{x} = A_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t - A_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$x(0) = A_2 = a.$$

$$\dot{x}(0) = A_1 \sqrt{\frac{k}{m}} = 0 \quad \therefore A_1 = 0$$

$$\therefore x = a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$



$$\sqrt{\frac{k}{m}} T_0 = 2\pi \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{固有周期 (sec)}$$

固有振動数. (単位時間に何 cycle 可?)

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi} \quad (\text{cps}) \quad \left(1 \frac{\text{cycle}}{\text{sec}} : T^{\text{sec}} = f^{\text{cycle}} : 1^{\text{sec}} \right)$$

cycle/sec = Hz.

固有円振動数 (単位時間に向何 radian?)

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\beta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad \text{とある}$$

$$\frac{c}{m} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} = 2\beta\omega_0$$

また $\frac{g(t)}{m} = f(t)$ とおく

$$\ddot{x} + 2\beta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

標準型の基本方程式

Standard Fundamental Equation

7/13

$$\ddot{x} + 2\beta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t)$$

$$\beta = \frac{C}{2\sqrt{mk}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

強制振動

初期条件. $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ (初期静止)

一般の解法.

$$[例] \quad 2\ddot{x} - \dot{x} + 3x = \sin 2t \quad - \textcircled{1}$$

$$2\ddot{x} - \dot{x} + 3x = 0 \quad - \textcircled{2}$$

$$x = e^{\lambda t} \text{ とする.}$$

$$\textcircled{2} \text{ に代入する.} \quad 2\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$$

$$(2\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}, -3$$

$$\textcircled{2} \text{ の一般解 } x_{\text{h}} = c_1 e^{\frac{1}{2}t} + c_2 e^{-3t} \quad - \textcircled{3}$$

次に①の特解を求める。

$$x_p(t) = A \sin 2t + B \cos 2t \text{ とおく.}$$

$$\dot{x} = 2A \cos 2t - 2B \sin 2t$$

$$\ddot{x} = -4A \sin 2t - 4B \cos 2t$$

$$-8A \sin 2t - 8B \cos 2t - 2A \cos 2t + 2B \sin 2t = 3A \sin 2t - 3B \cos 2t$$

$$= \sin 2t$$

$$\therefore -8A + 2B - 3A = -11A + 2B = 1$$

$$-8B - 2A - 3B = -2A - 11B = 0$$

$$\begin{array}{r} -121A + 22B = 11 \\ -4A - 22B = 0 \end{array} \quad | +$$

$$-125A = 11$$

$$A = -\frac{11}{125}, \quad B = -\frac{2}{11}A = \frac{11}{125} \times \frac{2}{11} = \frac{2}{125}$$

$$\therefore x_p = -\frac{11}{125} \sin 2t + \frac{2}{125} \cos 2t$$

$$\therefore x(t) = c_1 e^{\frac{3}{2}t} + c_2 e^{-t} - \frac{11}{125} \sin 2t + \frac{2}{125} \cos 2t \quad //$$

$= f(x)$; 陰関数. \rightarrow 特解を予測できない。

○ ラプラス変換で解く。

$x(t)$ を次の積分により、新しい独立変数 s (実数) の関数を作る。

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt \quad \text{--- (1)}$$

このとき $X(s)$ を $x(t)$ の Laplace Transformation といい。

記号; $\bar{x}(s), \mathcal{L}\{x(t)\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \dot{x}(t) dt \\ &= \left[e^{-st} x(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{\dot{x}}(s) = -x(0) + s \bar{x}(s) \quad \text{--- (2)}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \ddot{x}(t) dt \\
 &= \left[e^{-\lambda t} \dot{x}(t) \right]_0^{\infty} + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \dot{x}(t) dt \\
 &= -\dot{x}(0) + \lambda \left[e^{-\lambda t} x(t) \right]_0^{\infty} + \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} x(t) dt \\
 \bar{\ddot{x}}(\lambda) &= \lambda^2 \bar{x}(\lambda) - \lambda x(0) - \dot{x}(0) \quad \text{--- (3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\ddot{x} + 2\beta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\
 \bar{\ddot{x}} + 2\beta\omega_0 \bar{\dot{x}} + \omega_0^2 \bar{x} &= \bar{f}(\lambda)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = \lambda^2 \bar{x}(\lambda) - \lambda x(0) - \dot{x}(0)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = \bar{x}(\lambda) - x(0)$$

$$\mathcal{L}\{x\} = \bar{x}(\lambda)$$

$$\therefore \lambda^2 \bar{x}(\lambda) + 2\beta\omega_0 \bar{x}(\lambda) + \omega_0^2 \bar{x}(\lambda) = \bar{f}(\lambda)$$

$$(\lambda^2 + 2\beta\omega_0\lambda + \omega_0^2) \bar{x}(\lambda) = \bar{f}(\lambda)$$

$$\therefore \bar{x}(\lambda) = \frac{\bar{f}(\lambda)}{\lambda^2 + 2\beta\omega_0\lambda + \omega_0^2}$$

逆变换, $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{x}(\lambda)\}$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(\lambda + \beta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1-\beta^2)} \cdot \bar{f}(\lambda) \right\} \\
 &\quad \downarrow \mathcal{L}^{-1} \qquad \qquad \qquad \searrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow f(t) \\
 &= \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\beta^2}} \cdot e^{-\beta\omega_0 t} \sin \frac{\omega_0 \sqrt{1-\beta^2}}{\omega_0} t
 \end{aligned}$$

Convolutional integration に より,

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-\beta^2}} e^{-\beta \omega_0 (t-\xi)} \sin \omega_0 \sqrt{1-\beta^2} (t-\xi) f(\xi) d\xi$$

但し $t - \xi \geq 0$

otherwise zero

$$\bar{\omega}_0 = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2} < \omega_0 <$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_0} e^{-\beta \omega_0 t} \sin \bar{\omega}_0 t & ; t \geq 0 \\ = 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

$$\therefore x(t) = \int_0^t h(t-\xi) f(\xi) d\xi //$$

特別な場合 $f(t) = \delta(t-t_0)$ Dirac Delta Function

$$\text{Def I } \delta(t-t_0) = \begin{cases} = \infty & t = t_0 \\ = 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

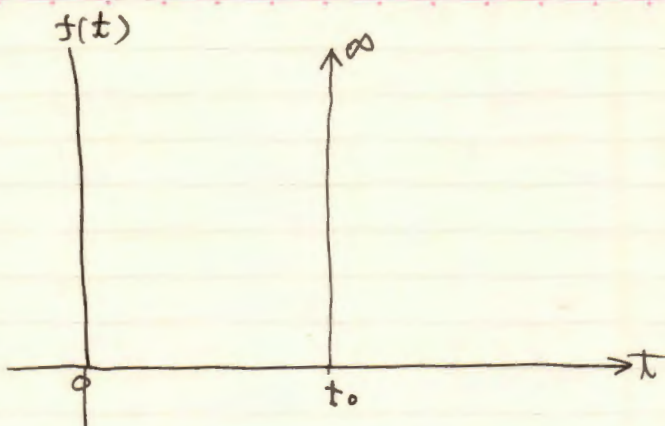
$$\text{Def II } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1.0$$

$$\text{応答. } x(t) = \int_0^t h(t-\xi) \cdot \delta(\xi-t_0) d\xi \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

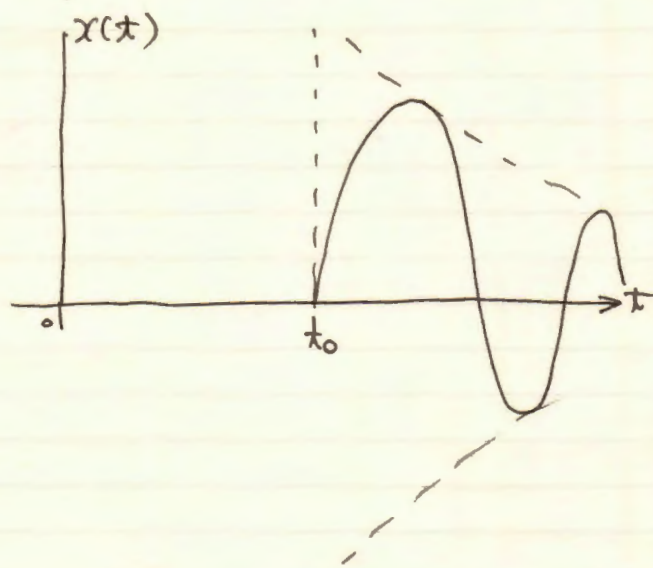
$$= h(t-t_0)$$

$$= \frac{1}{\omega_0} \cdot e^{-\beta \omega_0 (t-t_0)} \sin \bar{\omega}_0 (t-t_0) \quad t \geq t_0$$

$$= 0 \quad t < t_0$$



INPUT



OUTPUT.
(応答)

$h(t)$; 单位衝擊応答関数.



重力 $A h \rho_m$

初期条件 $\begin{cases} x(0) = s \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

浮力 ~~$A h \rho_w$~~ $A(h+x)\rho_w$

$$A h \rho_m = A h \rho_w \quad \therefore h = \frac{\rho_m}{\rho_w} h$$

慣性力 $-A h \ddot{x}$

~~重力~~ + ~~浮力~~ の合力

$$A x \rho_w$$

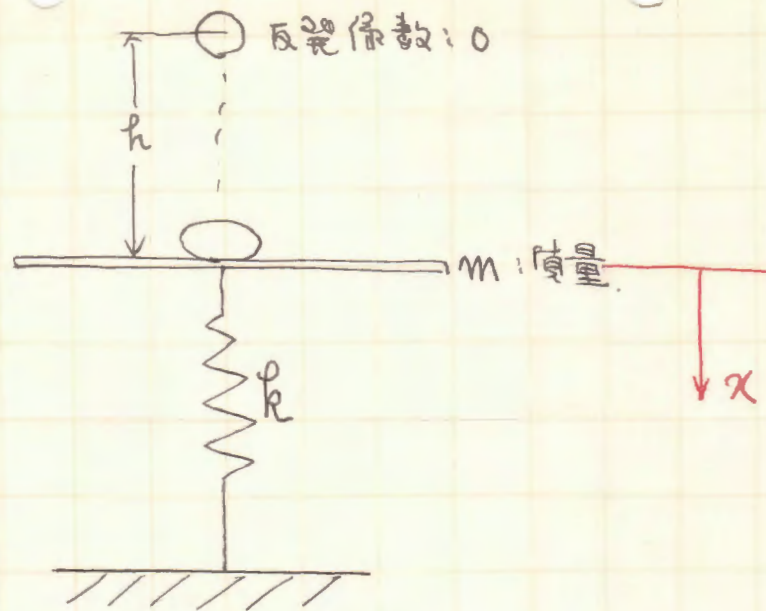
減衰力 なし

$$-A h \rho_m \ddot{x} + A h \rho_m - A(h+x)\rho_w = 0$$

$$-A h \rho_w \ddot{x} + A h \rho_m - A h \rho_w - A \rho_w x = 0$$

$$\therefore A h \rho_w \ddot{x} + A \rho_w x = 0 \quad \ddot{x} + \frac{1}{h} \frac{\rho_w}{\rho_m} x = 0$$

$$\therefore \boxed{h \ddot{x} + \rho_w x = 0}$$



$$\Sigma m\ddot{x} + kx = \cancel{0}mg$$

初期条件

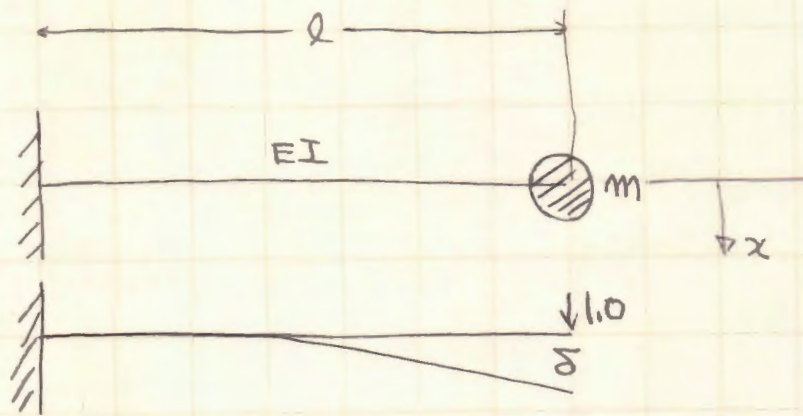
エネルギー保存により $mgh = \frac{1}{2}(2m)v_a^2 = \frac{1}{2}mv_a^2$

$$\therefore v_a = \sqrt{2gh}$$

運動量保存により $\Sigma mv_0 = mv$

$$\therefore v_0 = \frac{v}{2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = \sqrt{\frac{gh}{2}} \end{cases}$$

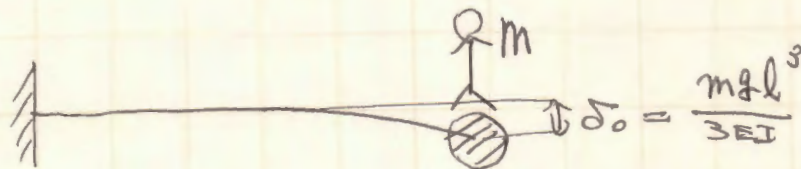


$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$x = \frac{Pl^3}{3EI} \quad \therefore P = \frac{3EI}{l^3} x$$

$$m\ddot{x} + \frac{3EI}{l^3} x = 0$$

初期条件.



$$x(0) = \frac{3gl^3}{3EI}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \dots ?$$

基本方程式

$$\ddot{x} + 2\beta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t)$$

入力

$$f(t) = e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

出力

$$x(t) = H(\omega)e^{i\omega t}$$

入力に対する出力の
 $H(\omega)$: 振動の増幅率.

$$H \cdot (i\omega)^2 e^{i\omega t} + H 2\beta\omega_0 (i\omega) e^{i\omega t} + H \omega_0^2 e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

$$H \{-\omega^2 + 2i\beta\omega_0\omega + \omega_0^2\} = 1$$

$$\therefore H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega_0\omega} \quad (4-10)$$

$$= \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2\omega^2}$$

frequency response
function

周波数応答関数.

$$\begin{aligned} \therefore |H\omega| &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2\omega^2} \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2\omega^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2\omega^2}} \end{aligned}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{i\theta(\omega)}$$

$$= |H(\omega)| \cos \theta(\omega) + i |H(\omega)| \sin \theta(\omega)$$

$$\therefore \theta(\omega) = \tan^{-1} \left\{ - \frac{2\beta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\}$$

$\lambda \pi$. $f(t) = \text{Re } e^{i\omega t} = \cos \omega t$
↓ Real part

出力 $x(t) = \text{Re} \{ H(\omega) e^{i\omega t} \}$

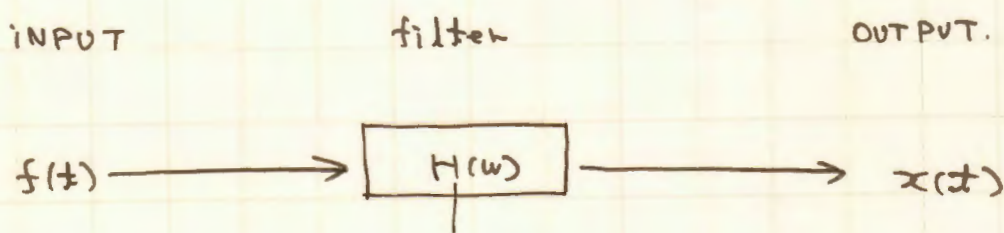
$$= \text{Re} \{ |H(\omega)| e^{i\theta(\omega)} e^{i\omega t} \}$$

$$= \text{Re} \{ |H(\omega)| e^{i\{\omega t + \theta(\omega)\}} \}$$

$$= |H(\omega)| \cos \{ \omega t + \theta(\omega) \}$$

すなわち、入力か $\cos \omega t$ のとき、出力は振幅が $|H(\omega)|$ 倍となり、且つ位相が $-\theta(\omega)$ だけ遅れる。

初期条件が影響しないときの、すなわち定常状態における
 応答解。

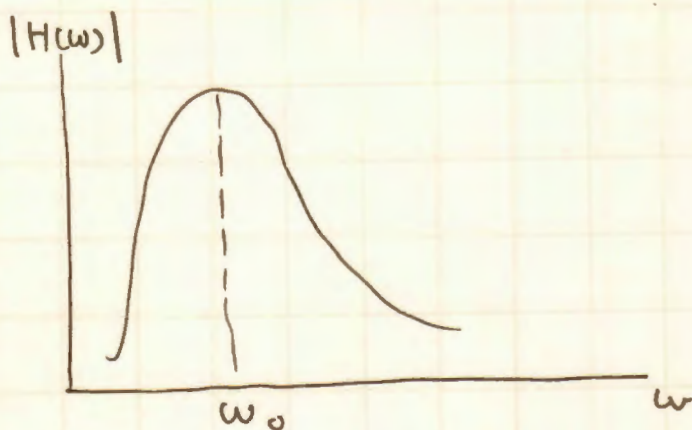


w_0, β
 $H(w)$: 周波数応答関数.

$$f(t) = \cos \omega t$$

$$x(t) = |H(\omega)| \cos(\omega t + \theta(\omega))$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega_0^2 \omega^2}}$$

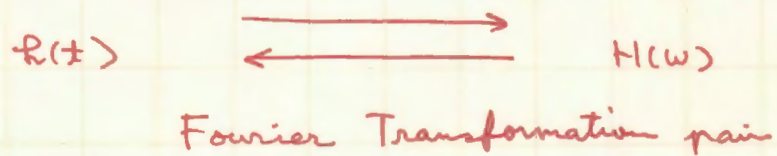


---共振---

与えられた ω が System の ω_0 に近づくとき、応答振幅は増大する。
 特に $\beta=0$ なら $\omega=\omega_0$ のとき $|H(\omega)| \rightarrow \infty$ となる。

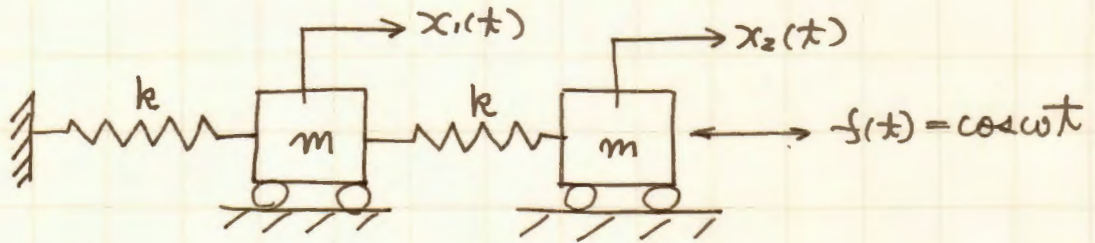
$R(t)$: 時間領域 t における応答関数.

$H(\omega)$: 周波数領域 ω における応答関数.

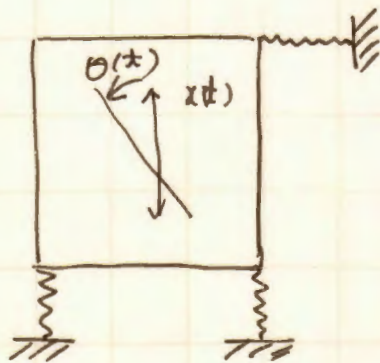
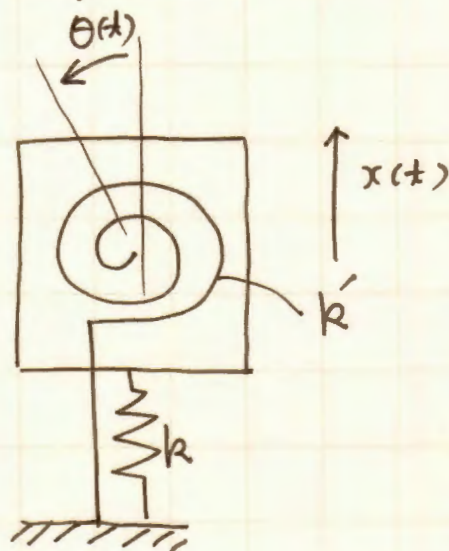


2自由度系の振動解析.

(例)

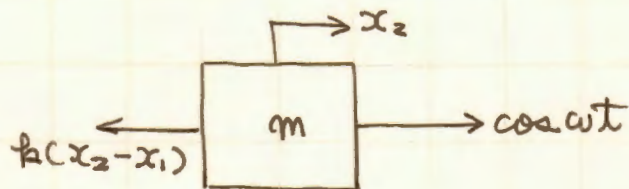


(参) cf. (confer to)

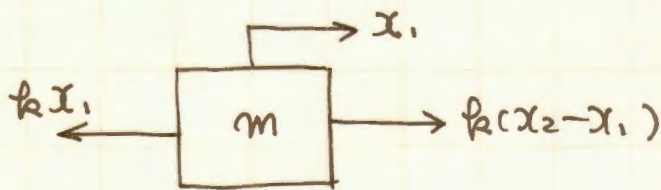


(131) 15 > 112.

free body diagram (f.b.d.)



$$F = \cos \omega t - k(x_2 - x_1) = m \ddot{x}_2 \quad (1)$$



$$F = k(x_2 - x_1) - kx_1 = m \ddot{x}_1 \quad (2)$$

(1), (2) を整理して, matrix form にする

$$m \ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

$$m \ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = \cos \omega t$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \omega t \end{bmatrix}$$

$$\therefore M \ddot{x} + Kx = F$$

自由振動

$$M \ddot{x} + Kx = 0$$

$x = A e^{i\omega t}$ と仮定すると.

$$M A (i\omega)^2 e^{i\omega t} + K A e^{i\omega t} = 0$$

$$\therefore (-\omega^2 M + K) A = 0$$

$$\left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a_1 = a_2 = 0$ は trivial solution である。

non-trivial な solution が存在するためには.

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$(2k - \omega^2 m)(k - \omega^2 m) - k^2 = 0$$

$$2k^2 - \omega^2 m k - 2\omega^2 m k + \omega^4 m^2 - k^2 = 0$$

$$m^2 \omega^4 - 3km\omega^2 + k^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{3km \pm \sqrt{9k^2 m^2 - 4m^2 k^2}}{2m^2}$$

$$= \frac{3km \pm \sqrt{5} km}{2m^2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}$$

$$\omega > 0, \quad \omega_1 < \omega_2$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2次固有円振動数.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1次固有円振動数.

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ の } z^* \text{ .}$$

$$(2k - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m} \cdot m) a_1 - k a_2 = 0$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} a_1 - a_2 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.62$$

$$\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ の } z^* \text{ .}$$

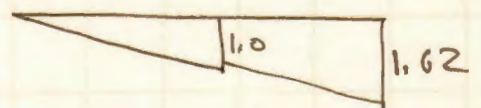
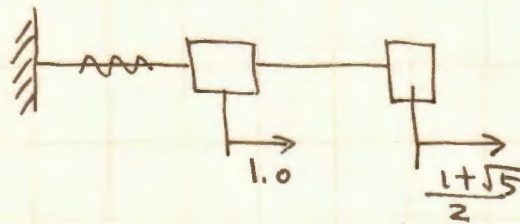
$$(2k - \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m} \cdot m) a_1 - k a_2 = 0$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} a_1 - a_2 = 0$$

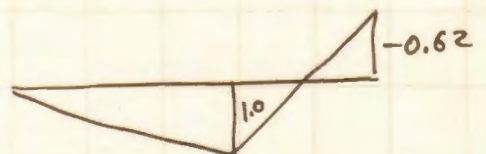
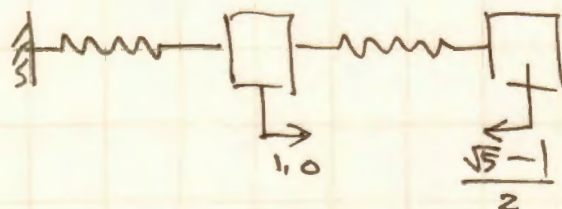
$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.62$$

1: R E - k



2: R E - k

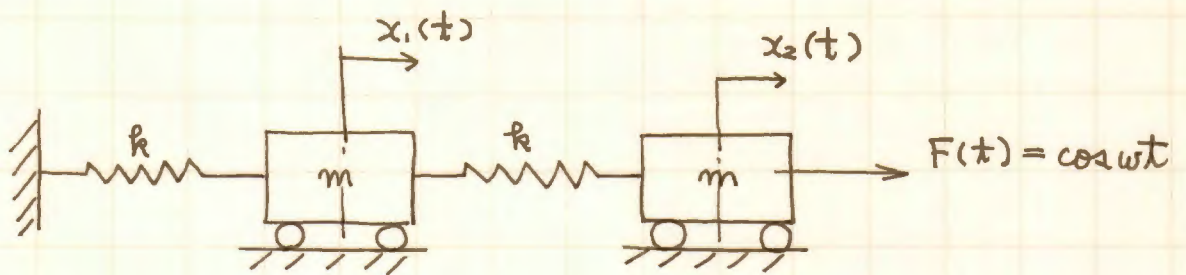


$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

\uparrow \uparrow
1: "FF-k" 2: "FF-k"
 ω_1 ω_2

modal matrix

9/28



(two degree of freedom system)

$$M \ddot{X} + K X = F$$

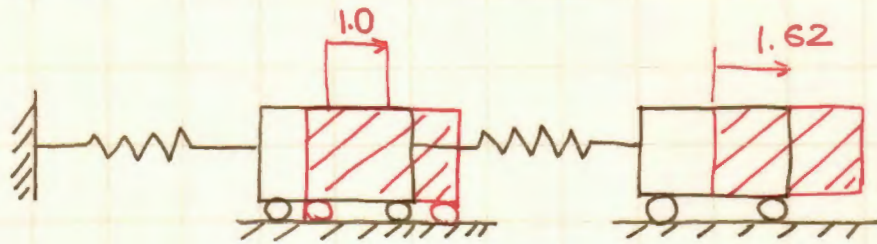
$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \omega t \end{bmatrix}$$

free vibration \rightarrow 固有円振動数.

$$M \ddot{X} + K X = 0$$

- 一次モード



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{rad/sec})$$

$\omega = \omega_1$ のとき

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{比.}$$

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62 \end{bmatrix}$$

= 二次モード

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\omega = \omega_2$ のとき

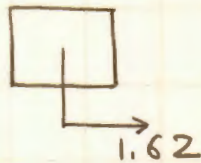
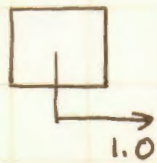
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

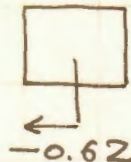
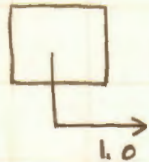
modal matrix

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

一次モード



二次モード



固有振動数 $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$, $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ (cps, Hz)

固有周期 $T_1 = \frac{1}{f_1}$, $T_2 = \frac{1}{f_2}$ (sec/cycle)

Forced vibration (強制振動)

modal 解析法.

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$X(t) = \Phi \cdot \eta(t) \quad \text{と仮定する.}$$

↳ general coordinate (一般座標)

$$M \ddot{X} + K X = F \quad \text{より}$$

$$M \Phi \ddot{\eta} + K \Phi \eta = F$$

Φ の transpose matrix Φ^T を両辺に掛ける

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\eta} + \Phi^T K \Phi \eta = \Phi^T F$$

直交性より (*)

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 \phi_{j1} f_j \\ \sum_{j=1}^2 \phi_{j2} f_j \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left(\begin{array}{l} \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \\ \Phi^T \ddot{x} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} \\ \phi_{12} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} f_1 + \phi_{21} f_2 \\ \phi_{12} f_1 + \phi_{22} f_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$$\therefore m_1 \ddot{\eta}_1 + k_1 \eta_1 = \sum_{j=1}^2 \phi_{j1} f_j \quad (1)$$

非連成

$$m_2 \ddot{\eta}_2 + k_2 \eta_2 = \sum_{j=1}^2 \phi_{j2} f_j \quad (2)$$

< 基本的にはそれぞれが1自由度系方程式と同一である。 >

初期条件. $t=0$ において $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ の時

$$x = \Phi \eta \text{ より}$$

$$\begin{cases} \eta_1(0) = \dot{\eta}_1(0) = 0 \\ \eta_2(0) = \dot{\eta}_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \sum_{k=1}^2 \phi_{1k} \eta_k \\ x_2(t) = \sum_{k=1}^2 \phi_{2k} \eta_k \end{cases}$$

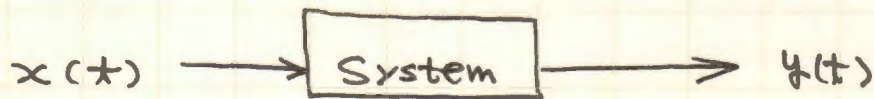
modal matrix の orthogonality (直交性)

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

10/5

第3章. 確率過程のシミュレーション.

Monte Carlo 法. (Monte Carlo Simulation)



$$x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$$

System が 確率的か 確定的か 区別する.

$$y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)\}$$

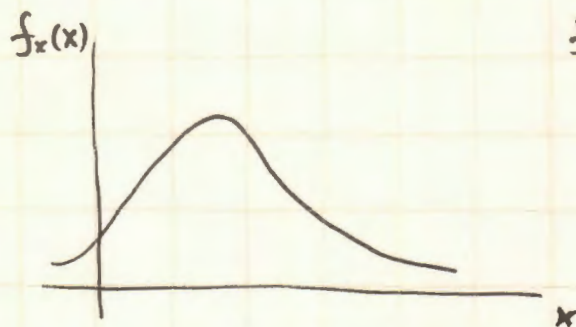
複雑な System (non-linear など) では
解析解 $y(t)$ が求められない.

$x(t)$ のそれぞれに対して, サンプル関数 が求められる.
 $y(t)$ はそれぞれに対応するものとして求められる.

(数値的に)

$$\left\{ \begin{aligned} E[y(t)] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t) \\ \sigma^2 y(t) &\cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{y_i^2(t) - E^2[y(t)]\} \end{aligned} \right.$$

確率変数: x



$f_x(x)$: 確率密度関数.
(Probability
Density Function)
→ P.D.F.



$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
Sample.

特性 $f_x(x)$ から、個々の構成要素 x_i に
必要をだけ求める。

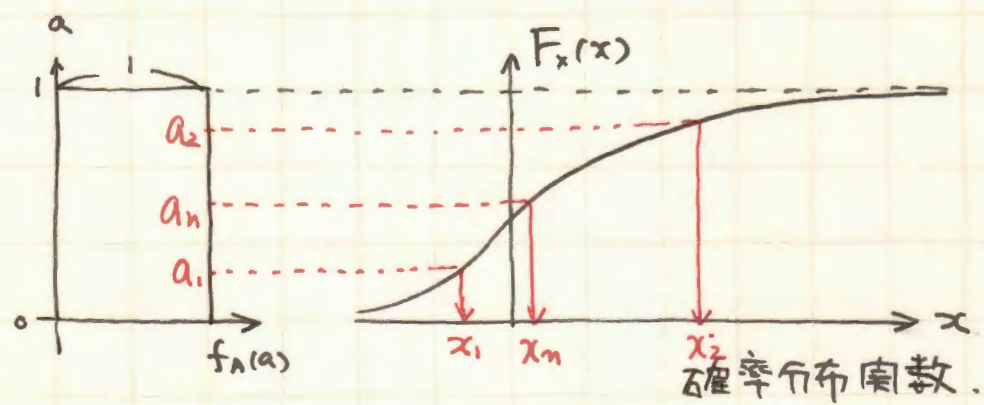
||

MONTÉ CARLO 法.

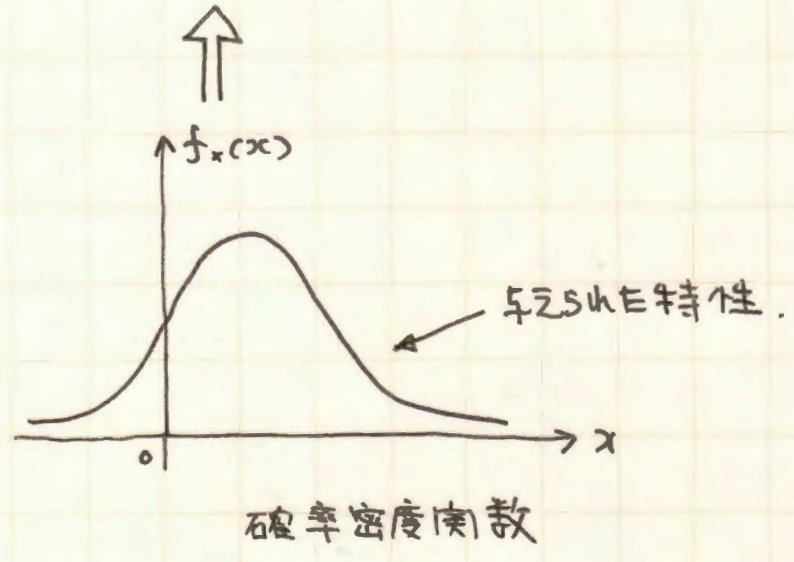
SIMULATION 法. の 基礎.

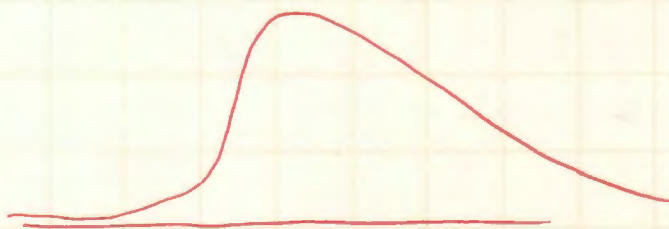
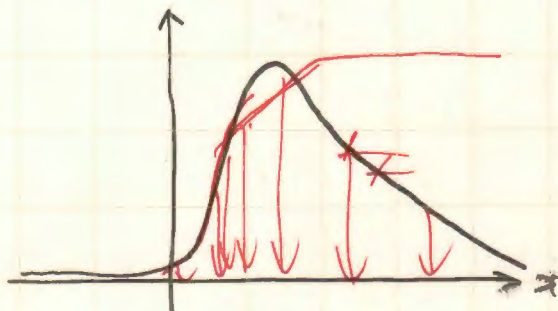
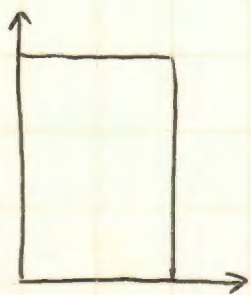
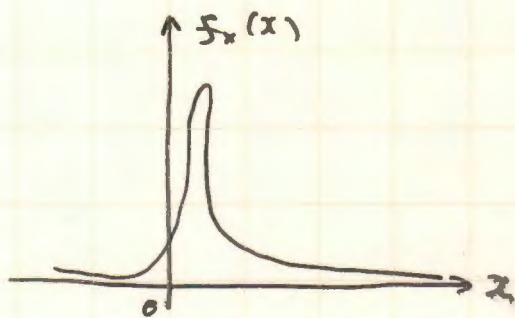
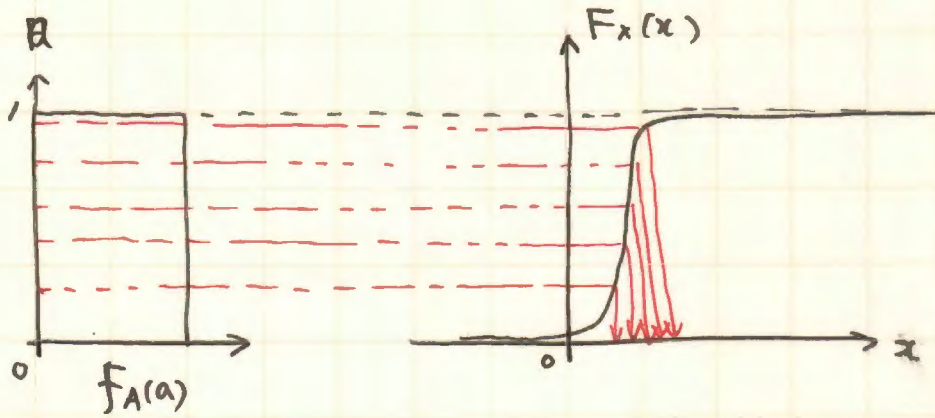
“ 与えられた P.D.F. に満足する確率変数の抽出を如何に行なうか.”

抽出法.



(一様分布)
||
乱数.
[P262参照]



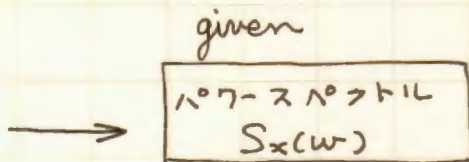


定常確率ガウス過程 (平均値0)

の SIMULATION.

特性 1) ガウス分布

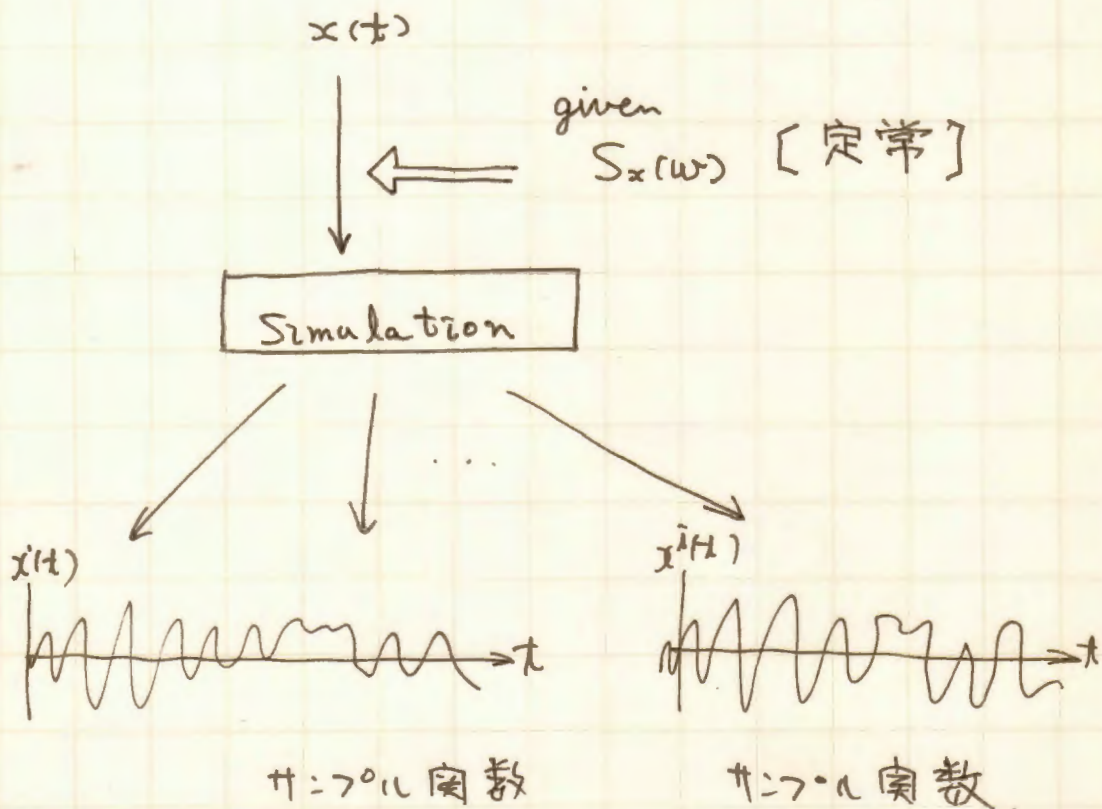
2) 定常



3) 平均値0

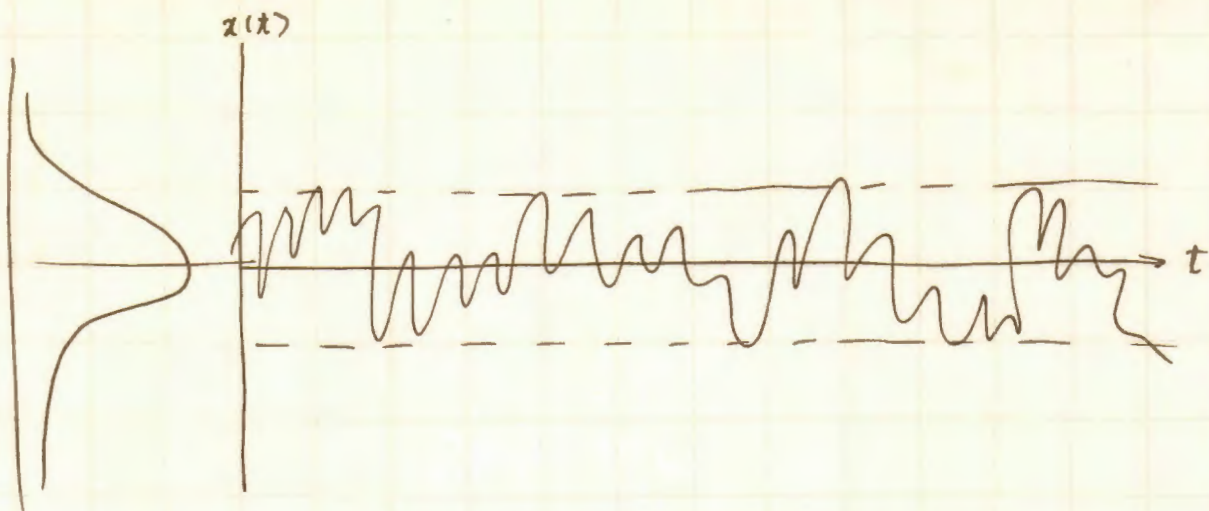


$\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ を作る. Sample 関数.



三角級数による方法(4)

P65



ガウス分布.

Simulation 法 (P65)

$$x(t) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

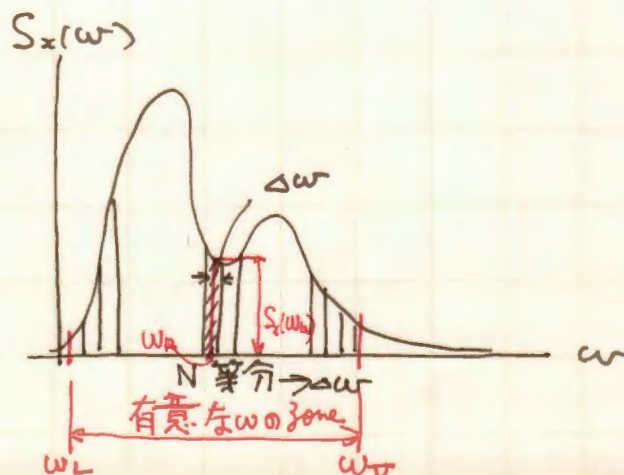
$$\therefore \therefore a_k^2 = 4 S_x(\omega_k) \Delta\omega$$

$$\omega_k = \omega_L + \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta\omega$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_H - \omega_L}{N}$$

ϕ_k : $0 \sim 2\pi$ の一様乱数

但し, ϕ_k と ϕ_l : $k \neq l$ は互に独立.



証明

$$\begin{aligned}(1) \quad E[x(t)] &= \sum_{k=1}^N a_k E[\cos(\omega_k t + \phi_k)] \\ &= \sum_k a_k E[\cos \omega_k t \cos \phi_k - \sin \omega_k t \sin \phi_k] \\ &= \sum_k \left\{ a_k \cos \omega_k t E[\cos \phi_k] - a_k \sin \omega_k t E[\sin \phi_k] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E[\cos \phi_k] &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \phi_k f(\phi_k) d\phi_k \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi_k d\phi_k \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\text{同様に } E[\sin(\phi_k)] = 0$$

$\therefore E[x(t)] = 0 \longrightarrow$ 平均值 0 に満足す。

(2) 定常 \rightarrow 自己相関に数か時間差のみ
の関数。

$$E[x(t_1)x(t_2)]$$

$$= E\left[\sum_{k=1}^N a_k \cos(\omega_k t_1 + \phi_k) \sum_{l=1}^N a_l \cos(\omega_l t_2 + \phi_l)\right]$$

$$= E\left[\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_k a_l \cos(\omega_k t_1 + \phi_k) \cos(\omega_l t_2 + \phi_l)\right]$$

$$\left(\begin{aligned} & \cos(\omega_k t_1 + \phi_k) \cos(\omega_l t_2 + \phi_l) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos(\omega_k t_1 + \omega_l t_2 + \phi_k + \phi_l) + \cos(\omega_k t_1 - \omega_l t_2 + \phi_k - \phi_l) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos(\omega_k t_1 + \omega_l t_2) \cos(\phi_k + \phi_l) - \sin(\omega_k t_1 + \omega_l t_2) \sin(\phi_k + \phi_l) \right. \\ & \quad \left. + \cos(\omega_k t_1 - \omega_l t_2) \cos(\phi_k - \phi_l) - \sin(\omega_k t_1 - \omega_l t_2) \sin(\phi_k - \phi_l) \right\} \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N a_k a_l \frac{1}{2} \left\{ \cos(\omega_k t_1 + \omega_l t_2) \underline{E[\cos(\phi_k + \phi_l)]} \right. \\ & \quad \left. - \sin(\omega_k t_1 + \omega_l t_2) \underline{E[\sin(\phi_k + \phi_l)]} \right. \\ & \quad \left. + \cos(\omega_k t_1 - \omega_l t_2) \underline{E[\cos(\phi_k - \phi_l)]} \right. \quad \checkmark \\ & \quad \left. - \sin(\omega_k t_1 - \omega_l t_2) \underline{E[\sin(\phi_k - \phi_l)]} \right\} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$= \therefore E[\cos(\phi_k + \phi_l)]$$

$$= E[\cos \phi_k \cos \phi_l - \sin \phi_k \sin \phi_l]$$

$$k \neq l \quad \therefore \text{は}$$

$$= E[\cos \phi_k] E[\cos \phi_l] - E[\sin \phi_k] E[\sin \phi_l]$$

$$= 0$$

$$k = l \quad \therefore \text{は}$$

$$= E[\cos^2 \phi_k] - E[\sin^2 \phi_k]$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi_k \frac{1}{2\pi} d\phi_k - \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi_k \frac{1}{2\pi} d\phi_k$$

$$= \pi - \pi = 0$$

同様にして、

$$E[\sin(\phi_k + \phi_l)] = 0$$

$$E[\cos(\phi_k - \phi_l)] = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$$

$$E[\sin(\phi_k - \phi_l)] = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$$

$$\therefore E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \cos$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \cos \omega_k (t_1 - t_2) \longrightarrow \underline{\text{定常過程}} //$$

$\tau = t_1 \sim t_2$ において.

$$R_x(\tau) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \cos \omega_k \tau.$$

(3)

$$M_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2} \cos \omega_k \tau e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

$$= \frac{a_k^2}{4\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_k \tau e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \pi \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \}$$

$$\therefore M_x(\omega) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N a_k^2 \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N 4 S_x(\omega_k) \Delta\omega \cdot \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \}$$

$\omega \geq 0$ を考える

$$\omega_k > 0 \text{ かつ } \delta(\omega + \omega_k) = 0$$

$$M_x(\omega) = \sum_{k=1}^N f_x(\omega_k) \delta(\omega - \omega_k) \Delta\omega$$

$$\approx \int_0^{\infty} f_x(\omega') \delta(\omega - \omega') d\omega'$$

N が十分大きいとき

$$= f_x(\omega)$$

つまり N が十分大きいとき $M_x(\omega) \approx f_x(\omega)$

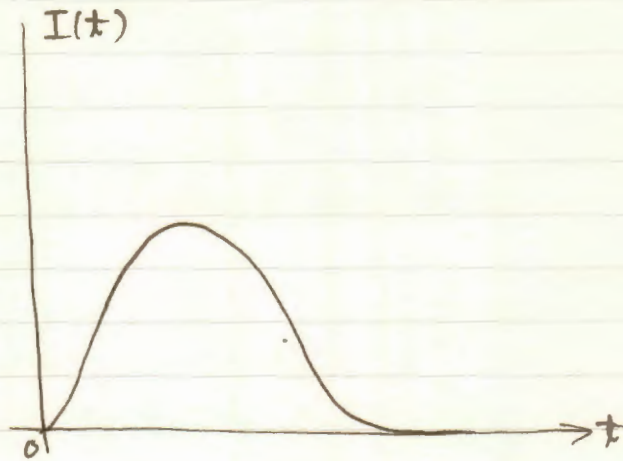
すなわち、所定のパワースペクトル。

(4) ガウス型

中心極限定理 (付録1 P261)

振巾はガウス型となる。

たとえば:



ここで、次の数学 model (Shot Noise Model) を考えてみる。

$$\star x(t) = \sum_{k=1}^N Y_k \delta(t - k\Delta t)$$

ここで Δt は時間方向の刻み。

Y_k は平均値零、分散値 $I(k\Delta t) \cdot \Delta t$ の確率変数

Y_k と Y_l ; $k \neq l$ のとき互に独立

$$\Downarrow$$

$$E[Y_k Y_l] = 0; k \neq l$$

$$E[Y_k^2]; k = l$$

$$t_1 \neq t_2 \quad E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = 0$$

相関なし

$$t_1 = t_2 \quad E[X^2(t)] = I(t) \cdot (\Delta t)$$

$$\propto I(t)$$

Shot Noise \Rightarrow nonstationary White Noise

数学 model ☆ は Shot Noise か?

(検討)

$$E[X(t)] = \sum_{k=1}^N E[Y_k] \cdot \delta(t - k\Delta t)$$

$$= 0 \quad (\because E[Y_k] = 0)$$

$$E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = E \left[\sum_{k=1}^N Y_k \delta(t_1 - k\Delta t) \right.$$

Y_k, Y_l $k \neq l$ 独立

$$E[Y_k Y_l] = 0 \quad k \neq l$$

$$E[Y_k^2] \quad k=l$$

$$\left. \cdot \sum_{l=1}^N Y_l \delta(t_2 - l\Delta t) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \underbrace{E[Y_k Y_l]}_{\text{独立}} \delta(t_1 - k\Delta t) \delta(t_2 - l\Delta t)$$

$$= \sum_{k=1}^N \underbrace{E[Y_k^2]}_{\text{分散}} \delta(t_1 - k\Delta t) \delta(t_2 - k\Delta t)$$

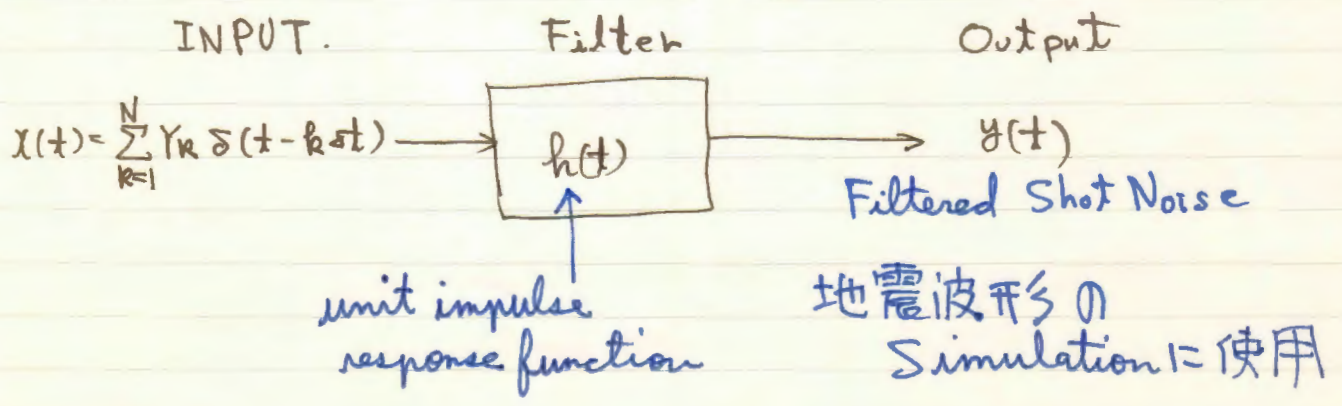
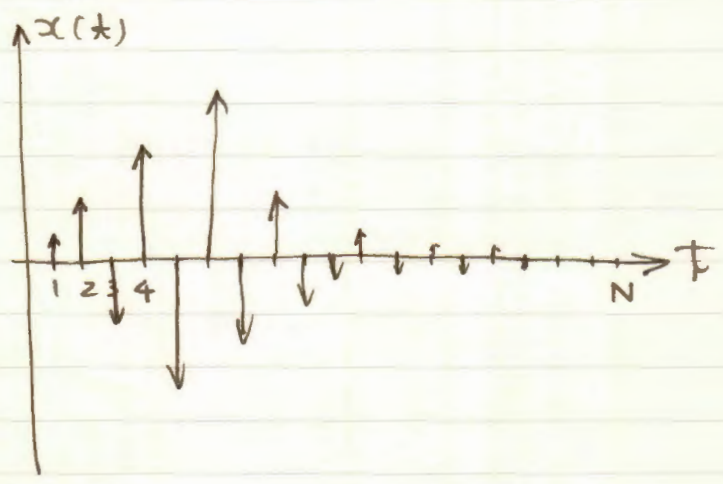
$$\text{分散} = I(k\Delta t) \cdot \Delta t$$

(定義)

$$\begin{aligned} \therefore E[x(t_1)x(t_2)] &= \sum_{k=1}^N I(k\Delta t) \delta(t_1 - k\Delta t) \delta(t_2 - k\Delta t) \Delta t \\ &\cong \int_0^{\infty} I(t') \delta(t_1 - t') \delta(t_2 - t') dt' \\ &= I(t_2) \delta(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

以上より, $x(t)$ は Shot Noise である。

$$x(t) = \sum_{k=1}^N Y_k \delta(t - k\Delta t)$$



- 自由度系の応答.

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t-\xi) x(\xi) d\xi \quad \text{pp98,}$$

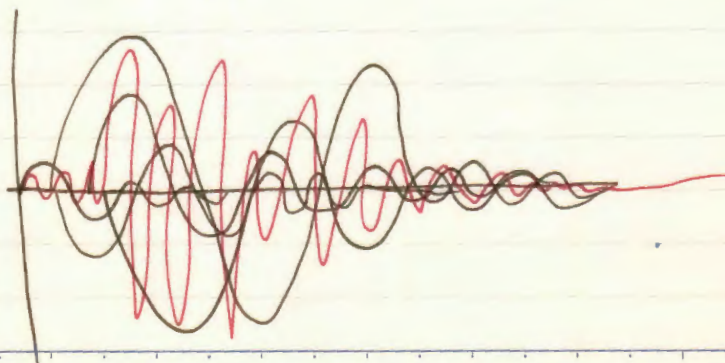
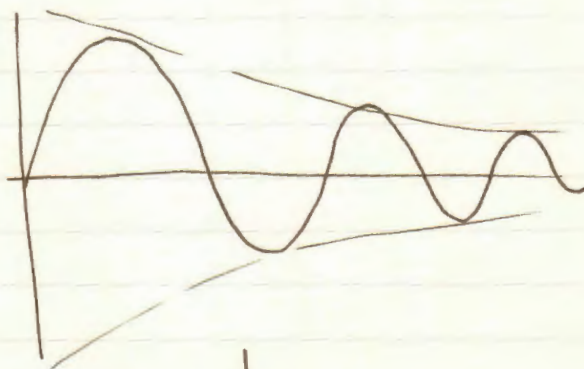
$$= \int_0^{\infty} h(t-\xi) \sum_{k=1}^N \gamma_k \delta(\xi - k\Delta t) d\xi$$

$$= \sum_{k=1}^N \gamma_k \int_0^{\infty} h(t-\xi) \delta(\xi - k\Delta t) d\xi$$

$$= \sum_{k=1}^N \gamma_k h(t - k\Delta t)$$

$t \geq \bar{t}$ は:

$$h(t) = \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

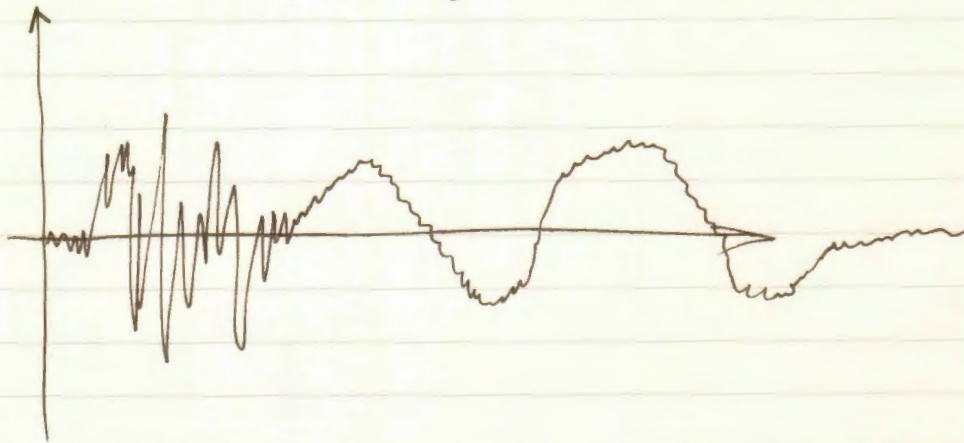


* Type III.

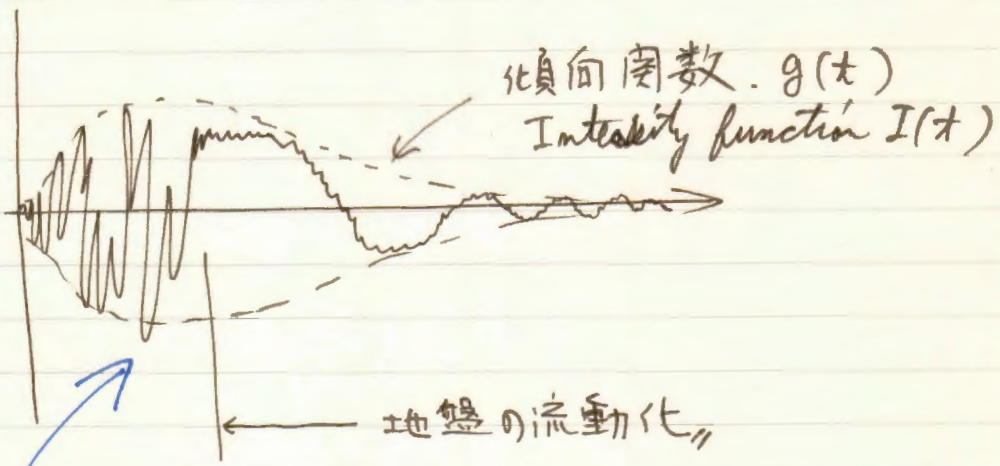
非定常性.

地盤の流動化.

(Liquifaction)



* 非定常性 III



$g(t), I(t) \longrightarrow$ 振幅非定常

時間と共に振動数特性も変化

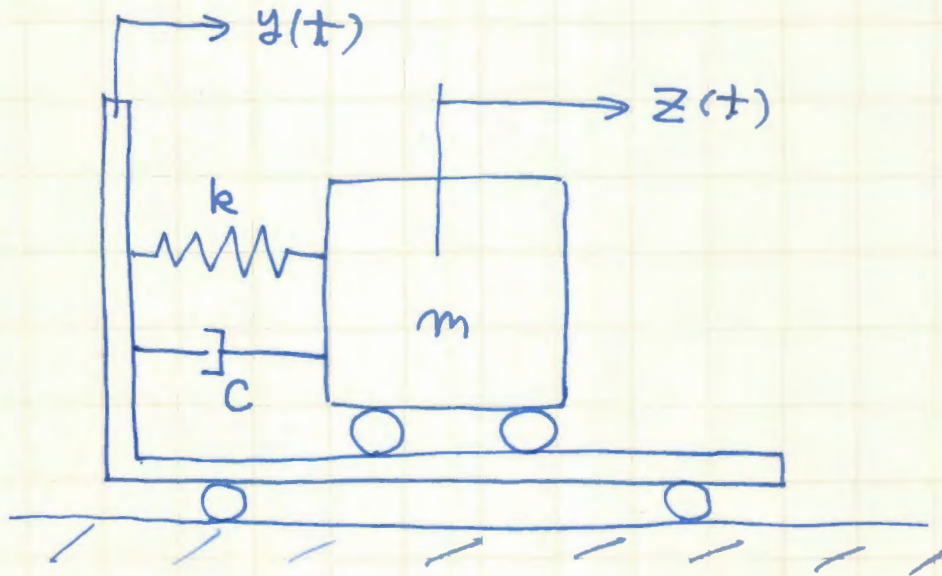
\longrightarrow 振動数非定常

$$* y(t) = \sum_{k=1}^N a(\omega_k t) \cdot \cos(\omega_k t - \theta_k)$$

11/10

4.3 不規則振動解析.

1自由度系.



m の基礎地盤に対する相対変位;

$$x(t) = z(t) - y(t)$$

標準形の基本方程式

$$\ddot{x} + 2\beta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{y}(t) = f(t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{natural circular frequency}$$

$$\beta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad \text{damping coefficient (non-dimension)}$$

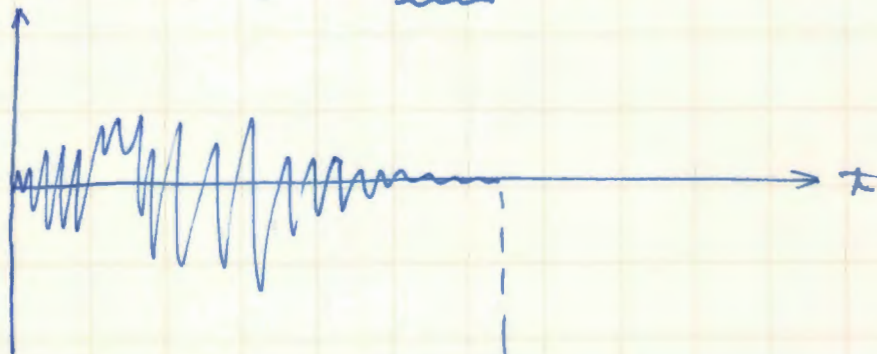
initial condition $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ (静止)

$$x(t) = \int_0^t h(t-\xi) f(\xi) d\xi$$

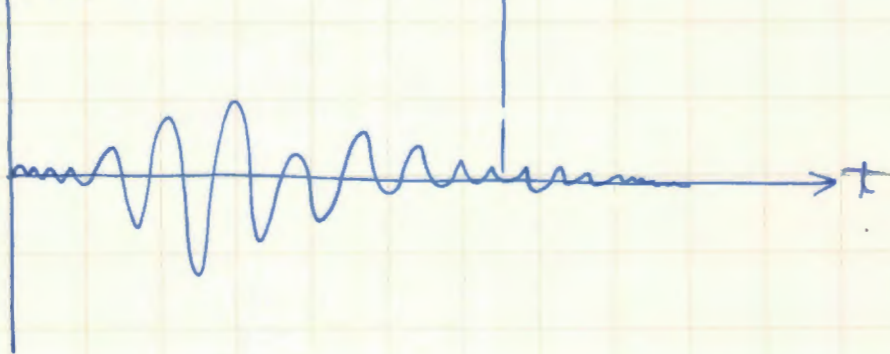
$$h(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\rho\omega_0 t}}{\bar{\omega}_0} \sin \bar{\omega}_0 t & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

$$\bar{\omega}_0 = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

$f(t)$ $\text{cm/sec}^2 = \text{gal}$ (GALileo)



$x(t)$ cm



$f(t)$; random process

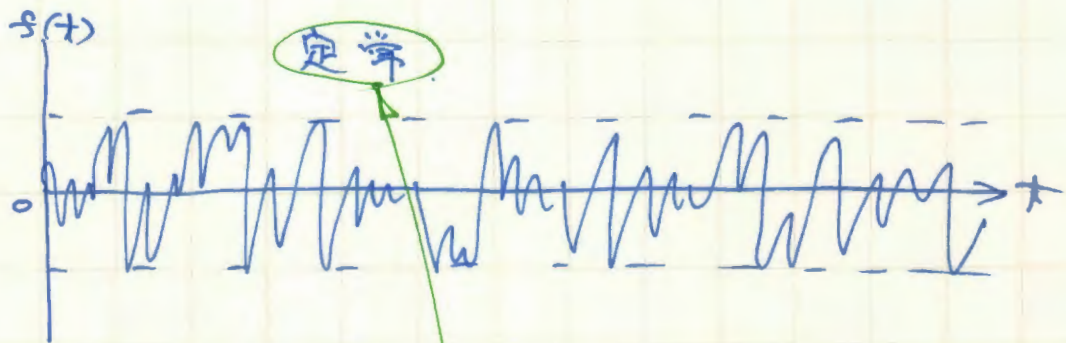
↓

$x(t)$; random process.

$f(t)$; 定常確率ガウス過程で平均値0の
場合の確率過程論的検討.

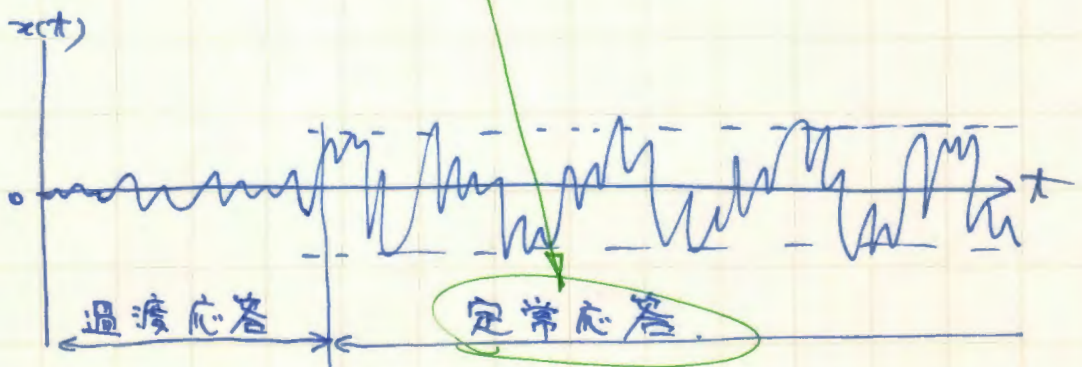
[結論]

$f(t)$ の 1 サンプル関数.



$$S_x(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega)$$

$x(t)$ の 1 サンプル関数.



[応答特性]

i) 平均値. (時間一定にしたときの各入=出力の間の平均値, アverage)

$$E[X(t)] = E\left[\int_0^t h(t-\xi) f(\xi) d\xi\right]$$

convolutional integration =

$$= \int_0^t h(t-\xi) E[f(\xi)] d\xi$$

$$= 0$$

$$(\because E[f(\xi)] = 0 \quad)$$

ii) 自己相関関数.

$$E[X(t_1) X(t_2)]$$

$$= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1-\xi_1) h(t_2-\xi_2) E[f(\xi_1) f(\xi_2)] d\xi_1 d\xi_2$$

$$= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1-\xi_1) h(t_2-\xi_2) R_f(\xi_1-\xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

ここで、 $(\tau = \xi_1 - \xi_2)$

$$S_f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{別の時間領域で入力する} \\ h(t) : t < 0 \text{ で } 0 \text{ かつ } h(t-\xi) \text{ は } t < \xi \text{ で } 0 \end{array} \right.$

積分区間は、 $\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty}$ と書きかえられた。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1 - \xi_1) h(t_2 - \xi_2) R_f(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

$t_1 = t_2 = t$ とおくと

$$E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \xi_1) h(t - \xi_2) R_f(\xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \xi_1) h(t - \xi_2) R_f(\xi_1 - \xi_2) e^{-i\omega(\xi_1 - \xi_2)} e^{i\omega(\xi_1 - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2$$

$\xi_1 - \xi_2 = \tau$ とおくと

(ξ_1 に よる 積分 では . $d\xi_1 = d\tau$.)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau-\xi_2) h(t-\xi_2) R_f(\tau) e^{-i\omega\tau} e^{i\omega\xi_2} d\tau d\xi_2$$



out //

別解.

$$f(t) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

と表ゆせば、応答は;

$$x(t) = \int_0^t h(t-\xi) f(\xi) d\xi$$

$$= \int_0^t \frac{e^{-\beta\omega_0(t-\xi)}}{\omega_0} \sin \bar{\omega}_0(t-\xi) \sum_{k=1}^N a_k \cos(\omega_k \xi + \phi_k) d\xi$$

$$= \sum_{k=1}^N a_k \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\omega_0} \int_0^t e^{\beta\omega_0 \xi} \sin \bar{\omega}_0(t-\xi) \cos(\omega_k \xi + \phi_k) d\xi$$

$$\Rightarrow 4.40 \text{ 式}$$

$$\Rightarrow 4.41 \text{ 式} \quad (t: T)$$

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^N a_k \underbrace{|H(\omega_k)|}_{\text{}} \cos \{ \omega_k t + \phi_k + \underbrace{\theta(\omega_k)}_{\text{}} \}$$

(4.41 式) において、次の計算を行う。

$$E[x(t)] = 0$$

$$E[x(t_1)x(t_2)] = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} a_k^2 |H(\omega_k)|^2 \cos \omega_k \tau$$

$$(\tau = t_1 - t_2)$$

両辺をフーリエ変換して Powerspectrum の

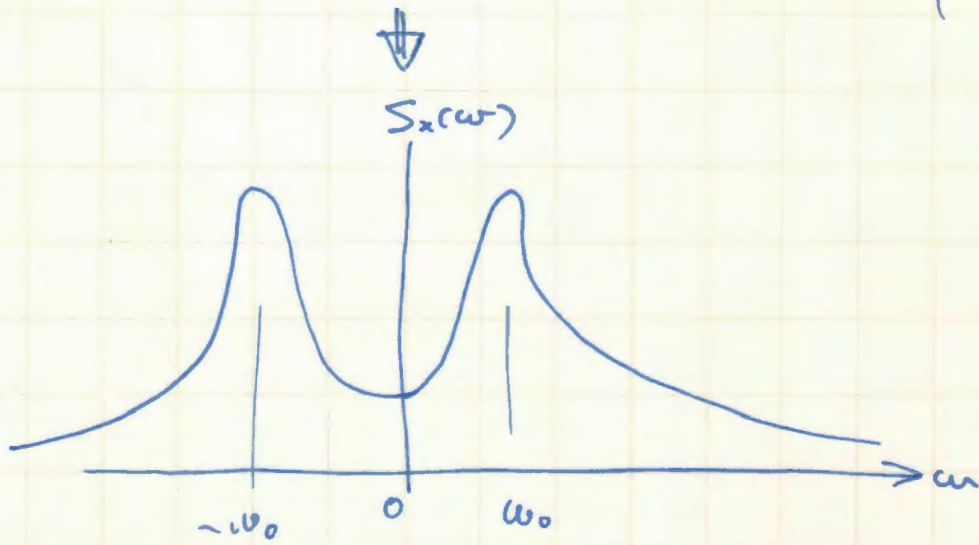
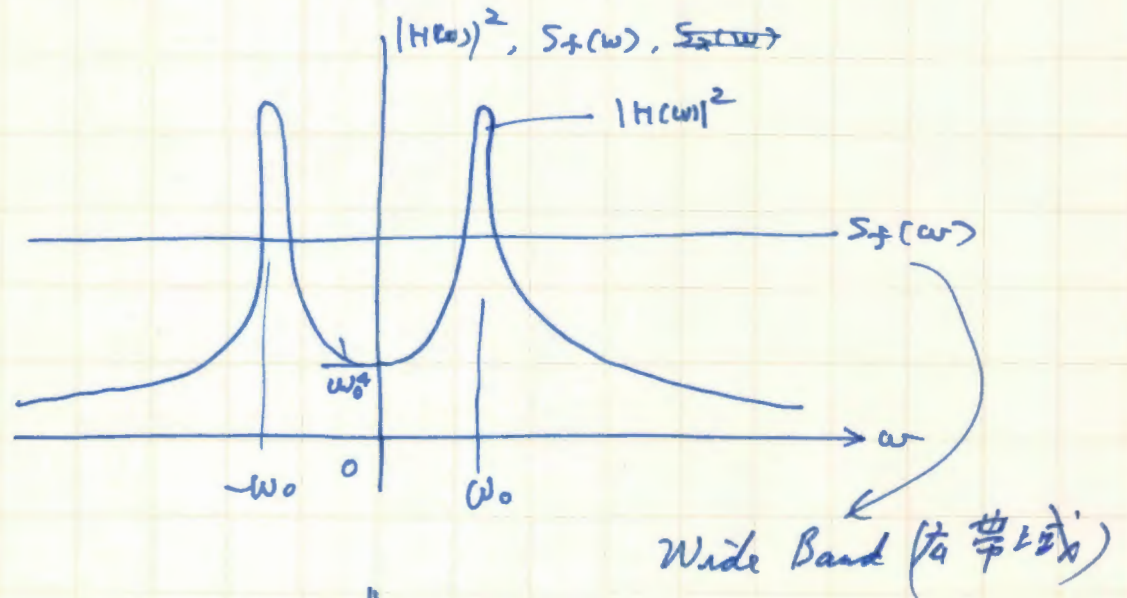
関係式を導く；

$$S_x(\omega) = |H(\omega)|^2 S_f(\omega)$$

[検討.]

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{\omega_0^4 \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\beta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right\}}$$

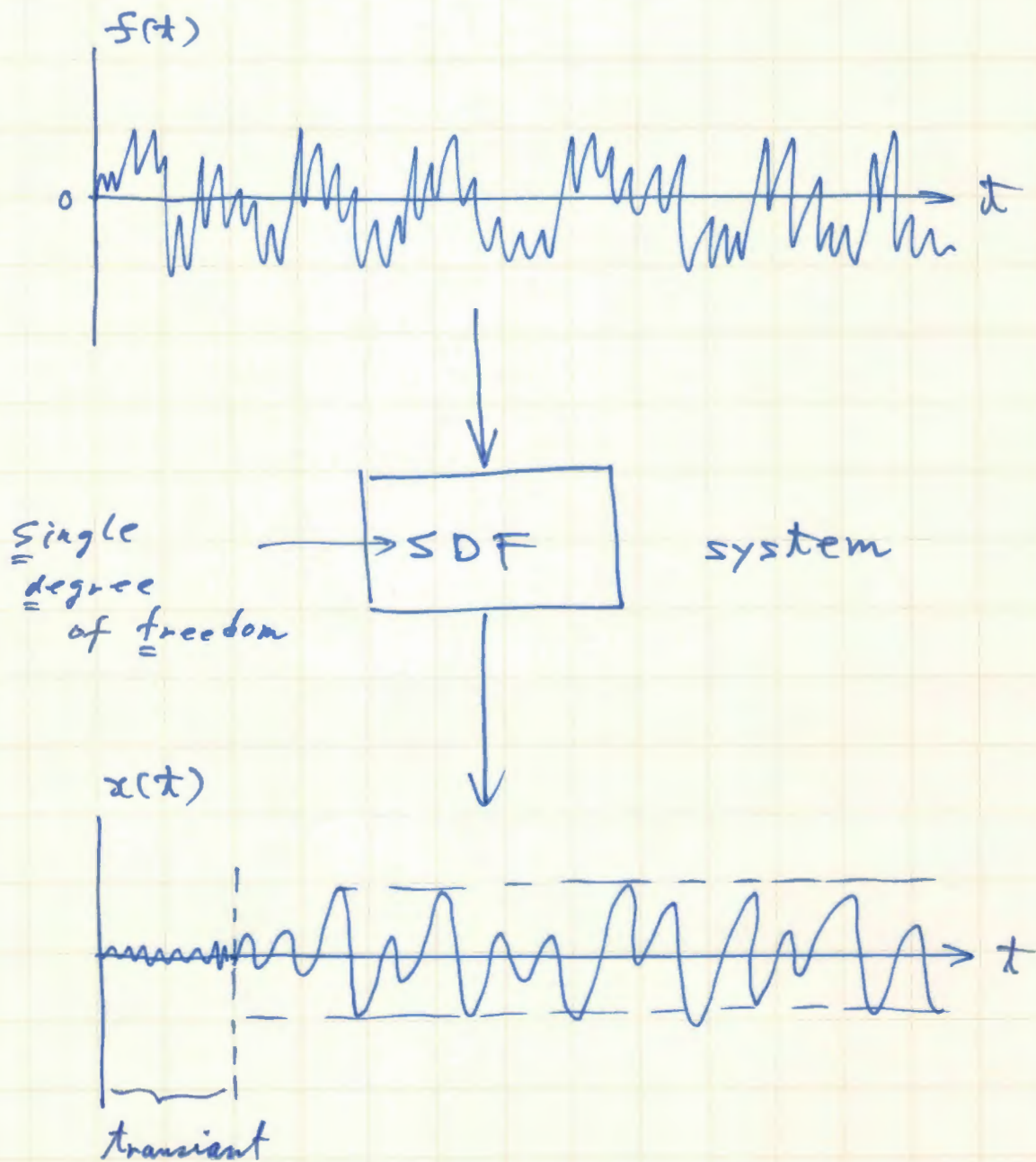
λ 力 $S_f(\omega) = S_0 = \text{const.}$ (white noise)



たとえば入力 $f(t)$ が WHITE NOISE のような

Wide band のとき, SDF の応答 $x(t)$ は

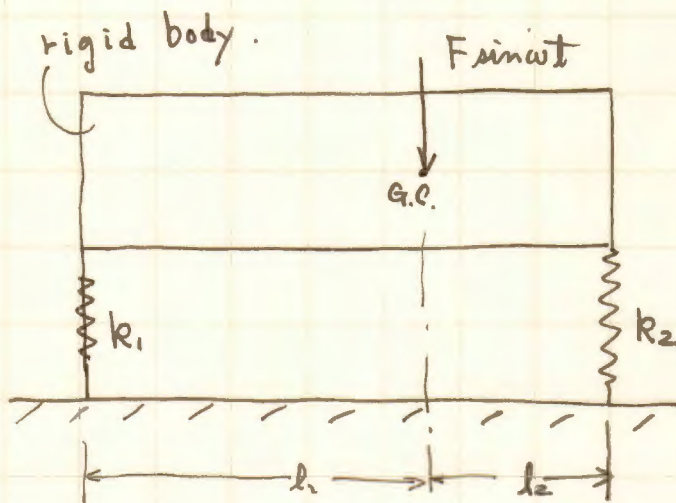
Narrow band となる。



11/16.

多自由度系の線形応答解析.

Ex1)

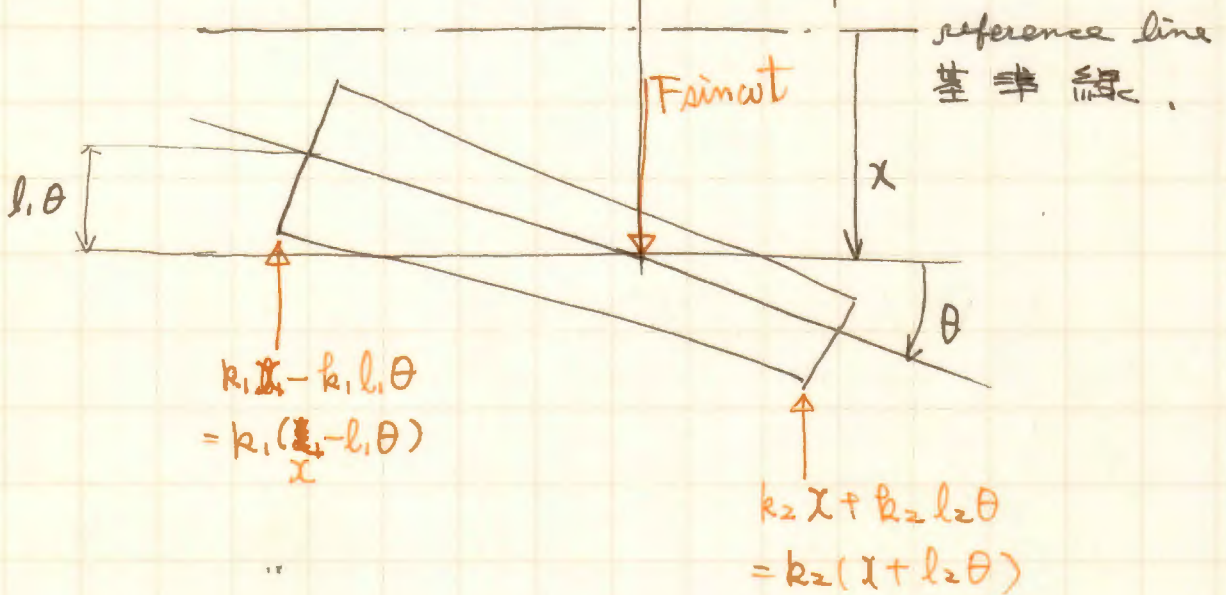


m : mass 質量. $[kg \cdot sec^2/cm]$

J : moment of inertia

慣性モーメント. $[kg \cdot cm \cdot sec^2]$

$$\sum m \cdot r^2$$



垂直方向のつり合い (x 方向)

$$m\ddot{x} = -k_1(x - l_1\theta) - k_2(x + l_2\theta) + F\sin\omega t \quad (1)$$

回転 (θ 方向)

$$J\ddot{\theta} = l_1 \cdot k_1(x - l_1\theta) - l_2 k_2(x + l_2\theta) \quad (2)$$

(1) (2) をマトリクス表示すると.

$$\begin{bmatrix} m \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 l_1 + k_2 l_2 \\ -k_1 l_1 + k_2 l_2 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F\sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

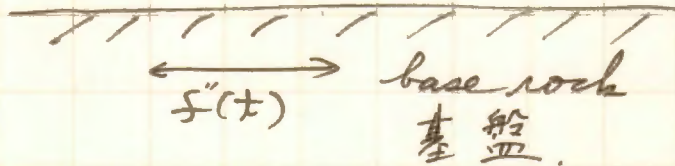
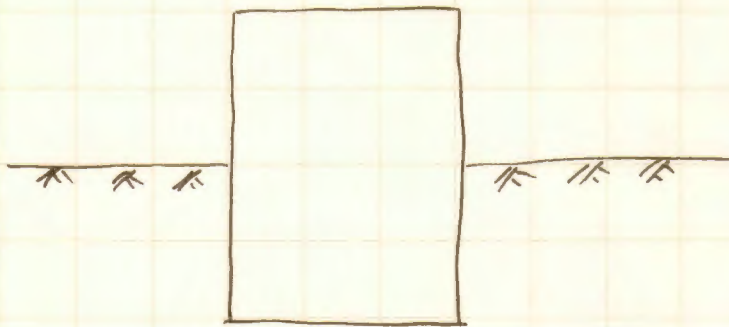
$$\therefore M \ddot{x} + K x = F$$

$$M = \begin{bmatrix} m \\ J \end{bmatrix} \quad \ddot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F\sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

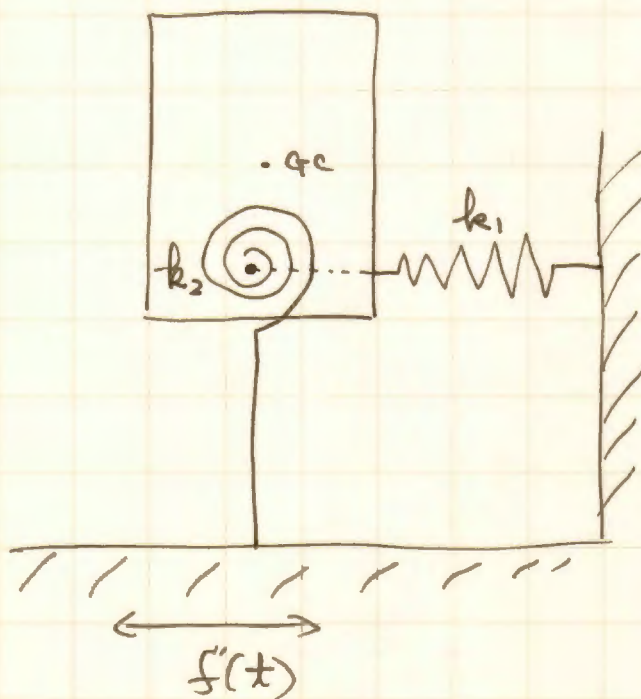
$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 l_1 + k_2 l_2 \\ -k_1 l_1 + k_2 l_2 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}$$

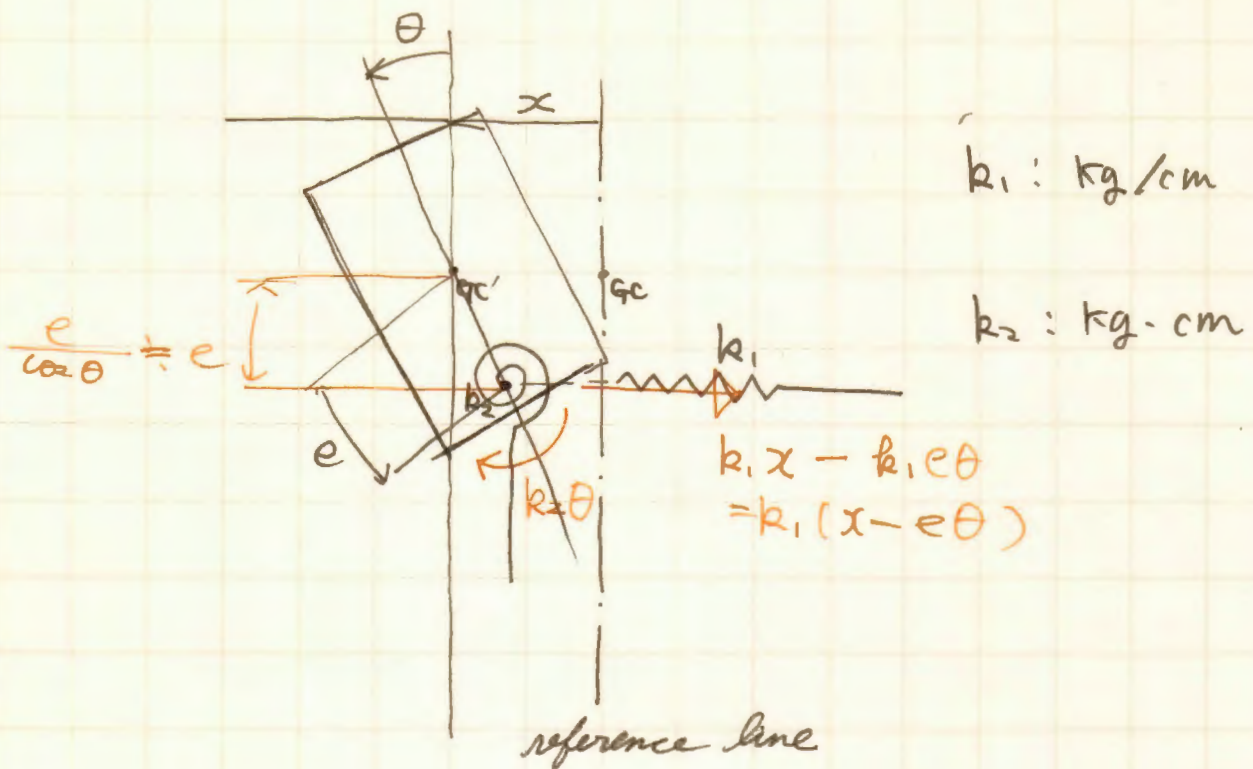
Ex 2)

4-7: 基礎.



↓ モデル化





水平方向 (x 方向)

$$m(\ddot{x} + \ddot{f}) = -k_1(x - e\theta) \quad (5)$$

回転 (θ 方向)

$$J\ddot{\theta} = -k_2\theta + k_1(x - e\theta)e \quad (6)$$

(5), (6) をマトリックス表示する;

$$\begin{bmatrix} m \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 e \\ -k_1 e & k_2 + k_1 e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m\ddot{f}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$M\ddot{X} + KX = F$$

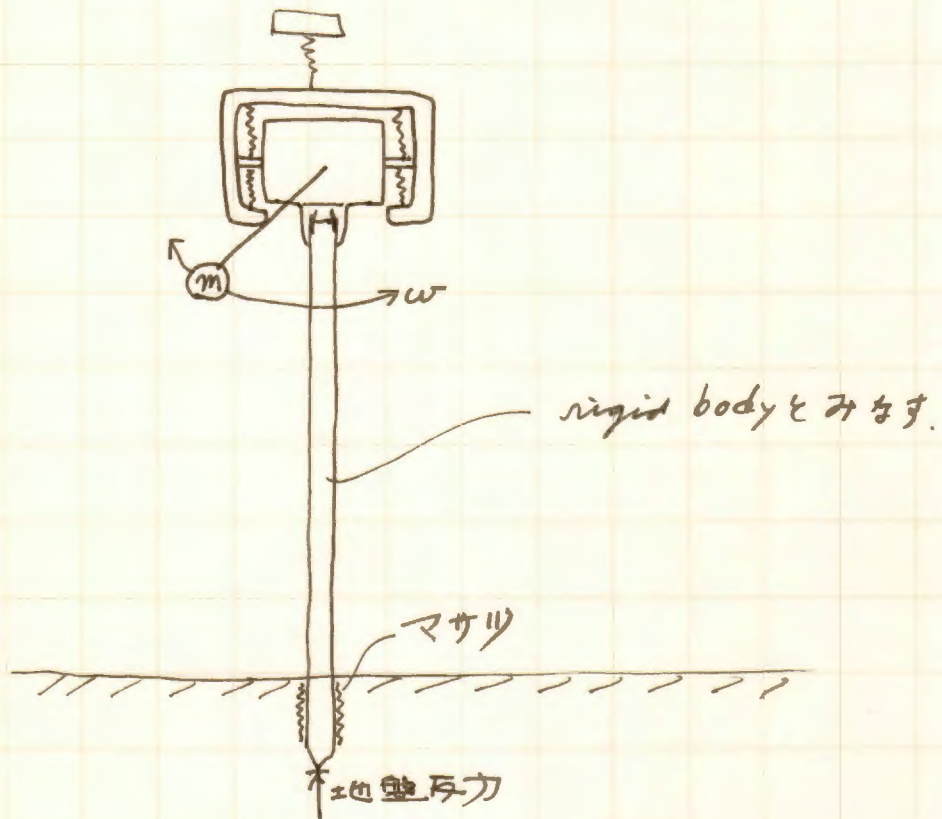
これは (4) 式と同じ形式である。

一般に多自由度系は、減衰項も考慮する:

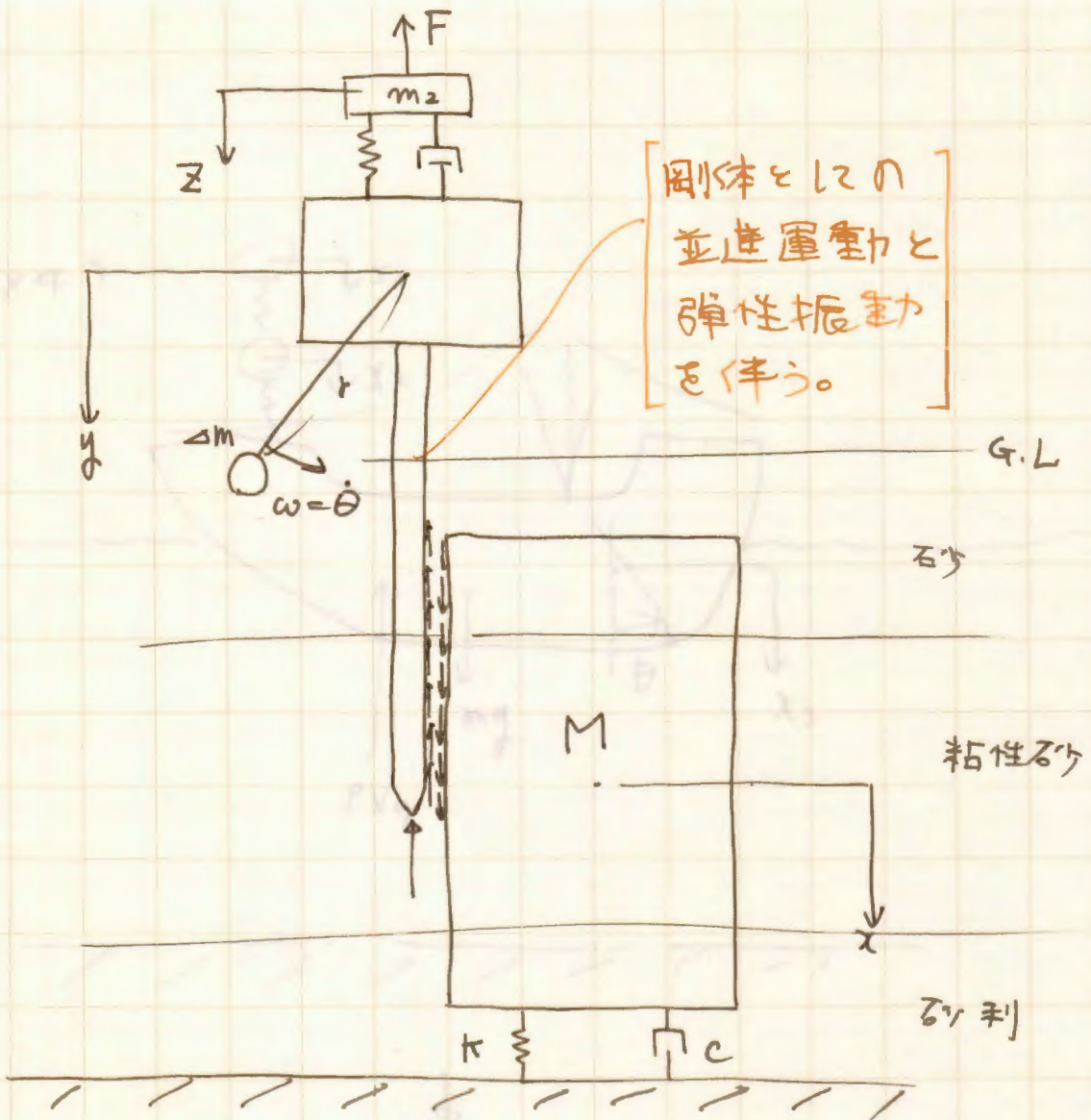
$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = F$$

Ex 3.2

パイプコ



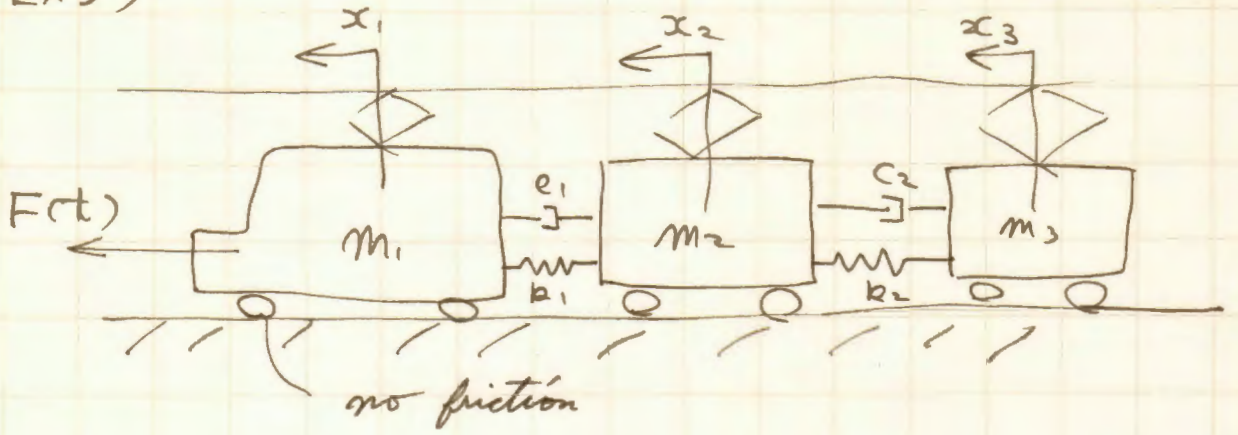
モデル化.



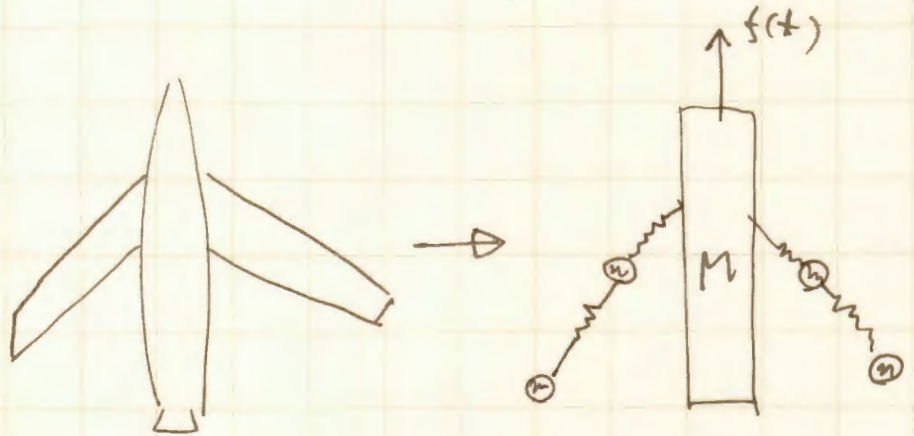
1920年代

剛体運動の例

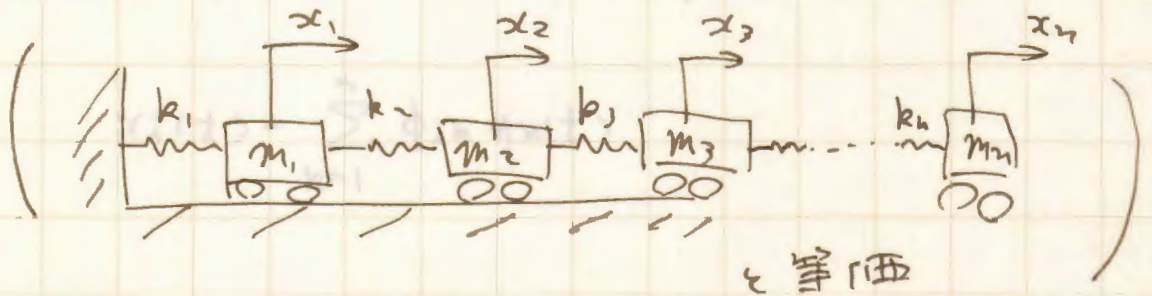
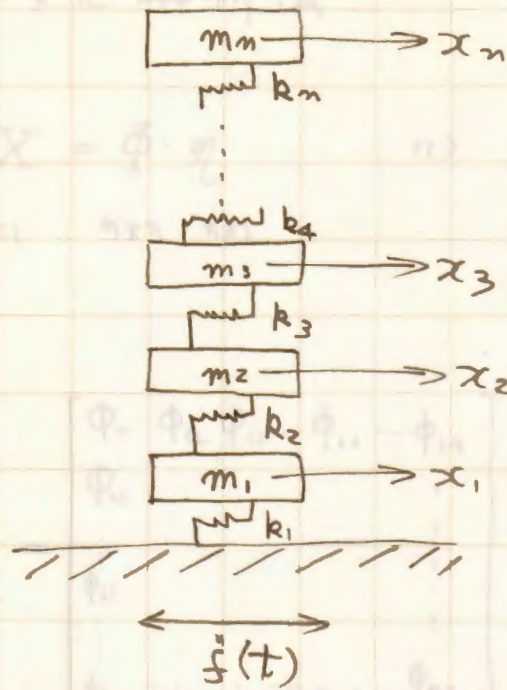
EX5)



EX6)



EX 7)



$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = -\mathbf{M} \mathbf{I} \ddot{f}(t)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & m_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & m_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k_1 & -k_1 & & \\ & k_1 + k_2 & -k_2 & \\ & & k_2 + k_3 & -k_3 \\ & & & \ddots \\ & & & & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & & & k_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \omega_1^2 & & & \\ & M_2 \omega_2^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & M_n \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = -\underbrace{\Phi^T M I \ddot{f}(t)}$$

$$\Phi^T M I = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{21} & \dots & \phi_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{1n} & \dots & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{1n} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}$$

$$\{\Phi^T M I\}_i = \sum_{k=1}^n \phi_{ki} m_k$$

i th element :

$$M_i \ddot{\eta}_i + M_i \omega_i^2 \eta_i = - \sum_{k=1}^n \phi_{ki} m_k \ddot{f}(t) \quad \dots (2)$$

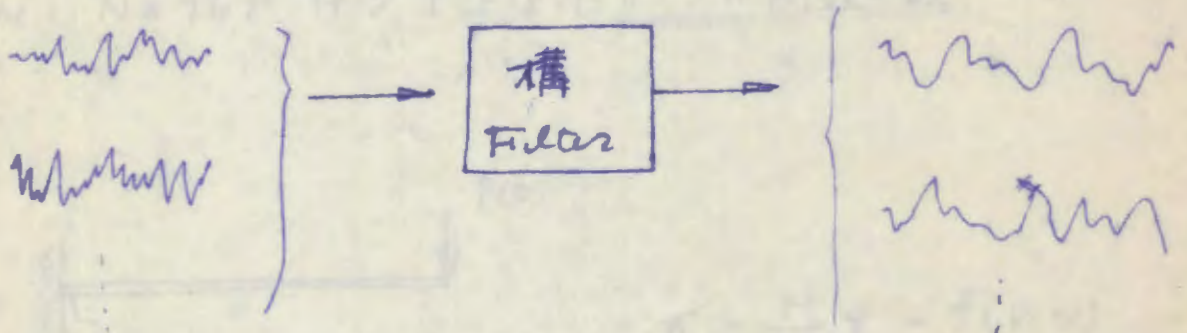
$$m_i \omega_i^2 \eta_i + (c_i \dot{\eta}_i + k_i \eta_i) = - \sum_{k=1}^n \phi_{ki} m_k \ddot{f}(t)$$

7. 動的信賴性理論

(Dynamic Reliability)

入力 $f_x(t)$

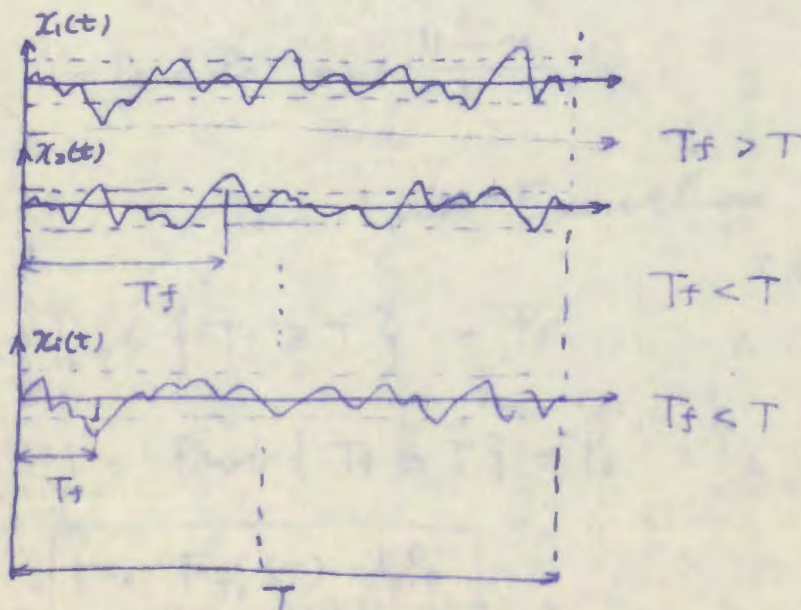
応答 $x(t)$



安全性

$$P_s = \text{Prob} \left\{ \max x(t) \leq \lambda_1 \cap \min x(t) \geq -\lambda_2 \right. \\ \left. ; 0 \leq t \leq T \right\}$$

理論式



12/14.

両側交差.

$$P_s = \text{Prob} \{ x_{\max}(t) \leq \lambda_1 \cap x_{\min}(t) \geq -\lambda_2 : 0 \leq t \leq T \}$$

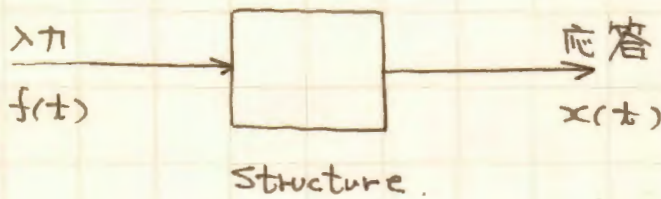
動的信頼性.

交差問題 Crossing Problem ^{p162-p165} ↑

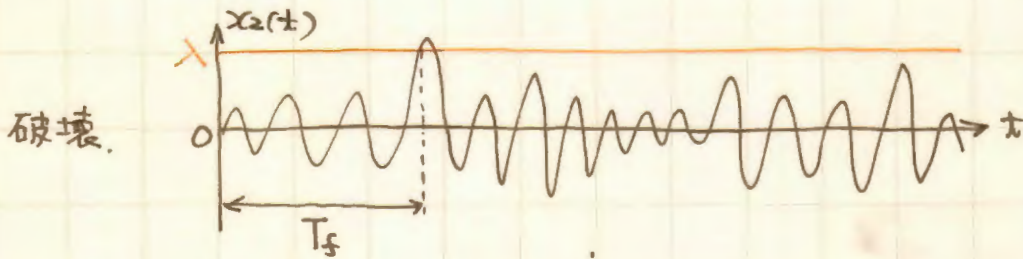
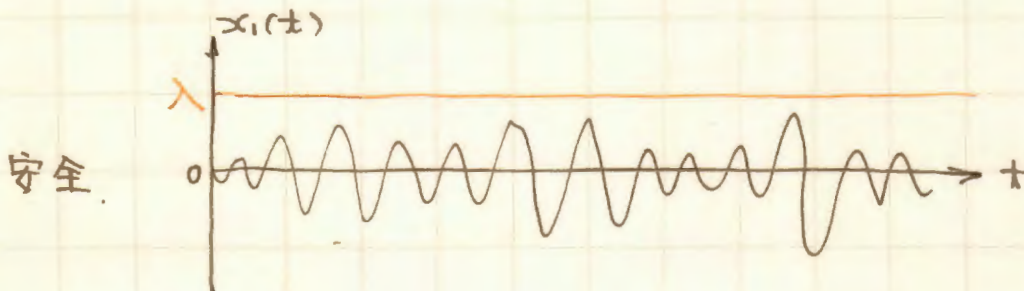
$$P_s = \text{Prob} \{ x(t) \leq \lambda \quad : \quad 0 \leq t \leq T \} \quad \text{片側交差}$$

↑

応答の限界値 (基準レベル)



たとえば $x(t)$; 重要箇所での応答.



Simulation

chance failure

$$\text{Probability of Success } P_s = \frac{N_s (\text{安全なケースの数})}{N (\text{全ケースの数})}$$

$$\text{Prob. of Failure } P_f = \frac{N - N_s}{N}$$

レベル λ を正勾配で交差するときの
交差率 (= 単位時間当りの期待交差回数)

正勾配.

$$\nu_{\lambda}^{+}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{x(t)}}{\sigma_{x(t)}} \exp \left\{ -\frac{\lambda^2}{2\sigma_{x(t)}^2} \right\}$$

↑
レベル λ

仮定: 交差が Poisson 分布に従って発生する.

すなわち、交差はめったに起らないので、
互に独立に起るものとする.



区間 $[0, T]$ に於いて、交差回数 $N = m$ となる Prob.

$$P_{\{N\}}(m, T) = \frac{1}{m!} \left[\int_0^T \nu_{\lambda}^{+}(t) dt \right]^m e^{-\int_0^T \nu_{\lambda}^{+}(t) dt}$$

$$P_s = P_{\{N\}}(0, T) = e^{-\int_0^T \nu_{\lambda}^{+}(t) dt} \quad (\Rightarrow \text{非定常})$$

$x(t)$ が定常過程ならば.

$$\nu_{\lambda}^{+}(t) = \nu_{\lambda}^{+} (= \text{const})$$

$$\therefore P_s = e^{-\nu_{\lambda}^{+} T} \quad (\text{定常})$$

$$P_f = 1 - P_s$$

$$= 1 - e^{-\nu_\lambda^+ \cdot T}$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

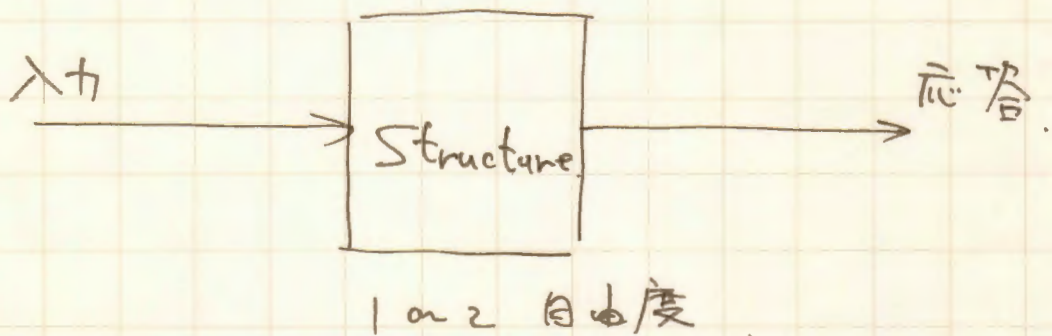
$$\approx 1 - x$$

$$\therefore P_f = 1 - (1 - \nu_\lambda^+ \cdot T) = \nu_\lambda^+ \cdot T.$$

$$P_s = 1 - \nu_\lambda^+ \cdot T$$

1. Simulation
2. Analytical
3. Input Output Analysis
4. Reliability

Report 提出.



入力
Structure } → 任意.

応答解析 (One or Two deg. of freedom)

2610

理論解

数値シミュレーション解

i) 入力の設定

($x(t)$)

定常解1 ↓
 $x(t) = g(t) x_d(t)$

ここで

$x_d(t)$ のパワースペクトル

$S(\omega)$ を与える。

与えるは " $g(t) = (a_1 + a_2 t) e^{pt}$ "
 P236
 を与える。

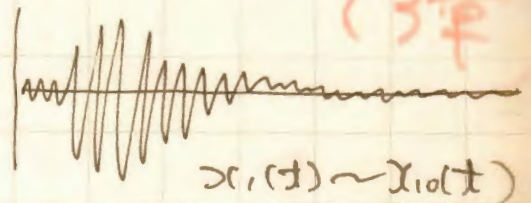
(2.3章)

$$x(t) = (a_1 + a_2 t) e^{pt}$$

$$\sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

$S(\omega)$

↓



ii)

応答

($y(t)$)

応答の自乗平均値 $\sigma_y^2(t)$

P101 (4.18)式

$$R_y(t_1, t_2)$$

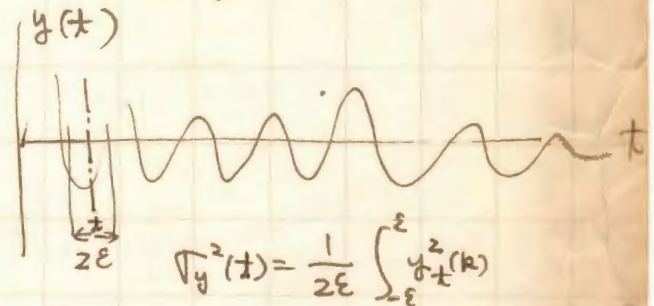
$$\sigma_y^2(t) = R_y(t, t) = \dots$$

$$\sigma_y^2(t) = \frac{\partial R_y(t, t)}{\partial t^2} = \dots$$

(4章)
(5章)

$$y(t) = \int_0^t h(t-\xi) x(\xi) d\xi$$

↓



i) $\sigma_y^2(t) =$ 平均

ii) $\sigma_{\dot{y}}^2(t) =$ 平均

$\dot{y}(t) =$; 数値計算? → ます平均を出して補正する。

$y_1(t) \sim y_{10}(t)$

(4章)
(5章)

参考文献

- <1> 星谷 勝 : 確率論手法による振動解析 p109~p111.
- <2> 星谷 勝 : 同上 p153~p174.
- <3> 星谷 勝 : 同上 p ~ p
- <4> 大崎 順彦 : 地震動のスペクトル解析入門 p186~p192
- <5> 大崎 順彦 : 同上 p193~p204
- <6> 星谷 勝 : 確率論手法による振動解析 p ~ p

IV) 動的信頼性の理論解^{<2>}

i) スペクトル定数.

変位応答 $x(t)$ が平均値 0 の非定常確率過程のとき.

スペクトル定数は次のように、時間 t の関数として表わされる.

$$\sigma_x^2 = \alpha_0(t) = \frac{\pi \cdot G_s}{4\beta\omega_0^3} \left[1 - e^{-2\beta\omega_0 t} \left\{ 1 + \frac{\beta\omega_0}{\omega_0} \sin 2\omega_0 t + 2 \left(\frac{\beta\omega_0}{\omega_0} \right)^2 \sin^2 \omega_0 t \right\} \right]$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \alpha_2(t) = \frac{\pi \cdot G_s}{24\beta\omega_0} \left[1 - e^{-2\beta\omega_0 t} \left\{ 1 - \frac{\beta\omega_0}{\omega_0} \sin 2\omega_0 t + 2 \left(\frac{\beta\omega_0}{\omega_0} \right)^2 \sin^2 \omega_0 t \right\} \right]$$

$$\omega_2(t) = \sqrt{\frac{\alpha_2(t)}{\alpha_0(t)}}$$

ここで $\alpha_0(t) = \sigma_x^2(t)$, $\alpha_2(t) = \sigma_{\dot{x}}^2(t)$ である.

ii) 動的信頼性.

入力が広帯域定常確率ガウス過程で、1自由度系の
過渡応答 $x(t)$ に対する動的信頼性は次式によって求めら

れる。

$$P_s(\lambda, -\lambda) = \exp \left[- \int_0^T \frac{\omega_z(t)}{\pi} \exp \left\{ - \frac{\lambda^2}{2\sigma_0(t)} \right\} dt \right]$$

- ここで λ : 基準レベル
- T : 信頼性の計算時間.
- σ_0 : スポクトル定数
- ω_z :

1) 合積計算法による応答解析 ^{<4>}

$f(t)$ なる入力を受けた1自由度系の変位応答 $x(t)$ は、

初期条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ で求めれば、単位衝撃応答

関数 $h(t)$ を用いて次のように表わすことができる。

$$x(t) = \int_0^t h(t-\xi) f(\xi) d\xi \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} \quad h(t) &= \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\omega_0} \sin\omega_0 t \quad ; \quad t \geq 0 \\ &= 0 \quad ; \quad t < 0 \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \omega \sqrt{1-\beta^2} \quad ; \quad 0 \leq \beta < 1$$

同様に、速度応答、加速度応答は次のようにそれぞれ表わ

すことができる。

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \dot{h}(t-\xi) f(\xi) d\xi \quad (2)$$

$$\ddot{x}(t) = \int_0^t \ddot{h}(t-\xi) f(\xi) d\xi \quad (3)$$

$$\Rightarrow \ddot{h}(t) = -e^{-\beta\omega_0 t} \left(\cos\omega_0 t - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin\omega_0 t \right)$$

$$\ddot{h}(t) = \omega_0 e^{-\beta\omega_0 t} \left\{ \left(1 - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \right) \sin\omega_0 t + \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos\omega_0 t \right\}$$

(ただし, $\dot{h}(t) = \ddot{h}(t) = 0$; $t < 0$)

今, 入力 $f(t)$ が 時間刻み Δt の N 個の値で与えられていると

すれば, 各応答の時刻歴は,

$$x(m) = \sum_{j=1}^m f(j) \cdot h((m-j)\Delta t) \cdot \Delta t \quad ; m=1, N$$

$$\dot{x}(m) = \sum_{j=1}^m f(j) \cdot \dot{h}((m-j)\Delta t) \cdot \Delta t \quad ; m=1, N$$

$$\ddot{x}(m) = \sum_{j=1}^m f(j) \cdot \ddot{h}((m-j)\Delta t) \cdot \Delta t + f(m) \quad ; m=1, N$$

$$\text{ただし } f(m) = -\ddot{y}(m)$$

により求めることができる。

$$T = (T^{-1}) \cdot \Delta t$$

$$x(m) = \sum_{j=1}^m \cdot T^{-1}$$