〈応用力学特論 演習及び最終レポートについて〉 星谷.

課題： 構造の応答解析を行い，数値解析結果の考察を行う.

構造：1自由度又は2自由度の任意構造でよい.

手法：不規則振動理論と数値シミュレーション手法の両手法で
応答をcheckすること.

入力：定常確率ガウス過程又は傾向関数 $g(t)$ で修正した非定常確率ガウス過程とする。
パワースペクトル特性は任意に与えればよい。

応答：定常応答だけでなく過渡的な非定常応答も含めて検討する。
結果を信頼性理論を用いて整理する.

全体のまとめ方：各自，自由にまとめてよいが技術報告の形式とする。

予定：1月中は毎週金曜日（1月11日，18日，25日）に応力研で質問その他を受けつける.
（4:45〜6:00 PM）

提出日：2月8日(金) 5:00 PM.

応用力学特論

演習及び最終レポート

土木工学専攻 9504.

橋梁研究室.

皆川 勝

提出日 昭和55年 月 日.

課題：　構造の応答解析を行ない、数値解析結果の考察をする。

構造：　1自由度又は2自由度の任意構造とする。

手法：　不規則振動理論と数値シミュレーション手法の両手法で応答をチェックする。

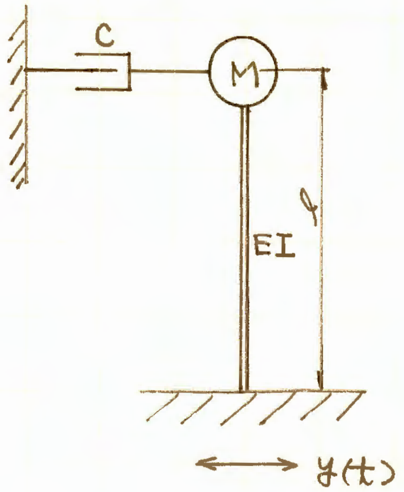
入力：　定常確率ガウス過程又は傾向関数 $g(t)$ で修正した非定常確率ガウス過程とする。

応答：　定常応答だけでなく、過渡的な非定常応答も含めて検討する。結果を信頼性理論を用いて整理する。

全体のまとめ方　各自、自由にまとめてよいが技術報告の形式とする。

提出：　昭和55年2月8日（金）5:00 PM.

I) システムの設定.



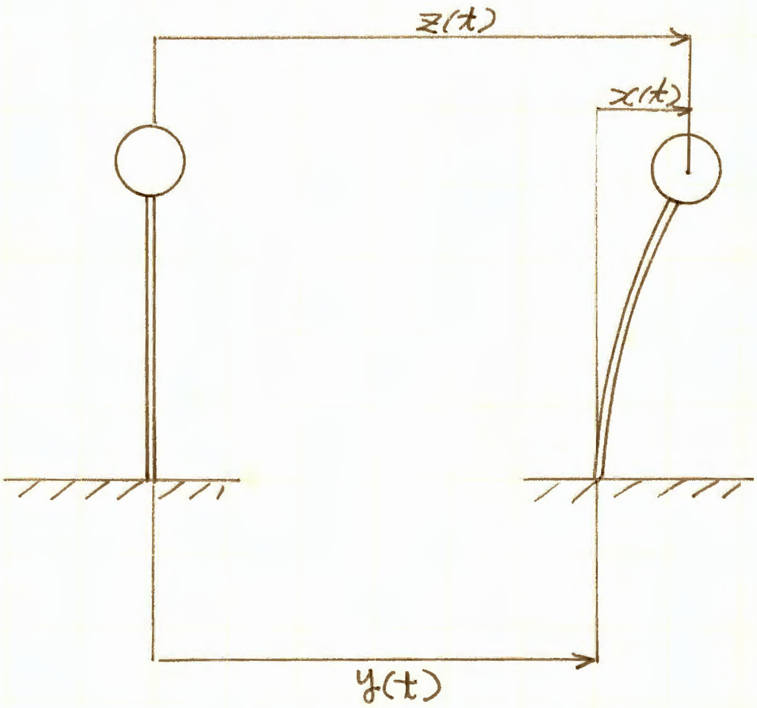
M：質量

EI：梁の曲げ剛性

l：梁の長さ

c：減衰定数.

1) 構造は、上図のような、片持梁の先端に集中質量がある場合の、地震時水平力による曲げ振動を考える。
(ただし梁の質量は無視する。)



ii) バネ係数Kを求める.

梁の上端における強制変位u=1.0に対する復元力をKとする。

$$\because \quad u = \frac{P\ell^3}{3EI} \qquad \therefore \quad K = \frac{3EI}{\ell^3}$$

iii) 質量Mの相対変位x(t)に関する振動方程式を求める.

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{y}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + 2\beta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{y} = f(t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{3EI}{\ell^3 M}}$$

$$\beta = \frac{C}{2\sqrt{MK}} = \frac{C}{2}\sqrt{\frac{\ell^3}{3EIM}}$$

(iv) 構造特性の設定.

構造特性は以下のようにきめる.

集中質量 $M = 10\ \mathrm{kg \cdot sec^2/cm}$, 梁の長さ $l = 200^{cm}$

曲げ剛性 $EI = 2.1 \times 10^{10}\ \mathrm{kg \cdot cm^2}$

減衰定数 $c = 0.56\ \mathrm{kg \cdot sec/cm}$

iii) より ω_0, β は次のように求まる.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI}{l^3 M}} = 28.062\ (\mathrm{rad/sec})$$

$$\beta = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{l^3}{3EIM}} = 0.001$$

II) 入力の設定.

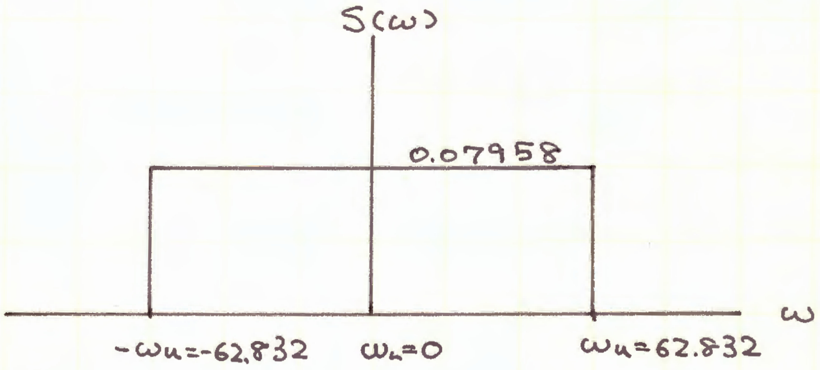
入力として、地震加速波を考え、これを定常確率ガウス過程とみなす。地震加速度を $\ddot{y}(t)$ とし、$f(t)=-\ddot{y}(t)$ のパワースペクトル密度関数を設定する。入力は有帯域ホワイトノイズとし、次のようにきめる。

$$S(\omega) = 0.07958 \ (\mathrm{cm^2/sec^3}) \quad ; \quad -\omega_u<\omega<-\omega_L,\ \omega_L<\omega<\omega_u$$

$$= 0 \quad ; \quad \omega<-\omega_u,\ -\omega_L<\omega<\omega_L,\ \omega_u<\omega$$

ただし　$\omega_L = 0$

$\omega_u = 62.832$ (rad/sec) $= 10$ (Hz)



III) 入力地震波の数値シミュレーション.

i) 入力 $f(t)$ は平均値0の定常確率ガウス過程であり, 設定された $f(t)$ のパワースペクトル密度関数 $S(\omega)$ により次のようにシミュレートすることができる。

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

ここで.
$$a_k^2 = 4 \cdot S(\omega) \cdot \Delta\omega$$
$$\omega_k = \omega_L + (k-0.5) \cdot \Delta\omega$$
$$\Delta\omega = (\omega_u - \omega_L) / N$$

ϕ_k : $0 \sim 2\pi$ の一様乱数

(ただし ϕ_k と ϕ_l は $k \neq l$ で互いに独立である.)

N : 周波数領域 (正領域) における分割数.

ii) インプット・データ

- 時間刻み Δt : 入力 $f(t)$ の振動数の上限値が 10 Hz であるから, $\Delta t \leqq \frac{1}{2 \times 10} = 0.05$ (sec) でなければ, シミュレートされた波が高い振動数成分を含まなくなる。ここでは $\Delta t = 0.02$ (sec) とした。

- 継続時間 T : $f(t)$ のサンプル関数に周期性が表われないように, $T \leqq 4\pi / \Delta\omega$ でなければならない。今, 周波数領域における分割数 $N = 200$ にとれば, $\Delta\omega = 20\pi/200 = \pi/10$, $T \leqq 40$ (sec) となる。ここでは, $T = 20$ (sec) とした.

インプットデータをまとめれば次のようになる。

・パワースペクトル　$S(\omega) = S_0 = 0.07958$ (cm^2/sec^3)

$\omega_L = 0$

$\omega_u = 62.832$ (rad/sec.)

・周波数領域の分割数　$N = 200$

・時間刻み　$\Delta t = 0.02$ (sec)

・継続時間　$T = 20$ (sec)

以上の手順によってシミュレートされた $\ddot{y}(t) = -f(t)$ のサンプル関数を Fig.1 に示す。

Ⅲ) 応答の理論解.

入力 $f(t)$ がホワイトノイズの場合の非定常変位応答 $x(t)$，非定常速度応答の自己相関関数は，

$$R_x(t_1,t_2)=R_x(\tau)-\frac{\pi S_0}{2\beta\omega_0^3}e^{-\beta\omega_0(t_1+t_2)}\left\{\cos\overline{\omega}_0(t_1-t_2)+\frac{\beta\omega_0}{\overline{\omega}_0}\sin\overline{\omega}_0(t_1+t_2)+2\left(\frac{\beta\omega_0}{\overline{\omega}_0}\right)^2\sin\overline{\omega}_0t_1\sin\overline{\omega}_0t_2\right\}\quad;\ t_1\geqq t_2,\ \tau=t_1-t_2$$

P109 (4-58)

$$R_x(\tau)=\frac{\pi S_0}{2\beta\omega_0^3}e^{-\beta\omega_0\tau}\left\{\cos\overline{\omega}_0\tau+\frac{\beta\omega_0}{\overline{\omega}_0}\sin\overline{\omega}_0\tau\right\}\quad;\ \tau\geqq0$$

(4-45)

$$R_{\dot{x}}(t_1,t_2)=R_{\dot{x}}(\tau)-\frac{\pi S_0}{2\beta\omega_0}e^{-\beta\omega_0(t_1+t_2)}\cdot\left\{\cos\overline{\omega}_0(t_1-t_2)-\frac{\beta\omega_0}{\overline{\omega}_0}\sin\overline{\omega}_0(t_1+t_2)+2\left(\frac{\beta\omega_0}{\overline{\omega}_0}\right)^2\sin\overline{\omega}_0t_1\sin\overline{\omega}_0t_2\right\}\quad;\ t_1\geqq t_2$$

(4-61)

$$R_{\dot{x}}(\tau)=\frac{\pi S_0}{2\beta\omega_0}e^{-\beta\omega_0\tau}\left\{\cos\overline{\omega}_0\tau-\frac{\beta\omega_0}{\overline{\omega}_0}\sin\omega_0\tau\right\}\quad;\ \tau\geqq0$$

(4-47)

である．ここで $t_1=t_2=t$ とおけば，$x(t)$，$\dot{x}(t)$ の分散値，すなわち平均値0における自乗平均値で求められる．

$$\sigma_x^2(t)=\frac{\pi S_0}{2\beta\omega_0^3}\left[1-e^{-2\beta\omega_0t}\left\{1+\frac{\beta\omega_0}{\overline{\omega}_0}\sin2\overline{\omega}_0t+2\left(\frac{\beta\omega_0}{\overline{\omega}_0}\right)^2\sin^2\overline{\omega}_0t\right\}\right].$$

(4-59)

$$\sigma_{\dot{x}}^2(t)=\frac{\pi S_0}{2\beta\omega_0}\left[1-e^{-2\beta\omega_0t}\left\{1-\frac{\beta\omega_0}{\overline{\omega}_0}\sin2\overline{\omega}_0t+2\left(\frac{\beta\omega_0}{\overline{\omega}_0}\right)^2\sin^2\overline{\omega}_0t\right\}\right].$$

(4-62)

上式によって求められた，$\sigma_x^2(t)$，$\sigma_{\dot{x}}^2(t)$ を Fig.2，Fig.3 に示す。

(IV) 応答の数値シミュレーション解.

ここでは,代表的な手法として,線形加速度法及び合積計算法を用いて,入力の各サンプル毎に応答計算を行ない.各時間における変位応答及び速度応答の自乗平均値をもとめた.ただし,数値計算に際しては,平均値を0に補正した.

i) 線形加速度法による応答計算.

質点の相対加速度 $\ddot{x}$ が時間 Δt において線形変化するものとしてテーラーの展開公式を用いることにより,応答 $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ は次の式からもとまる。

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = -\frac{1}{R}\left(\ddot{y}_{t+\Delta t} + 2\beta\omega_0 E_t + \omega^2 F_t\right)$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = E_t + \frac{\Delta t}{2}\ddot{x}_{t+\Delta t}$$

$$x_{t+\Delta t} = F_t + \frac{(\Delta t)^2}{6}\ddot{x}_{t+\Delta t}$$

$$R = 1 + \beta\omega_0\cdot\Delta t + \omega_0^2\frac{(\Delta t)^2}{6}$$

$$E_t = \dot{x}_t + \frac{\Delta t}{2}\ddot{x}_t$$

$$F_t = x_t + (\Delta t)\cdot\dot{x}_t + \frac{(\Delta t)^2}{3}\ddot{x}_t$$

ただし. $x_{t=0} = 0$

$$\dot{x}_{t=0} = -\ddot{y}_{t=0}\cdot\Delta t$$

$$\ddot{x}_{t=0} = \ddot{y}_{t=0}\,(2\beta\omega_0\Delta t - 1)$$

変位応答 $x(t)$, 速度応答 $\dot{x}(t)$, 加速度応答のサンプルを Fig. 4 ~ Fig. 6 に，またサンプル数 50 をとった場合の $\sigma_{\dot{x}}^2(t)$ 及び $\sigma_{\ddot{x}}^2(t)$ を Fig. 7, Fig. 8 に示す。

ii) 合積計算法による応答計算.

$\ddot{y}(t)$ の地震加速度を受ける1自由度の変位応答は，次式によってもとまる. （ただし $f(t)=-\ddot{y}(t)$ ）

$$x(t)=\int_0^t h(t-\xi)\cdot f(\xi)\,d\xi$$

$$h(t)=\frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\bar{\omega}_0}\sin\bar{\omega}_0 t \quad ; \; t\geqq 0$$
$$\quad = 0 \quad ; \; t<0$$

同様に変位応答，加速度応答は次のようにもとまる.

$$\dot{x}(t)=\int_0^t \dot{h}(t-\xi)\cdot f(\xi)\,d\xi$$
$$\ddot{x}(t)=\int_0^t \ddot{h}(t-\xi)\cdot f(\xi)\,d\xi.$$

$$\dot{h}(t)=e^{-\beta\omega_0 t}\left[\cos\bar{\omega}_0 t-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\sin\bar{\omega}_0 t\right]$$
$$\ddot{h}(t)=\bar{\omega}_0 e^{-\beta\omega_0 t}\left[1-\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\sin\bar{\omega}_0 t+\frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\cos\bar{\omega}_0 t\right]$$

$$\dot{h}(t)=0,\quad \ddot{h}(t)=0 \quad ; \; t<0$$

入力$f(t)$が時间刻みΔtのN個の値で与えられ、$h(t)$, $\dot{h}(t)$も時间刻みΔtごとに計算してあるものとすれば、変位応答，速度応答の時刻歴は，

$$
\begin{aligned}
& t-\tau \\
& = m\Delta t - j\Delta t \\
& = (m-j)\Delta t
\end{aligned}
$$

$$x(m\cdot\Delta t) = \sum_{j=0}^{m} f(j\Delta t)\cdot h[(m-j)\cdot\Delta t]\,\Delta t \qquad m=0,1,2,\cdots,N-1$$

$$\dot{x}(m\cdot\Delta t) = \sum_{j=0}^{m} f(j\Delta t)\cdot \dot{h}[(m-j)\cdot\Delta t]\cdot\Delta t \qquad m=0,1,2,\cdots,N-1$$

で求められる。このようにして$x(t)$, $\dot{x}(t)$の時刻歴が求まれば，加速度応答の時刻歴は，振動方程式により，

$$\ddot{x}(t) = f(t) - 2\beta\omega_0\dot{x}(t) - \omega_0^2 x(t)$$

として求めることができる。この方法によって求めた変位応答，速度応答，加速度応答のサンプル関数をFig. 9 ～Fig. 11 に，またサンプル数50をとった場合の$\sigma_x^2(t)$及び$\sigma_{\dot{x}}^2(t)$をFig. 14, Fig. 15 に示す。
また単位衝撃応答関数$h(t)$, $\dot{h}(t)$をFig 12, Fig 13に示す。

(VI) 動的信頼性の理論解.

入力が広帯域定常確率ガウス過程で，初期条件 $x(0)=\dot{x}(0)=0$ での1自由度系過渡応答 $x(t)$ の動的信頼性は次式によって表わされる.

$$P_{sz}(\lambda,-\lambda)=\exp\left[-\int_0^T\frac{\omega_z(t)}{\pi}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2\alpha_0(t)}\right\}dt\right] \quad (7-89)$$

ここで.　λ : 基準レベル

T : 信頼性の計算をする時間間隔

α_0 : スペクトル定数 $=\sqrt{\overline{x^2}(t)}$

ω_z : スペクトル定数 $=\sqrt{\dot{x}(t)}/\sqrt{x(t)}$

上式によって求められる. $\lambda=0.05$ における動的信頼性（両側限界）を Fig. 16 に示す.

(VII) 動的信頼性の数値シミュレーション解.

応答 $x(t)$ のサンプル数を N_s とすれば，時間 $[0, T]$ において $|x(t)|\leqq\lambda$ であったサンプル数を n とすれば動的信頼性は.

$$P_{sz}(\lambda,-\lambda)=\frac{n}{N_s}$$

により求められる. 線形加速度法及び合積計算法によって求められた応答 $x(t)$ について，上述の方法によって求められた動的信頼性を Fig. 16 ~~実線~~ に示す.

(VIII) 考察.

i) システムについて.

- この計算例では.減衰定数 β を 0.001 と非常に小さい値に設定しているため.減衰性のかなり小さい特殊な場合を扱っており.主として過渡的な非定常応答を着目点とした。
- 固有振動数 ω_0 は約 4.5 Hz すなわち固有周期 0.2 秒程度であり.非常に剛体的なシステムである。

ii) 入力について.

- 入力は有帯域ホワイトノイズとした。振動数レベルを ±10 Hz としているため.Fig-1 のようなほぼホワイトノイズに近い入力波を得ることができた。
- 入力を設定する際に. $S_0 = 0.07958$, $\omega_L = 0$, $\omega_u = 62.832$ としたため入力の自乗平均値は 1.0 である。

iii) 応答解析について.

- Fig 2・3 に不規則振動理論による変位応答及び速度応答の自乗平均値を示した。上述のように β を小さく設定したため、20 秒経過してもまだ定常状態には至っていないが,若干の傾向は出ているように思われる.
- 解析方法として.線形加速度法及び合積計算法を用いた場合を比較検討した。Fig 4 ~ Fig 6 及び Fig 9 ~ Fig 11 は各々の計算法によって求めた変位応答,速度応答.加速度応答のサンプル関数である。初期状態から約 10 秒までは,ほぼ類似した結果が得られているが、その後,同一の入力によるにもかかわらず異なる傾向を示した。この原因は.システムの固有周期を非常に短かく設定したため.数値計算における誤差が生じたものと思われる。

・Fig12, Fig13 は、単位衝撃応答関数である。ここでも、減衰性が非常に小さいこと、また固有周期が短かいことが表われている。

・Fig8・Fig9 は、線形加速度法によって求めた応答（変位及び速度）の自乗平均値を理論解と合せて示したものである。理論解とよく近似した結果が得られたことがわかる。また、合せて定常状態に至った際の理論的自乗平均値のレベルを示したが、減衰性の非常に小さいこと、言いかえれば定常状態に安定するまでにかなりの時間を要することが明らかとなっている。

・Fig14・Fig15 は同じく合積計算法を用いた結果である。若干の相違はあるが、ほぼ線形加速度法による解と一致している。前述のように、応答のサンプル関数に若干の相違が見られたが、各サンプルにおける計算の数値誤差が自乗平均値を求める段階で相殺されたことにより、よく一致した結果が得られたものと思われる。

vi) 動的信頼性について．

Fig16 に、線形加速度法及び合積計算法を用いて応答解析を行なった場合の動的信頼性を理論解と合せて示した。理論解とシミュレーション解とではかなり異なった結果となった。これは、シミュレーションにおいてサンプル数を計算時間の都合上少なくとった（50サンプル）ためと思われる。

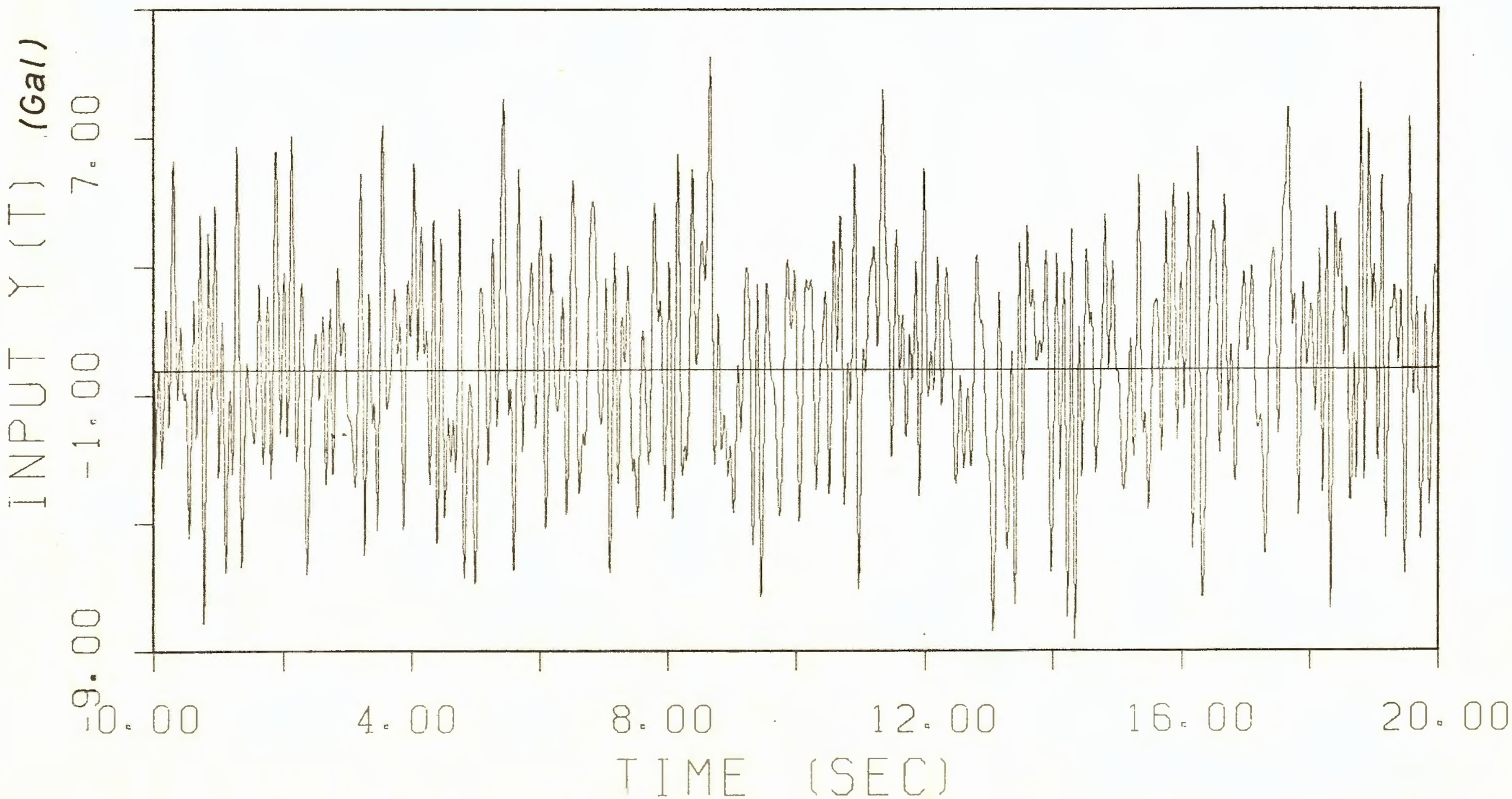
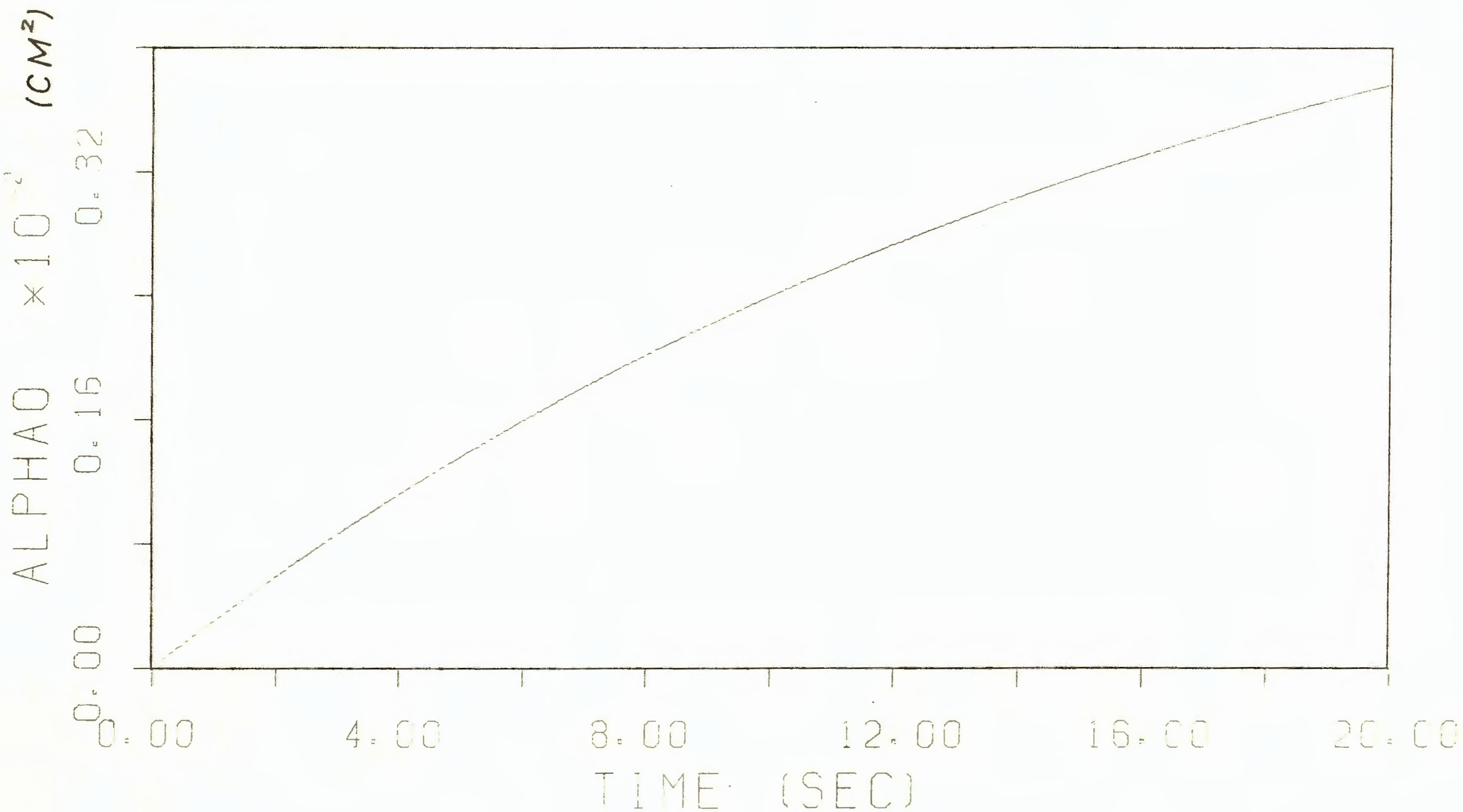


Fig-1 SAMPLE ØF INPUT Y



ALPHAO $\times 10^{-2}$ (CM²)
0.00
0.16
0.32
0.00
4.00
8.00
12.00
16.00
20.00
TIME (SEC)

Fig-2 - - - ALPHAO - - -

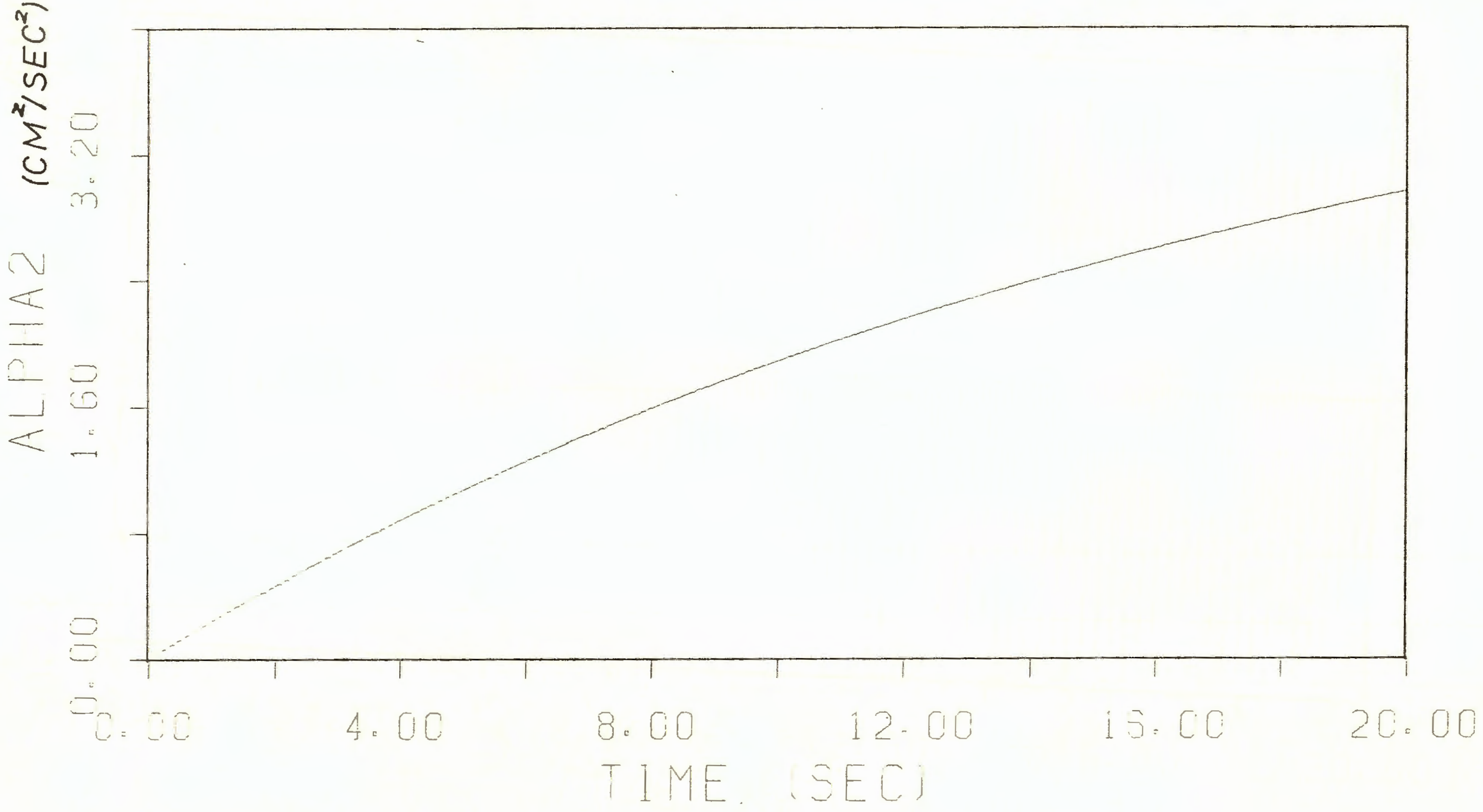

ALPHA2 (CM²/SEC²)
0.00
1.60
3.20
0.00
4.00
8.00
12.00
16.00
20.00
TIME (SEC)

Fig-3 *** ALPHA2 ***

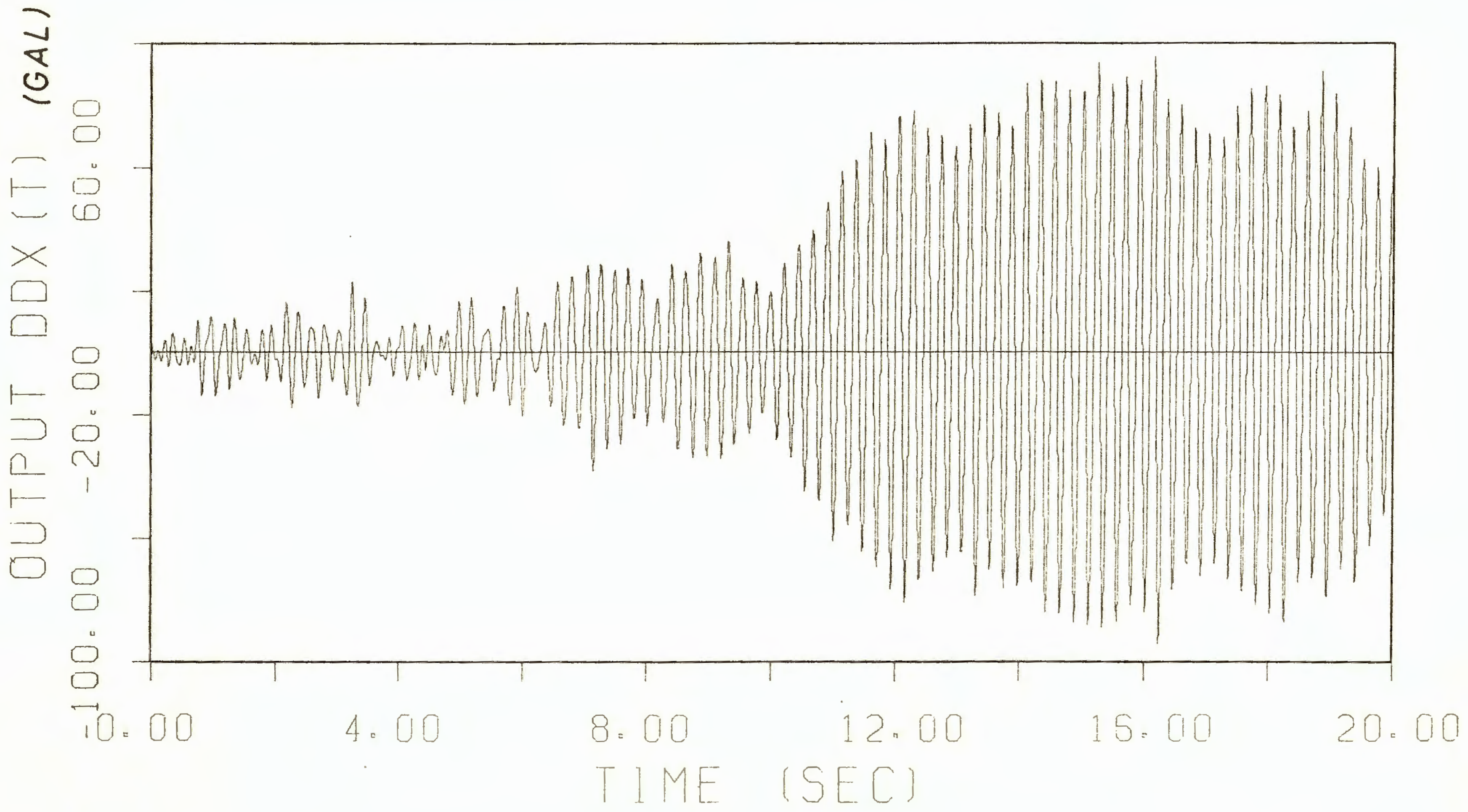


Fig-6 SAMPLE OF OUTPUT DDX

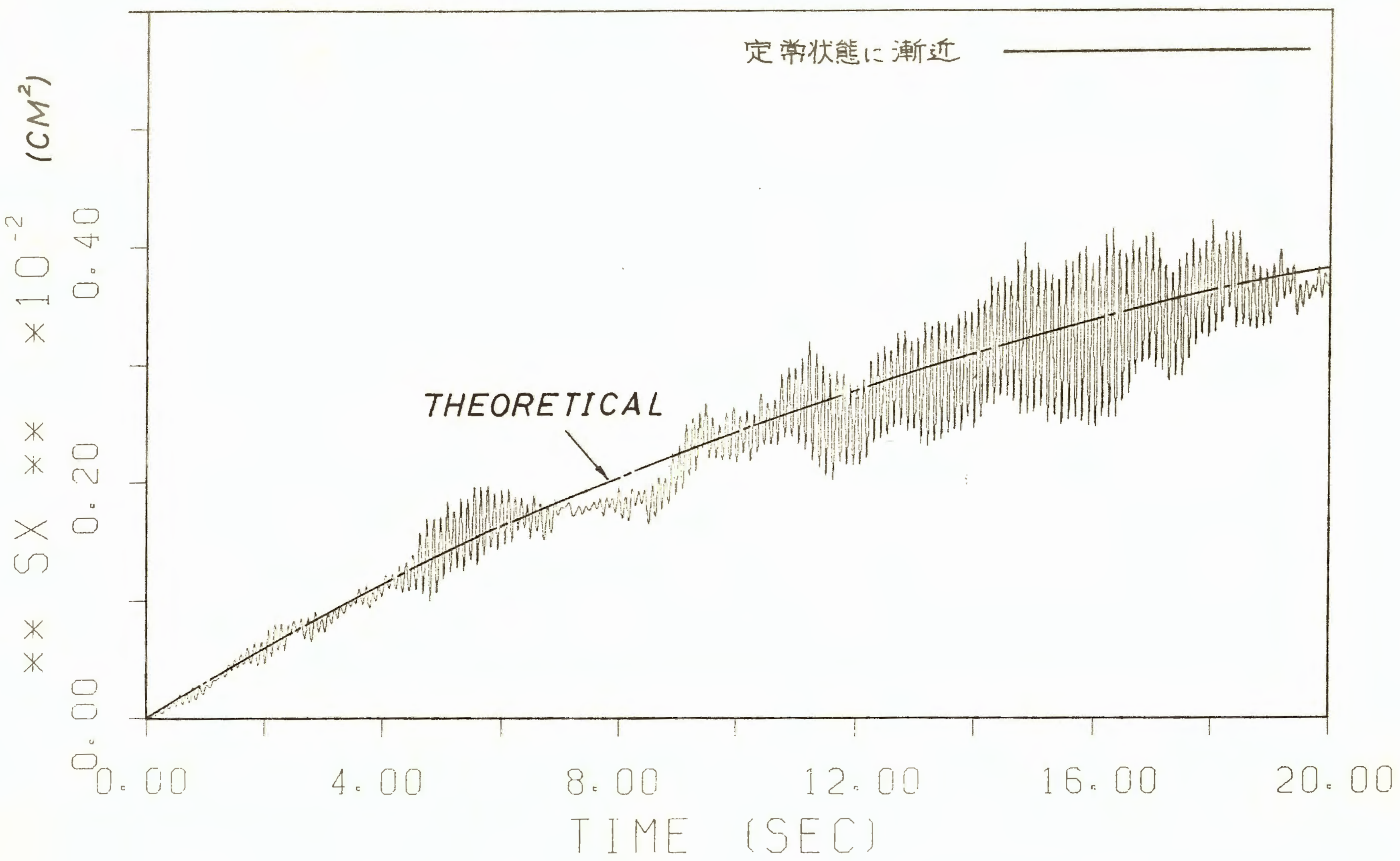


Fig-7 MEAN SQUARE VALUE SX

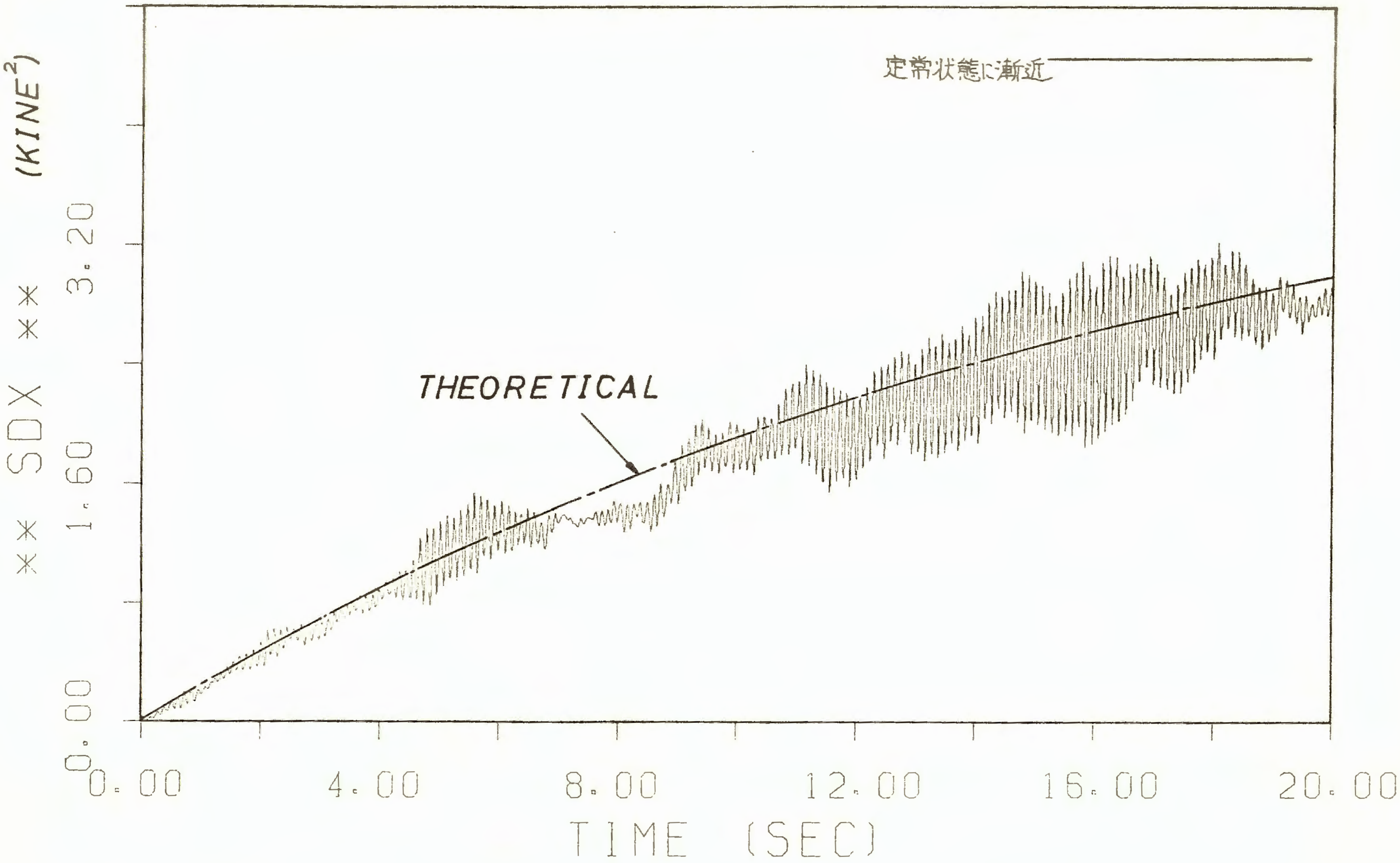


Fig-8 MEAN SQUARE VALUE SDX

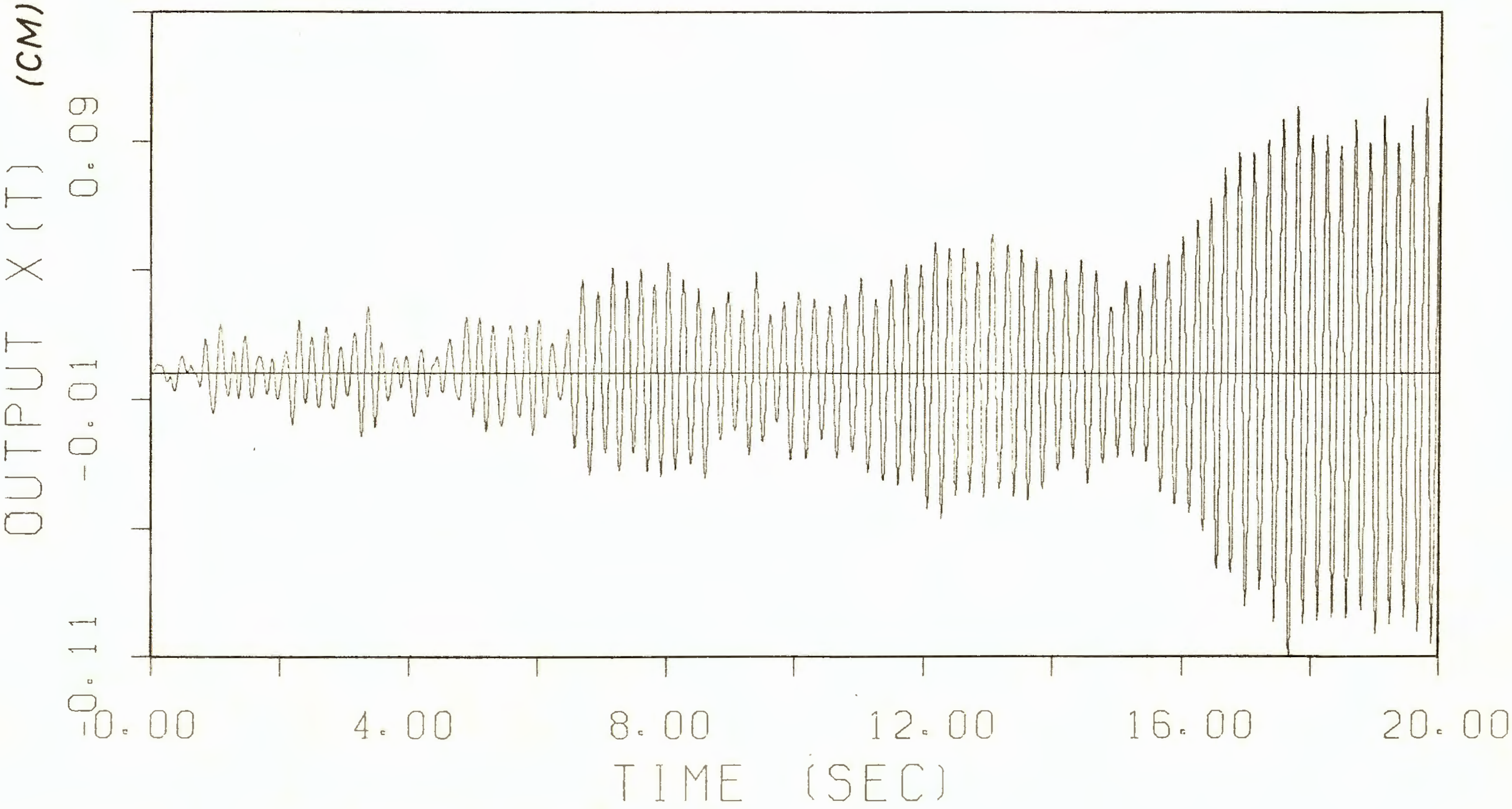


Fig-9 SAMPLE OF OUTPUT X

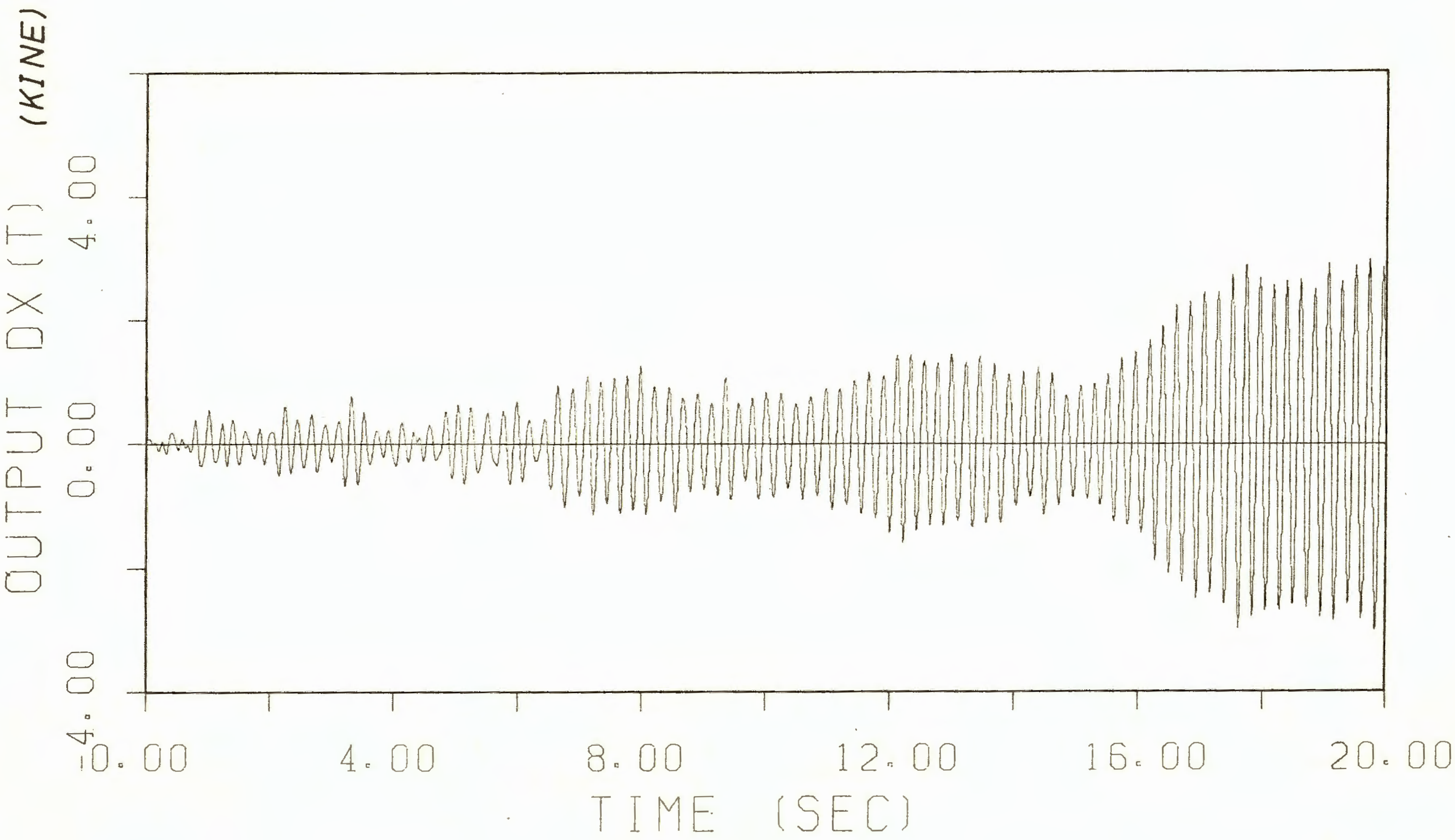


Fig-10 SAMPLE OF OUTPUT DX

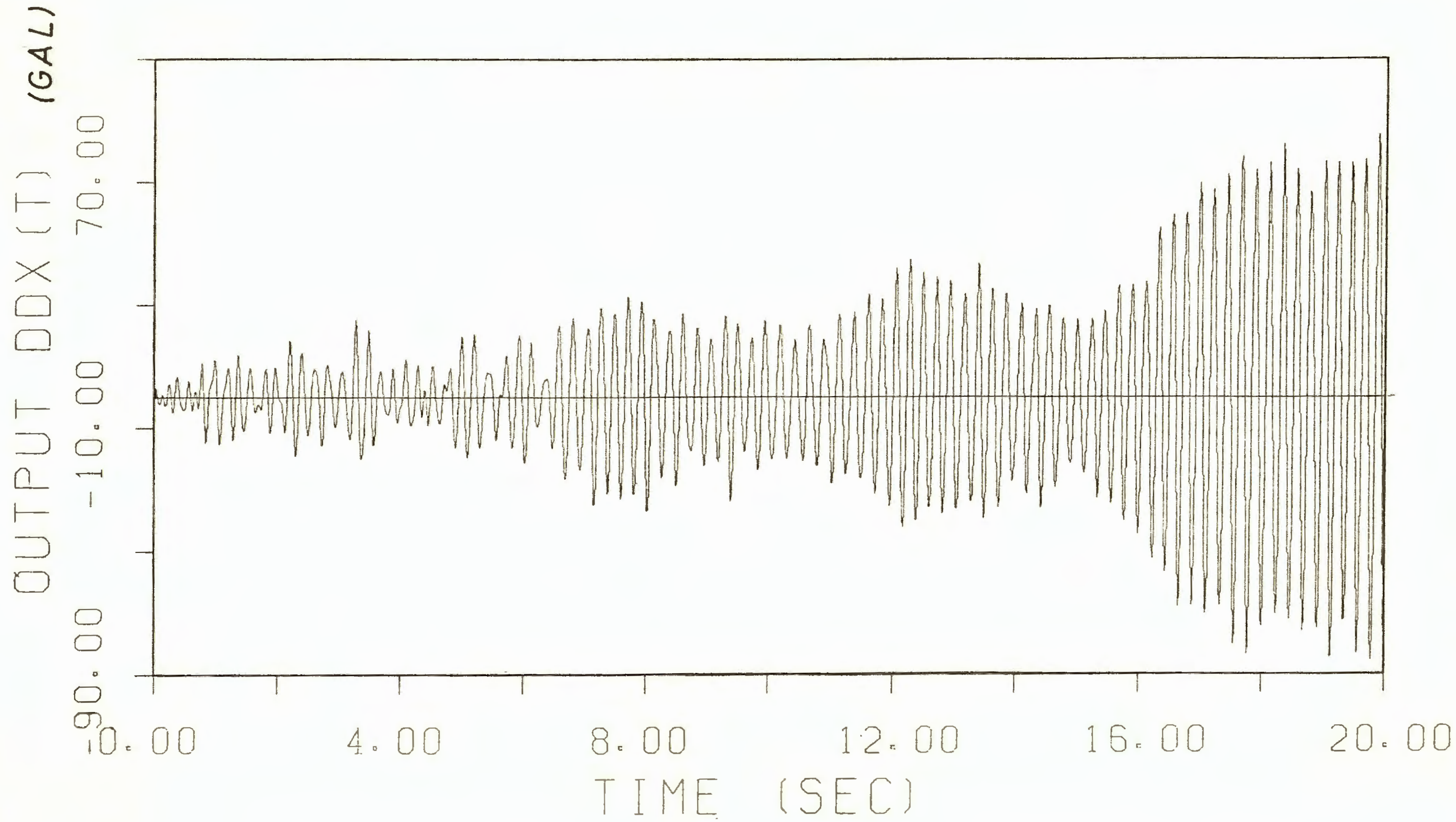
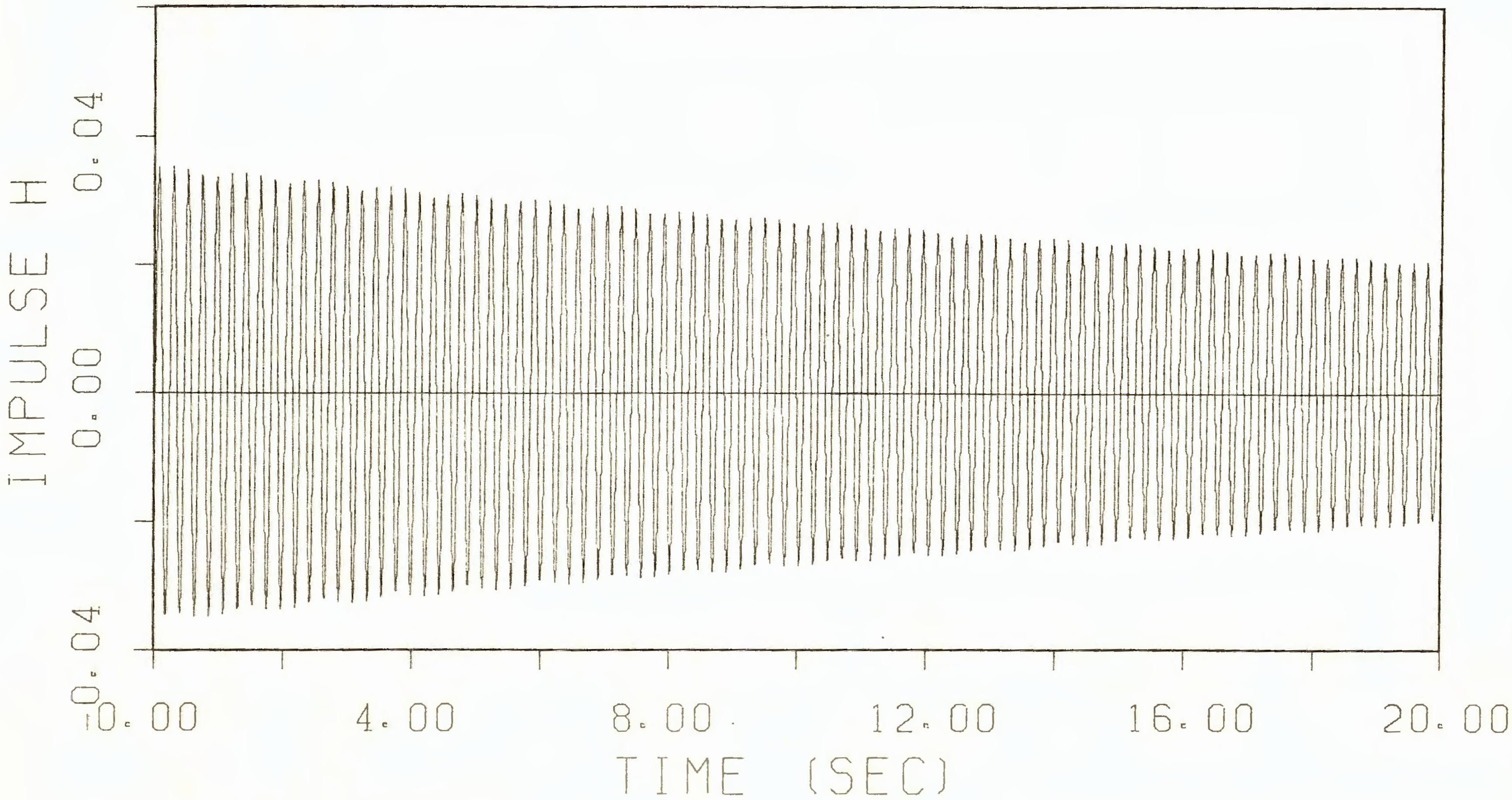


Fig-11 SAMPLE OF OUTPUT DDX



h(t)
ḣ(t)

Fig-12 IMPULSE H

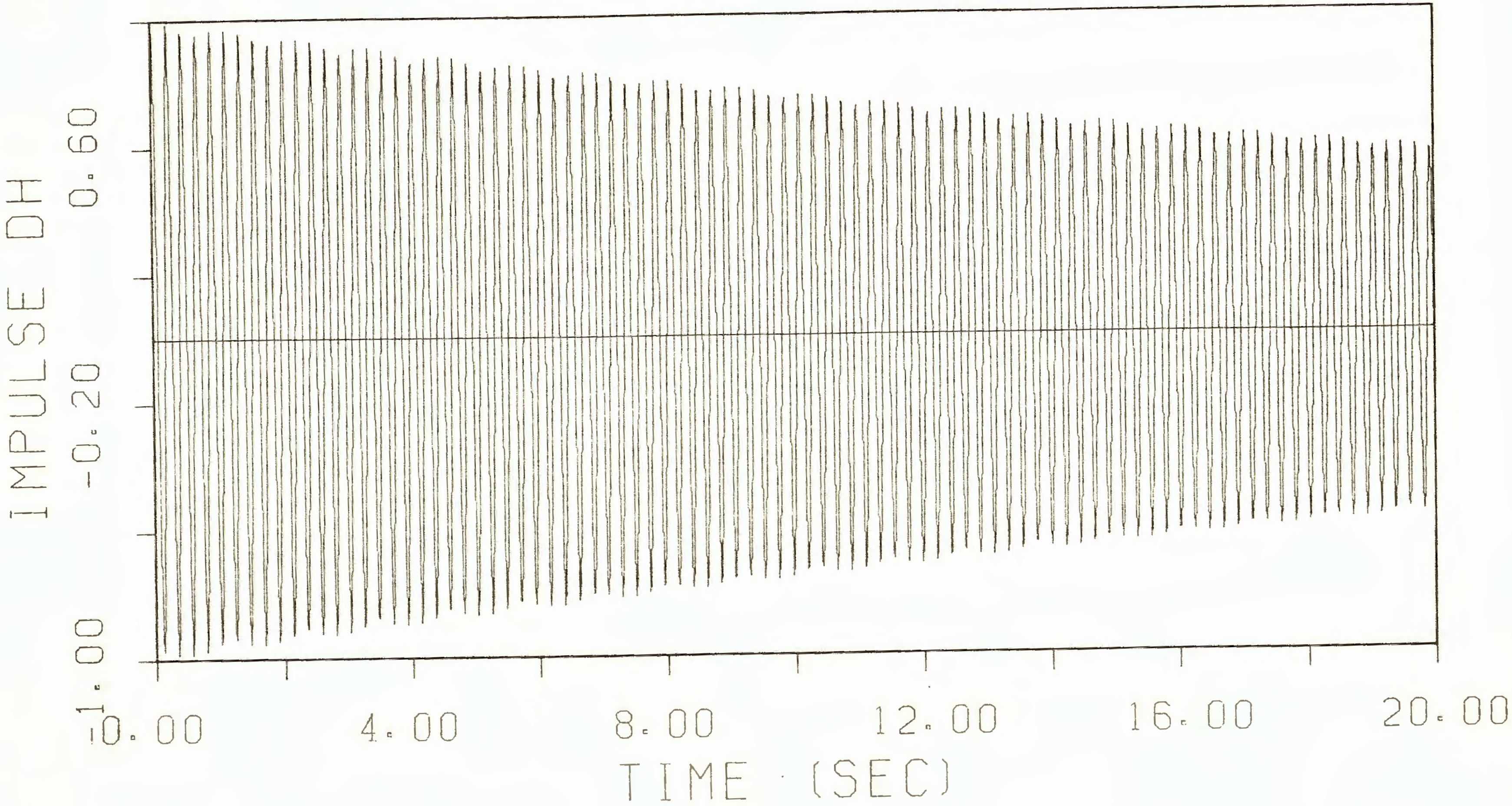


Fig-13 IMPULSE DH

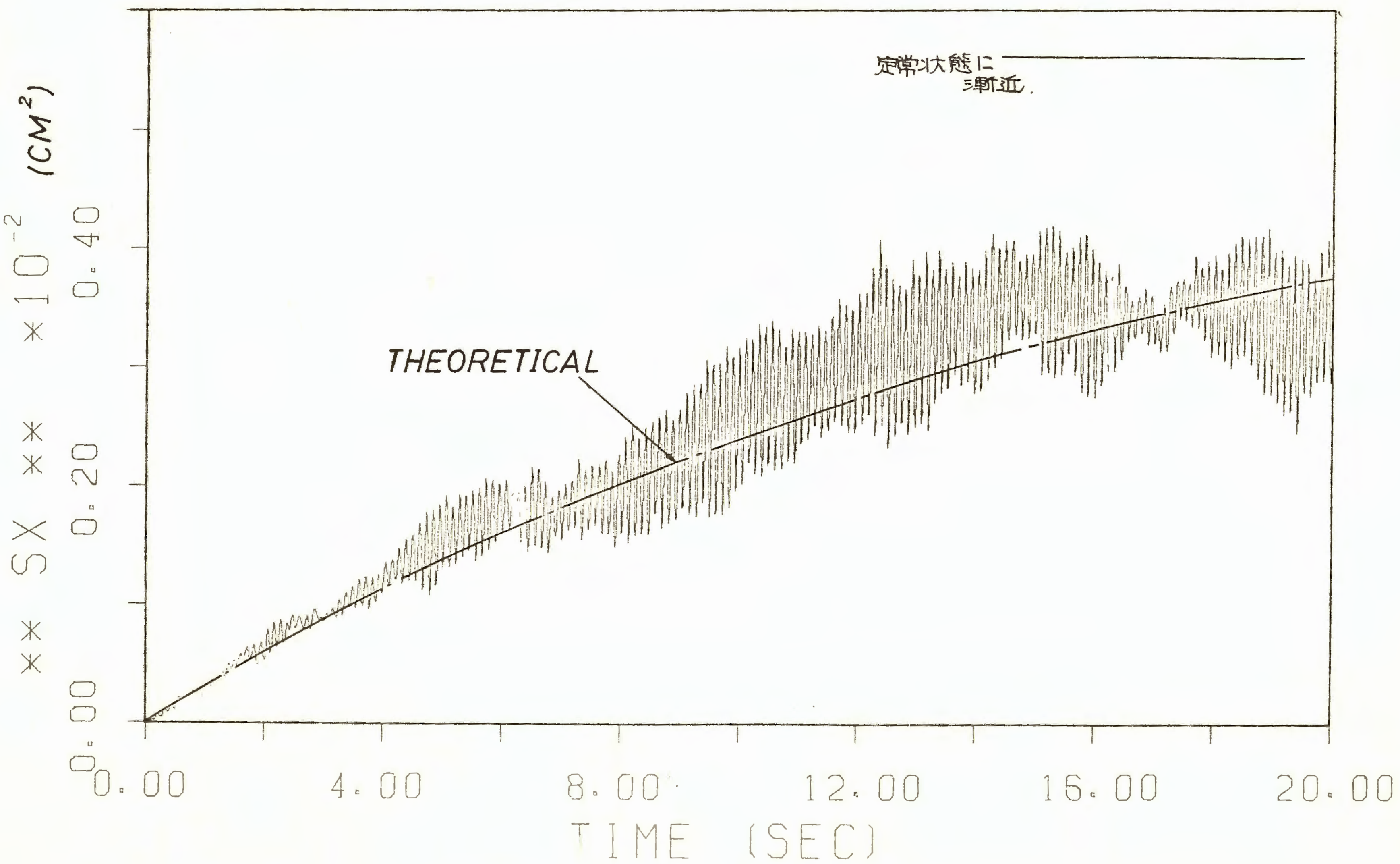


Fig-14 MEAN SQUARE VALUE SX

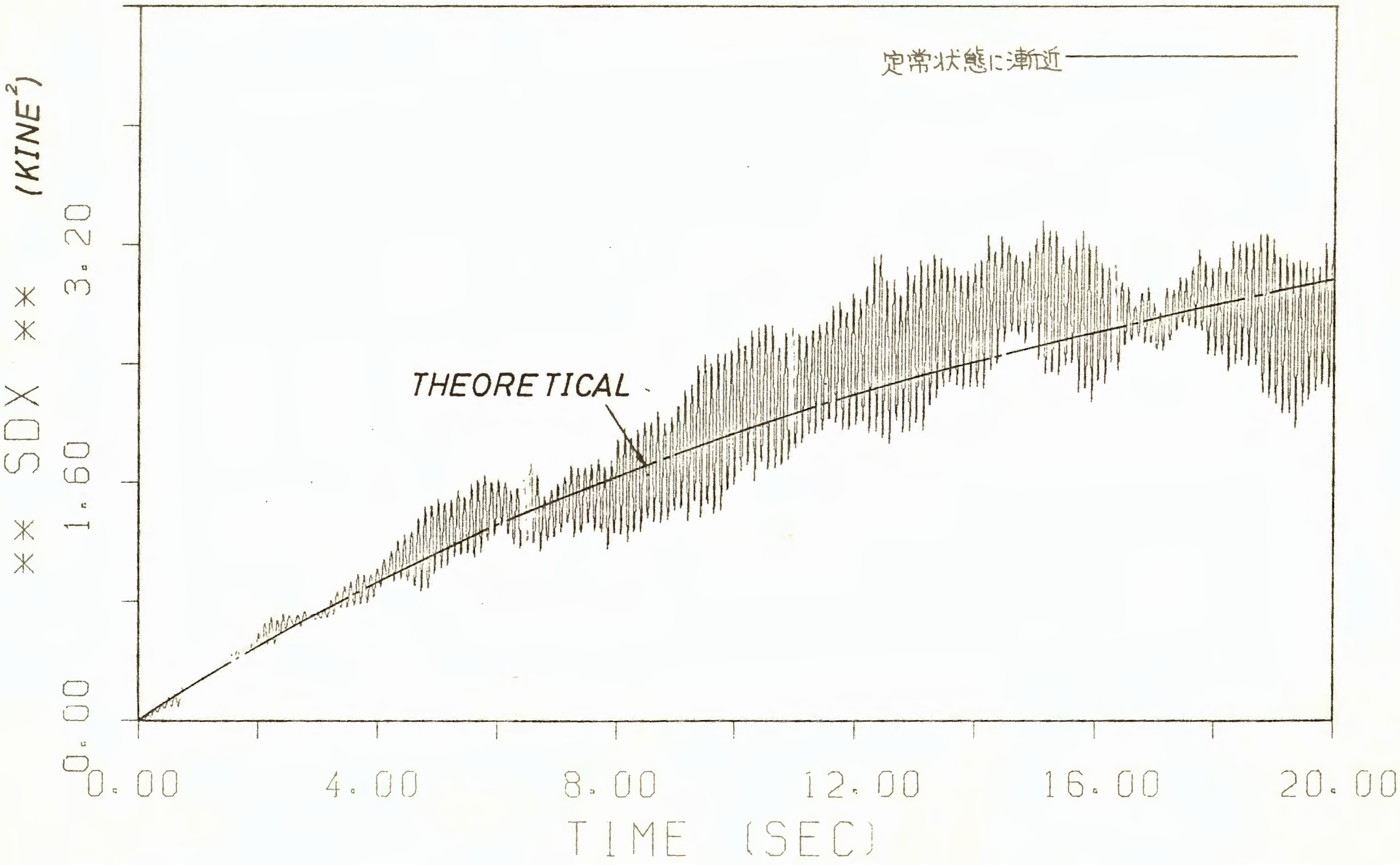


Fig-15 MEAN SQUARE VALUE SDX

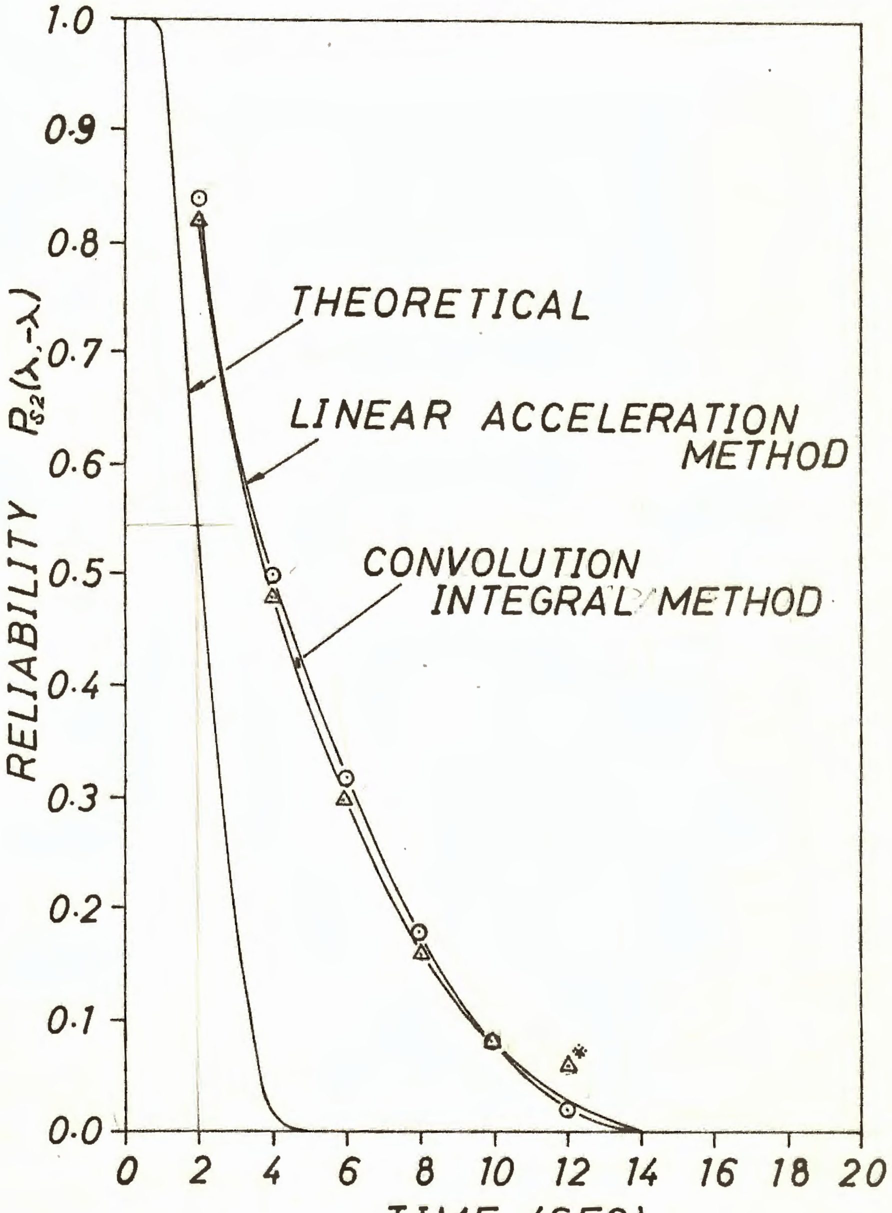


Fig-16 DYNAMIC RELIABILITY

入力.

$x_s(t)$ のパワースペクトル.

$$S_s(\omega) = A_1 e^{-\omega^2 c^2} + A_2 \omega^2 e^{-4\omega^2 c^2}$$

(A_1, A_2, C^2 一定)

傾向関数.

$$g(t) = (a_1 + a_2 t) e^{-pt} \qquad (a_1, a_2, p = 一定)$$

$$x(t) = g(t) \cdot x_s(t)$$

初期条件 $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

$$y(t) = \int_0^t h(t-\xi) \cdot x(\xi) d\xi .$$

$$h(t) = \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega}_0} \sin \overline{\omega}_0 t \quad ; t \geqq 0 .$$

$$= 0 \quad ; t < 0 .$$

$$\overline{\omega}_0 = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2} \quad ; 0 \leqq \beta < 1$$

$$E[y(t)] = \int_0^t h(t-\xi)\, E[x(\xi)]\, d\xi$$

$$I(\omega, t) = \int_0^t h(t-\xi)\, g(\xi)\, e^{i\omega\xi}\, d\xi$$

$$h(t-\xi) = \frac{e^{-\beta\omega_0(t-\xi)}}{\overline{\omega}_0} \sin\overline{\omega}_0(t-\xi) = \frac{e^{-\beta\omega_0 t}\, e^{\beta\omega_0\xi}}{\overline{\omega}_0} \sin\overline{\omega}_0(t-\xi)$$

$$g(\xi) = (a_1 + a_2\xi)\, e^{-p\xi}$$

$$I(\omega, t) = \int_0^t \frac{e^{-\beta\omega_0 t}\, e^{\beta\omega_0\xi}}{\overline{\omega}_0} \sin\overline{\omega}_0(t-\xi)\cdot(a_1 + a_2\xi)\, e^{-p\xi} \cdot e^{i\omega\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega}_0} \int_0^t e^{(\beta\omega_0 - p + i\omega)\xi} (a_1 + a_2\xi) \sin\overline{\omega}_0(t-\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega}_0} \int_0^t e^{x\xi} (a_1 + a_2\xi)(\sin\overline{\omega}_0 t \cos\overline{\omega}_0\xi - \cos\overline{\omega}_0 t \sin\overline{\omega}_0\xi)\, d\xi$$

$$(x = \beta\omega_0 - p + i\omega)$$

$$= \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega}_0} \left[\sin\overline{\omega}_0 t \int_0^t e^{x\xi} (a_1 + a_2\xi) \cos\overline{\omega}_0\xi\, d\xi - \cos\overline{\omega}_0 t \int_0^t e^{x\xi} (a_1 + a_2\xi) \sin\overline{\omega}_0\xi\, d\xi \right]$$

$$= \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega_0}} \sin\overline{\omega_0}t \left[a_1 \int_0^t e^{x\xi} \cos\overline{\omega_0}\xi \, d\xi + a_2 \int_0^t \xi e^{x\xi} \cos\overline{\omega_0}\xi \, d\xi \right.$$

$$\left. - \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega_0}} \cos\overline{\omega_0}t \left[a_1 \int_0^t e^{x\xi} \sin\overline{\omega_0}\xi \, d\xi + a_2 \int_0^t \xi e^{x\xi} \sin\overline{\omega_0}\xi \, d\xi \right] \right]$$

i) $\int_0^t e^{x\xi} \cos\overline{\omega_0}\xi \, d\xi$ ✓

ii) $\int_0^t \xi e^{x\xi} \cos\overline{\omega_0}\xi \, d\xi$

iii) $\int_0^t e^{x\xi} \sin\overline{\omega_0}\xi \, d\xi$ ✓

iv) $\int_0^t \xi e^{x\xi} \sin\overline{\omega_0}\xi \, d\xi$

i) $\int_0^t e^{x\xi} \cos\overline{\omega_0}\xi \, d\xi$

$$= \left[\frac{e^{x\xi}}{x^2 + \overline{\omega_0}^2} \left(x \cos\overline{\omega_0}\xi + \overline{\omega_0} \sin\overline{\omega_0}\xi \right) \right]_0^t$$

$$= \frac{1}{x^2 + \overline{\omega_0}^2} \left[e^{xt} \left(x \cos\overline{\omega_0}t + \overline{\omega_0} \sin\overline{\omega_0}t \right) - x \right]$$

ii) $\int_0^t \xi e^{x\xi} \cos\overline{\omega_0}\xi \, d\xi$

$$I_c[n] = \int \xi^n e^{x\xi} \cos\overline{\omega_0}\xi \, d\xi$$

$$= \frac{\xi^n e^{x\xi}}{x^2 + \overline{\omega_0}^2} \left(x \cos\overline{\omega_0}\xi + \overline{\omega_0} \sin\overline{\omega_0}\xi \right)$$

$$- \frac{n}{x^2 + \overline{\omega_0}^2} \left\{ x I_c[n-1] + \overline{\omega_0} I_s[n-1] \right\}$$

今 $n=1$ である。

$$I_c[n-1] = I_c[0] = \int e^{x\xi} \cos \bar{\omega}_0 \xi \, d\xi$$

$$= \frac{e^{x\xi}}{x^2 + \bar{\omega}_0^2} \left[x \cos \bar{\omega}_0 \xi + \bar{\omega}_0 \sin \bar{\omega}_0 \xi \right]$$

$$I_s[n-1] = I_s[0] = \int e^{x\xi} \sin \bar{\omega}_0 \xi \, d\xi$$

$$= \frac{e^{x\xi}}{x^2 + \bar{\omega}_0^2} \left[x \sin \bar{\omega}_0 \xi - \bar{\omega}_0 \cos \bar{\omega}_0 \xi \right]$$

$$\therefore \int_0^t \xi e^{x\xi} \cos \bar{\omega}_0 \xi \, d\xi$$

$$= \Bigg[\frac{\xi e^{x\xi}}{x^2 + \bar{\omega}_0^2} (x \cos \bar{\omega}_0 \xi + \bar{\omega}_0 \sin \bar{\omega}_0 \xi)$$

$$- \frac{1}{x^2 + \bar{\omega}_0^2} \left\{ \frac{x e^{x\xi}}{x^2 + \bar{\omega}_0^2} (x \cos \bar{\omega}_0 \xi + \bar{\omega}_0 \sin \bar{\omega}_0 \xi) \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{\omega}_0 e^{x\xi}}{x^2 + \bar{\omega}_0^2} (x \sin \bar{\omega}_0 \xi - \bar{\omega}_0 \cos \bar{\omega}_0 \xi) \right\} \Bigg]_0^t$$

$$= \frac{t e^{xt}}{x^2 + \bar{\omega}_0^2} (x \cos \bar{\omega}_0 t + \bar{\omega}_0 \sin \bar{\omega}_0 t)$$

$$- \frac{e^{xt}}{(x^2 + \bar{\omega}_0^2)^2} \left\{ x (x \cos \bar{\omega}_0 t + \bar{\omega}_0 \sin \bar{\omega}_0 t) \right.$$

$$\left. + \bar{\omega}_0 (x \sin \bar{\omega}_0 t - \bar{\omega}_0 \cos \bar{\omega}_0 t) \right\}$$

$$- \cancel{x^2 + \bar{\omega}_0^2}$$

$$+ \frac{1}{(x^2 + \bar{\omega}_0^2)^2} \left\{ x^2 - \bar{\omega}_0^2 \right\}$$

iii) $\displaystyle\int_0^t e^{x\xi}\sin\bar{\omega}_0\xi\,d\xi$

$$= \left[\frac{e^{x\xi}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left[x\sin\bar{\omega}_0\xi - \bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0\xi\right]\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left[e^{xt}\left(x\sin\bar{\omega}_0 t - \bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right) + x\right]$$

iv) $\displaystyle\int_0^t \xi e^{x\xi}\sin\bar{\omega}_0\xi\,d\xi$.

$$\int e^{x\xi}\sin\bar{\omega}_0\xi\,d\xi$$

$$= \frac{e^{x\xi}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left[x\sin\bar{\omega}_0\xi - \bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0\xi\right]$$

$$\int e^{x\xi}\cos\bar{\omega}_0\xi\,d\xi$$

$$= \frac{e^{x\xi}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left[x\cos\bar{\omega}_0\xi + \bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0\xi\right]$$

$$\therefore \int_0^t \xi e^{x\xi}\sin\bar{\omega}_0\xi\,d\xi$$

$$= \Bigg[\frac{\xi e^{x\xi}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\sin\bar{\omega}_0\xi - \bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0\xi\right)$$

$$- \frac{e^{x\xi}}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}\Big\{x\left(x\sin\bar{\omega}_0\xi - \bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0\xi\right)$$

$$- \bar{\omega}_0\left(x\cos\bar{\omega}_0\xi + \bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0\xi\right)\Big\}\Bigg]_0^t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{t\, e^{xt}}{x^2+\overline{\omega_0}^2}\left(x \sin \overline{\omega_0} t - \overline{\omega_0} \cos \overline{\omega_0} t\right) \\
&\quad - \frac{e^{xt}}{(x^2+\overline{\omega_0}^2)^2}\Big\{ x\left(x \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\, \overline{\omega_0} t \,\underset{-}{\cancel{+}}\, \overline{\omega_0}\, \underset{\cos}{\cancel{\sin}}\, \overline{\omega_0} t\right) \\
&\qquad\qquad - \overline{\omega_0}\left(x \cos \overline{\omega_0} t + \overline{\omega_0} \sin \overline{\omega_0} t\right)\Big\} \\
&\quad + \frac{1}{(x^2+\overline{\omega_0}^2)^2}\left(-x\overline{\omega_0} - x\overline{\omega_0}\right)
\end{aligned}
$$

$I(\omega, t)$

$$= \frac{a_1 e^{-\beta\omega_0 t}}{\bar{\omega}_0}\sin\bar{\omega}_0 t\left[\frac{e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\cos\bar{\omega}_0 t+\bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0 t\right) - \frac{x}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\right]$$

$$-\frac{a_1 e^{-\beta\omega_0 t}}{\bar{\omega}_0}\cos\bar{\omega}_0 t\left[\frac{e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\sin\bar{\omega}_0 t-\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right) + \frac{x}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\right]$$

$$+\frac{a_2 e^{-\beta\omega_0 t}}{\bar{\omega}_0}\sin\bar{\omega}_0 t\left[\frac{t\,e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\cos\bar{\omega}_0 t+\bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0 t\right)\right.$$

$$-\frac{e^{xt}}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}\left\{x\left(x\cos\bar{\omega}_0 t+\bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0 t\right)\right.$$

$$\left.+\bar{\omega}_0\left(x\sin\bar{\omega}_0 t-\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right)\right\}$$

$$\left.+\frac{1}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}\left(x^2-\bar{\omega}_0^2\right)\right]$$

$$-\frac{a_2 e^{-\beta\omega_0 t}}{\bar{\omega}_0}\cos\bar{\omega}_0 t\left[\frac{t\,e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\sin\bar{\omega}_0 t-\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right)\right.$$

$$-\frac{e^{xt}}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}\left\{x\left(x\sin\bar{\omega}_0 t-\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right)\right.$$

$$\left.-\bar{\omega}_0\left(x\cos\bar{\omega}_0 t+\bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0 t\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}\left(2x\bar{\omega}_0\right)$$

$I(\omega, \lambda)$

$$= \frac{a_1 e^{-\beta\omega_0 t}}{\omega_0} \cdot \frac{e^{xt}}{x^2+\overline{\omega_0}^2} \left[\cancel{x \sin\overline{\omega_0}t \cos\overline{\omega_0}t} + \boxed{\overline{\omega_0} \sin^2\overline{\omega_0}t \right.$$

$$\left. - \cancel{x \sin\overline{\omega_0}t \cos\overline{\omega_0}t} + \overline{\omega_0} \cos^2\overline{\omega_0}t} \right]$$

$\overline{\omega_0}$

$$- \frac{a_1 e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega_0}} \cdot \frac{x}{x^2+\overline{\omega_0}^2} \boxed{(\sin\overline{\omega_0}t + \cos\overline{\omega_0}t)}$$

$\overline{\omega_0}$

$$+ \frac{a_2 e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega_0}} \cdot \frac{te^{xt}}{x^2+\overline{\omega_0}^2} \left[\cancel{x \sin\overline{\omega_0}t \cos\overline{\omega_0}t} + \boxed{\overline{\omega_0} \sin^2\overline{\omega_0}t \right.$$

$$\left. - \cancel{x \sin\overline{\omega_0}t \cos\overline{\omega_0}t} + \overline{\omega_0} \cos^2\overline{\omega_0}t} \right]$$

$$+ \frac{a_2 e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega_0}} \cdot \frac{e^{xt}}{(x^2+\overline{\omega_0}^2)^2} \left[\cancel{x^2 \cos\overline{\omega_0}t \sin\overline{\omega_0}t} \boxed{- x\overline{\omega_0} \cos^2\overline{\omega_0}t \right.$$

$-x\overline{\omega_0}$

$$- \cancel{x^2 \sin\overline{\omega_0}t \cos\overline{\omega_0}t} - x\overline{\omega_0} \sin^2\overline{\omega_0}t}$$

$$\boxed{- x\overline{\omega_0} \cos^2\overline{\omega_0}t} - \cancel{\overline{\omega_0}^2 \cos\overline{\omega_0}t \sin\overline{\omega_0}t}$$

$-x\overline{\omega_0} =$

$$\left. \boxed{- \overline{\omega_0} x \sin^2\overline{\omega_0}t} + \cancel{\overline{\omega_0}^2 \sin\overline{\omega_0}t \cos\overline{\omega_0}t} \right]$$

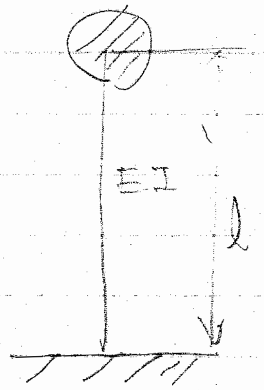
$$+ \frac{a_2 e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega_0}} \frac{1}{(x^2+\overline{\omega_0}^2)^2} \boxed{\left[(x^2 - \overline{\omega_0}^2) \sin\overline{\omega_0}t + 2x\overline{\omega_0} \cos\overline{\omega_0}t \right]}$$

$I(\omega, t)$

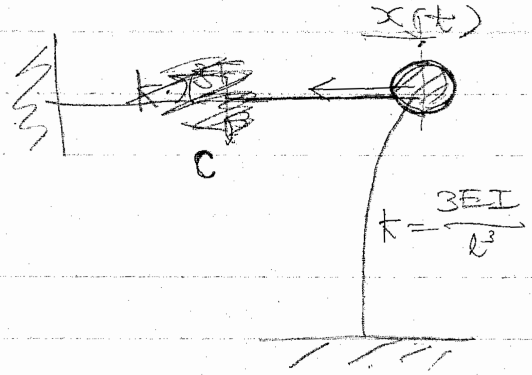
$$= \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega}_0} \cdot \frac{1}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \Big[a_1 \left\{ \overline{\omega}_0 e^{xt} - x(\sin\overline{\omega}_0 t + \cos\overline{\omega}_0 t) \right\}$$

$$+ a_2 \left\{ \overline{\omega}_0 t e^{xt} - 2x\,\overline{\omega}_0 e^{xt} + (x^2-\overline{\omega}_0^2)\sin\overline{\omega}_0 t \right.$$

$$\left. + 2x\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0 t \right\} \cdot \frac{1}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \Big]$$



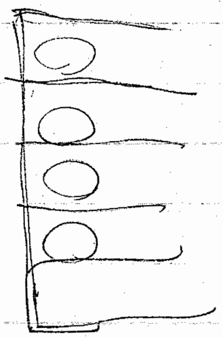
$$k = \frac{3EI}{l^3}$$



$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx - \ddot{y}(t)\,m$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\ddot{y} = f(t)$$



自由振動

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

初期条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = \int_0^t h(t-\xi)\,f(\xi)\,d\xi$$

$\beta\omega_0$

$$\therefore \quad \frac{x^2+\overline{\omega}_0^2}{A}\, I(\omega, t)$$

$$= a_2 \Big[t e^{xt} \Big\{ \sin\overline{\omega}_0 t \,(x \cancel{\cos\overline{\omega}_0 t} + \overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0 t)$$

$$- \cos\overline{\omega}_0 t \,(x \cancel{\sin\overline{\omega}_0 t} - \overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0 t) \Big\} \Big]$$

$$+ a_1 e^{xt} \Big[\sin\overline{\omega}_0 t \,(x \cancel{\cos\overline{\omega}_0 t} + \overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0 t)$$

$$- \cos\overline{\omega}_0 t \,(x \cancel{\sin\overline{\omega}_0 t} - \overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0 t) \Big]$$

$$- a_2 e^{xt} \cdot \frac{1}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \Big[\sin\overline{\omega}_0 t \Big\{ \cancel{(x^2-\overline{\omega}_0^2)} \cos\overline{\omega}_0 t + 2x\overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0 t \Big\}$$

$$- \cos\overline{\omega}_0 t \Big\{ \cancel{(x^2-\overline{\omega}_0^2)} \sin\overline{\omega}_0 t - 2x\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0 t \Big\} \Big]$$

$$- a_1 (x \sin\overline{\omega}_0 t + \overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0 t)$$

$$+ a_2 \Big\{ (x^2-\overline{\omega}_0^2) \sin\overline{\omega}_0 t + 2x\overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0 t \Big\}$$

$$\frac{x^2+\overline{\omega}_0^2}{A} I(\omega,t)$$

$$= a_2 t e^{xt}\overline{\omega}_0$$

$$+ a_1 e^{xt}\overline{\omega}_0$$

$$- a_2 e^{xt}\frac{1}{x^2+\overline{\omega}_0^2} 2x\overline{\omega}_0$$

$$-\{a_1 x - a_2(x^2-\overline{\omega}_0^2)\}\sin\overline{\omega}_0 t + \{2a_2 x\overline{\omega}_0 - a_1\overline{\omega}_0\}\cos\overline{\omega}_0 t$$

$$= (a_1+a_2t)\overline{\omega}_0 e^{xt} - \frac{2a_2 x\overline{\omega}_0}{x^2+\overline{\omega}_0^2}e^{xt}$$

$$-\{a_1x - a_2(x^2-\overline{\omega}_0^2)\}\sin\overline{\omega}_0 t + \{2a_2x - a_1\}\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_0 t$$

$x = \beta\omega_0 - p + i\omega$ より

$$\frac{x^2+\overline{\omega}_0^2}{A} I(\omega,t)$$

$$= (a_1+a_2t)\overline{\omega}_0 e^{xt}$$

$$= (a_1+a_2t)\overline{\omega}_0 e^{\beta\omega_0 - p + i\omega} - \cancel{x^2+\overline{\omega}_0^2}$$

$$\frac{X^2+\overline{\omega_0}^2}{A} I$$

$$= (a_1 + a_2 t)\overline{\omega_0}\, e^{\beta\omega_0 - p + i\omega} - \frac{2a_2(\beta\omega_0 - p + i\omega)\overline{\omega_0}}{(\beta\omega_0 - p + i\omega)^2 + \overline{\omega_0}^2} e^{\beta\omega_0 - p + i\omega}$$

$$- \left[a_1(\beta\omega_0 - p + i\omega) - a_2\left\{ (\beta\omega_0 - p + i\omega)^2 \pm \overline{\omega_0}^2 \right\} \right] \sin\overline{\omega_0} t$$

$$+ \left[2a_2(\beta\omega_0 - p + i\omega) - a_1 \right] \overline{\omega_0} \cos\overline{\omega_0} t$$

$$X^2 = (\beta\omega_0 - p + i\omega)^2$$

$$= \beta^2\omega_0^2 + p^2 - \omega^2 - 2\beta\omega_0 p - 2p\omega i + 2\beta\omega_0\omega i$$

$$= \beta^2\omega_0^2 + p^2 - \omega^2 - 2\beta\omega_0 p - 2\omega(p - \beta\omega_0) i$$

$$\overline{\omega_0}^2 = \omega_0^2(1-\beta^2) = \omega_0^2 - \omega_0^2\beta^2.$$

$$\therefore \quad X^2 + \overline{\omega_0}^2 = \omega_0^2 - \omega^2 + p^2 - 2\beta\omega_0 p - 2\omega(p - \beta\omega_0) i$$

$$X^2 - \overline{\omega_0}^2 = 2\beta^2\omega_0^2 + p^2 - \omega^2 - \omega_0^2 - 2\beta\omega_0 p - 2\omega(p - \beta\omega_0) i$$

ここで　$a_1=0$　とすれば．

$$\frac{x^2+\overline{\omega}_0^2}{A}I$$

$$= a_2\overline{\omega}_0 t e^{xt} - \frac{2a_2\overline{\omega}_0 x}{x^2+\overline{\omega}_0^2}e^{xt}$$

$$+ a_2(x^2-\overline{\omega}_0^2)\sin\overline{\omega}_0 t + 2a_2\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_0 t$$

$$x = \beta\omega_0 - p + i\omega$$

$$\overline{x}^* = \beta\omega_0 - p \pm i\omega$$

とおけば

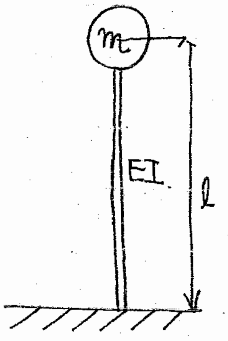
$$\frac{\overline{x}^2+\overline{\omega}_0^2}{A}\overline{I} = a_2\overline{\omega}_0 t e^{\overline{x}t} - \frac{2a_2\overline{\omega}_0\overline{x}}{\overline{x}^2+\overline{\omega}_0^2}e^{\overline{x}t}$$

$$+ a_2(\overline{x}^2-\overline{\omega}_0^2)\sin\overline{\omega}_0 t + 2a_2\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_0 t.$$

$$\therefore I(\omega,t) = \frac{a_2 A}{x^2+\overline{\omega}_0^2}\left[\overline{\omega}_0 t e^{xt} - \frac{2a\overline{\omega}_0 x}{x^2+\overline{\omega}_0^2}e^{xt} + (x^2-\overline{\omega}_0^2)\sin\overline{\omega}_0 t + 2\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_0 t\right]$$

$$I^*(\omega,t) = \frac{a_2 A}{\overline{x}^2+\overline{\omega}_0^2}\left[\overline{\omega}_0 t e^{\overline{x}t} - \frac{2\overline{\omega}_0\overline{x}}{\overline{x}^2+\overline{\omega}_0^2}e^{\overline{x}t} + (\overline{x}^2-\overline{\omega}_0^2)\sin\overline{\omega}_0 t + 2\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_0 t\right]$$

Systemの設定.



今 $x_s(t)$ のパワースペクトル $S_s(\omega)$ として.

$$\cancel{S_s(\omega) = 0.02}$$

$$S_s(\omega) \begin{cases} = \cancel{0.02}\,\dfrac{1}{2\omega_u} & -\omega_u \leq \omega \leq \omega_u \\ = 0 & \omega_u \leq \omega,\ \omega \leq -\omega_u \ (\omega_u > 0) \end{cases}$$

とする.

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\omega_u}^{\omega_u} \frac{1}{2\omega_u} \cdot I(\omega, t_1) \cdot I^*(\omega, t_2)\, d\omega$$

$$E[x^2(t)] = R_x(t, t) = \int_{-\omega_u}^{\omega_u} \frac{1}{2\omega_u} \cdot I(\omega, t) \cdot I^*(\omega, t)\, d\omega$$

$$J = I(\omega,t)\ I^*(\omega,t)$$

$$= \frac{a_2^2 A^2}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)(\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2)}\left[\bar{\omega}_0 t\, e^{xt} - \frac{2\bar{\omega}_0 x}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\, e^{xt} + (x^2-\bar{\omega}_0^2)\sin\bar{\omega}_0 t + 2\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right]$$

$$\times\left[\bar{\omega}_0 t\, e^{\bar{x} t} - \frac{2\bar{\omega}_0 \cdot \bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2}\, e^{\bar{x} t} + (\bar{x}^2 - \bar{\omega}_0^2)\sin\bar{\omega}_0 t + 2\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right]$$

ここで

$$e^{xt} = e^{\beta\omega_0 - p + i\omega} = e^{\beta\omega_0 - p}\cdot e^{i\omega} = e^{\beta\omega_0 - p}(\cos\omega + i\sin\omega)$$

$$e^{\bar{x}t} = e^{\beta\omega_0 - p - i\omega} = e^{\beta\omega_0 - p}\cdot e^{-i\omega} = e^{\beta\omega_0 - p}(\cos\omega - i\sin\omega)$$

よって、

$$J = \frac{a_2^2 A^2}{\underbrace{(x^2+\bar{\omega}_0^2)(\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2)}_{\omega\text{に関して偶関数.}}}\left[\bar{\omega}_0 t\, e^{\beta\omega_0 - p}(\overset{\text{偶}}{\cos\omega} + \overset{\text{奇}}{i\sin\omega}) - \frac{2\bar{\omega}_0 x}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\, e^{\beta\omega_0 - p} \times (\overset{\text{偶}}{\cos\omega} + \overset{\text{奇}}{i\sin\omega}) + (x^2-\bar{\omega}_0^2)\sin\bar{\omega}_0 t + 2\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right]$$

$$\times\left[\bar{\omega}_0 t\, e^{\beta\omega_0 - p}(\overset{\text{偶}}{\cos\omega} - \overset{\text{奇}}{i\sin\omega}) - \frac{2\bar{\omega}_0 \overset{\text{奇}}{\bar{x}}}{\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2}\, e^{\beta\omega_0 - p}(\underset{\text{偶}}{\cos\omega} - \underset{\text{奇}}{i\sin\omega}) + (\underset{\text{偶}}{\bar{x}^2} - \bar{\omega}_0^2)\sin\bar{\omega}_0 t + 2\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right]$$

$$J = \frac{a_2^2 A^2}{(\underline{\underline{x}}^2+\bar{\omega}_0^2)(\underline{X}^2+\bar{\omega}_0^2)} \times$$

$$\Big[\bar{\omega}_0^2 t^2 e^{2(\beta\omega_0 - p)} \boxed{\overset{1}{\cancel{(\cos \underline{\underline{w}} + i \sin \underline{\underline{w}})(\cos w - i \sin w)}}}$$

$$- \frac{2\bar{\omega}_0^2 t \underline{\underline{X}}}{\underline{\underline{X}}^2+\bar{\omega}_0^2} e^{2(\beta\omega_0 - p)} \boxed{\overset{1}{\cancel{(\cos \underline{\underline{w}} + i \sin \underline{\underline{w}})(\cos \underline{\underline{w}} - i \sin \underline{\underline{w}})}}}$$

$$+ \bar{\omega}_0 t e^{\beta\omega_0 - p} (\underline{\underline{X}}^2 - \bar{\omega}_0^2) \sin \bar{\omega}_0 t \boxed{\cancel{(\cos \underline{\underline{w}} + i \sin \underline{\underline{w}})}}$$

$$+ 2\bar{\omega}_0^2 t e^{\beta\omega_0 - p} \cos \bar{\omega}_0 t \boxed{(\cos \underline{\underline{w}} + i \sin \underline{\underline{w}})}$$

$$- \frac{2\bar{\omega}_0^2 t \underline{\underline{x}}}{\underline{\underline{x}}^2+\bar{\omega}_0^2} e^{2(\beta\omega_0 - p)} \boxed{\overset{1}{\cancel{(\cos \underline{\underline{w}} - i \sin \underline{\underline{w}})(\cos \underline{\underline{w}} + i \sin \underline{\underline{w}})}}}$$

$$+ \frac{4\bar{\omega}_0^2 \cdot \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{X}}}{(\underline{\underline{x}}^2+\bar{\omega}_0^2)(\underline{\underline{X}}^2+\bar{\omega}_0^2)} e^{2(\beta\bar{\omega}_0 - p)} \boxed{\overset{1}{\cancel{(\cos \underline{\underline{w}} + i \sin \underline{\underline{w}})(\cos \underline{\underline{w}} - i \sin \underline{\underline{w}})}}}$$

$$\cancel{\frac{2\bar{\omega}_0^2 t X}{X^2+\bar{\omega}_0^2} e^{2(\beta\omega_0 - p)}}$$

$$- \frac{2\bar{\omega}_0 x (\underline{\underline{X}}^2 - \bar{\omega}_0^2)}{\underline{\underline{x}}^2+\bar{\omega}_0^2} \sin \bar{\omega}_0 t \boxed{(\cos \underline{\underline{w}} + i \sin \underline{\underline{w}})} \cdot e^{\beta\omega_0 - p}$$

$$- \frac{4\bar{\omega}_0^2 \underline{\underline{X}}}{\underline{\underline{x}}^2+\bar{\omega}_0^2} e^{\beta\omega_0 - p} \cos \bar{\omega}_0 t \boxed{(\cos \underline{\underline{w}} + i \sin \underline{\underline{w}})}$$

$$+ \bar{\omega}_0 t (\underline{\underline{x}}^2 - \bar{\omega}_0^2) e^{\beta\omega_0 - p} \sin \bar{\omega}_0 t \boxed{\cancel{(\cos \underline{\underline{w}} - i \sin \underline{\underline{w}})}}$$

$$- \frac{2\bar{\omega}_0 \underline{\underline{X}} (\underline{\underline{x}}^2 - \bar{\omega}_0^2)}{\underline{\underline{X}}^2+\bar{\omega}_0^2} e^{\beta\omega_0 - p} \sin \bar{\omega}_0 t \boxed{(\cos \underline{\underline{w}} - i \sin \underline{\underline{w}})}$$

$$+ (\underline{\underline{x}}^2 - \bar{\omega}_0^2)(\underline{\underline{X}}^2 - \bar{\omega}_0^2) \sin^2 \bar{\omega}_0 t + 2\bar{\omega}_0 (\underline{\underline{x}}^2 - \bar{\omega}_0^2) \sin \bar{\omega}_0 t \cos \bar{\omega}_0 t$$

つづき.

$$+ 2\bar{\omega}_0^2 t\, e^{\beta\omega_0 - p} \cos\bar{\omega}_0 t \boxed{(\cos\underline{\omega} - i\sin\underline{\omega})}$$

$$- \frac{4\bar{\omega}_0^2 \underline{X}}{\underline{X}^2 + \bar{\omega}_0^2} e^{\beta\omega_0 - p} \cos\bar{\omega}_0 t \boxed{(\cos\underline{\omega} - i\sin\underline{\omega})}$$

$$+ 2\bar{\omega}_0 (\underline{X}^2 - \bar{\omega}_0^2) \sin\bar{\omega}_0 t \cos\bar{\omega}_0 t$$

$$+ 4\bar{\omega}_0^2 \cos^2\bar{\omega}_0 t$$

以上

$$J = \frac{a_z^2 A_z^2}{(\bar{x}+\bar{\omega}_0^2)(\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2)}$$

$$\Big[\ \bar{\omega}_0^2 t^2 e^{2(\beta\omega_0-p)}$$

③ $$+\frac{4\bar{\omega}_0^2\, x\cdot\bar{x}}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)(\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2)} e^{2(\beta\omega_0-p)}$$

④ $$+(x^2-\bar{\omega}_0^2)(\bar{x}^2-\bar{\omega}_0^2)\sin^2\bar{\omega}_0 t$$

$$+4\bar{\omega}_0^2\cos^2\bar{\omega}_0 t$$

① $$-2\bar{\omega}_0^2 t\, e^{2(\beta\omega_0-p)}\left(\frac{x}{x^2+\bar{\omega}_0^2}+\frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2}\right)$$

⑤,⑥ $$+\bar{\omega}_0 t \sin\bar{\omega}_0 t\, e^{\beta\omega_0-p}\left\{(\bar{x}^2-\bar{\omega}_0^2)(\cos\omega+i\sin\omega)+(x^2-\bar{\omega}_0^2)(\cos\omega-i\sin\omega)\right\}$$

$$+2\bar{\omega}_0^2 t\, e^{\beta\omega_0-p}\cos\bar{\omega}_0 t\left\{\underbrace{(\cos\omega+i\sin\omega)+(\cos\omega-i\sin\omega)}^{2\cos\omega}\right\}$$

⑦,⑧ $$-2\bar{\omega}_0\, e^{\beta\omega_0-p}\sin\bar{\omega}_0 t\left\{\frac{x(\bar{x}^2-\bar{\omega}_0^2)}{x^2+\bar{\omega}_0^2}(\cos\omega+i\sin\omega)+\frac{\bar{x}(x^2-\bar{\omega}_0^2)}{\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2}(\cos\omega-i\sin\omega)\right\}$$

①,② $$-4\bar{\omega}_0^2 e^{\beta\omega_0-p}\cos\bar{\omega}_0 t\left\{\frac{x}{x^2+\bar{\omega}_0^2}(\cos\omega+i\sin\omega)+\frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2}(\cos\omega-i\sin\omega)\right\}$$

⑤ $$+2\bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0 t\cos\bar{\omega}_0 t\left\{(x^2-\bar{\omega}_0^2)+(\bar{x}^2-\bar{\omega}_0^2)\right\}\ \Big]$$

$$\frac{X}{X^2+\overline{\omega_0}^2} + \frac{\overline{X}}{\overline{X}^2+\overline{\omega_0}^2}$$

and

$$\frac{X}{X^2+\overline{\omega_0}^2} - \frac{\overline{X}}{\overline{X}^2+\overline{\omega_0}^2}$$

ただし

$$X = \beta\omega_0 - p + i\omega = D + i\omega$$
$$\overline{X} = \beta\omega_0 - p - i\omega = D - i\omega$$

$$\begin{aligned} X^2+\overline{\omega_0}^2 &= (D+i\omega)^2 + \overline{\omega_0}^2 \\ &= D^2 - \omega^2 + \overline{\omega_0}^2 + 2iD\omega . \\ &= E + iF \\ \overline{X}^2+\overline{\omega_0}^2 &= (D-i\omega)^2 + \overline{\omega_0}^2 \\ &= D^2 - \omega^2 + \overline{\omega_0}^2 - 2iD\omega . \\ &= E - iF \end{aligned}$$

$$(\ E = D^2 - \omega^2 + \overline{\omega_0}^2 , \ F = 2D\omega \ )$$

$$\begin{aligned} (X^2+\overline{\omega_0}^2)(\overline{X}^2+\overline{\omega_0}^2) &= (E+iF)(E-iF) \\ &= E^2 + F^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & X(\overline{X}^2+\overline{\omega_0}^2) + \overline{X}(X^2+\overline{\omega_0}^2) \\ &= (D+i\omega)(E-iF) + (D-i\omega)(E+iF) \\ &= DE + \omega F + i(\omega E - DF) + DE + \omega F + i(DF - \omega E) \\ &= 2(DE+\omega F) \end{aligned}$$

① $$\therefore \frac{X}{X^2+\overline{\omega_0}^2} + \frac{\overline{X}}{\overline{X}^2+\overline{\omega_0}^2} = \frac{2(DE+\omega F)}{E^2+F^2}$$

同様にして.

② $\dfrac{x}{x^2+\overline{\omega_0}^2} - \dfrac{\overline{x}}{\overline{x}^2+\overline{\omega_0}^2}$

$= \dfrac{2i(\omega E - DF)}{E^2+F^2}$

③ $\dfrac{x\cdot\overline{x}}{(x^2+\overline{\omega_0}^2)(\overline{x}^2+\overline{\omega_0}^2)}$

$= \dfrac{D^2+\omega^2}{E^2+F^2}$

$(x^2-\overline{\omega_0}^2)\cancel{(\overline{x}^2-\overline{\omega_0}^2)}$

$= (D+i\omega)^2-\overline{\omega_0}^2$

$= D^2-\omega^2-\overline{\omega_0}^2 + 2iD\omega. = G + iF$

$(\overline{x}^2-\overline{\omega_0}^2)$

$= (D-i\omega)^2-\overline{\omega_0}^2$

$= D^2-\omega^2-\overline{\omega_0}^2 - 2iD\omega. = G - iF.$

④ $\therefore (x^2-\overline{\omega_0}^2)(\overline{x}^2-\overline{\omega_0}^2) = (G+iF)(G-iF)$

$= G^2+F^2$

⑤ $(x^2-\overline{\omega_0}^2)+(\overline{x}^2-\overline{\omega_0}^2)$

$= 2G.$

⑥ $(x^2-\overline{\omega_0}^2)-(\overline{x}^2-\overline{\omega_0}^2)$

$= 2iF$

$$\frac{x(\bar{x}^2-\bar{\omega}_0^2)}{x^2+\bar{\omega}_0^2}+\frac{\bar{x}(x^2-\bar{\omega}_0^2)}{\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2}$$

and

$$\frac{x(\bar{x}^2-\bar{\omega}_0^2)}{x^2+\bar{\omega}_0^2}-\frac{\bar{x}(x^2-\bar{\omega}_0^2)}{\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2}$$

$$\frac{x(\bar{x}^2-\bar{\omega}_0^2)}{x^2+\bar{\omega}_0^2}+\frac{\bar{x}(x^2-\bar{\omega}_0^2)}{\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2}$$

$$=\frac{x(\bar{x}^2-\bar{\omega}_0^2)(\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2)+\bar{x}(x^2-\bar{\omega}_0^2)(x^2+\bar{\omega}_0^2)}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)(\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2)}$$

$$=\frac{(D+i\omega)(G-iF)(E-iF)+(D-i\omega)(G+iF)(E+iF)}{E^2+F^2}$$

$$\text{分子}=(DG+\omega F+i\,\overline{\omega G-DF})(E-iF)$$

$$+(DG+\omega F+i\,\overline{DF-\omega G})(E+iF)$$

$$=E(DG+\omega F)+F(\omega G-DF)+i\{E(\omega G-DF)-F(DG+\omega F)\}$$

$$+E(DG+\omega F)-F(DF-\omega G)+i\{E(DF-\omega G)+F(DG+\omega F)\}$$

$$=2(EDG+\omega EF+\omega FG-DF^2)$$

⑦ $\therefore$
$$\frac{x(\bar{x}^2-\bar{\omega}_0^2)}{x^2+\bar{\omega}_0^2}+\frac{\bar{x}(x^2-\bar{\omega}_0^2)}{\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2}=\frac{2(EDG+\omega EF+\omega FG-DF^2)}{E^2+F^2}$$

同様に

⑧
$$\frac{x(\bar{x}^2-\bar{\omega}_0^2)}{x^2+\bar{\omega}_0^2}-\frac{\bar{x}(x^2-\bar{\omega}_0^2)}{\bar{x}^2+\bar{\omega}_0^2}=\frac{2i(\omega EG-EDF-FDG-\omega F^2)}{E^2+F^2}$$

$$J = \frac{a_2^2 A^2}{E^2+F^2}$$

$$\times \Big[\bar{\omega}_0^2 t^2 e^{2(\beta\omega_0 - p)} + 4\bar{\omega}_0^2 \cos^2 \bar{\omega}_0 t$$

$$+ 4\bar{\omega}_0^2 \cdot \frac{\overset{\text{偶}}{D^2+\omega^2}}{\underset{\text{偶}}{E^2+F^2}} \cdot e^{2(\beta\omega_0 - p)}$$

$$+ \underset{\text{偶}}{(G^2+F^2)} \sin^2 \bar{\omega}_0 t$$

$$- \frac{\cancel{4}\,2}{2} \bar{\omega}_0^2 t\, e^{2(\beta\omega_0 - p)} \cdot \frac{2\overset{\text{偶}}{(DE+\omega F)}}{\underset{\text{偶}}{E^2+F^2}}$$

$$+ \bar{\omega}_0 t \sin\bar{\omega}_0 t\, e^{\beta\omega_0 - p} \Big\{ 2\underset{\text{偶}}{G}\underset{\text{偶}}{\cos\omega} \cancel{-2iF} - 2i\underset{\text{奇}}{F}\underset{\text{奇}}{\sin\omega} \cdot \overset{\times i}{\cancel{i}} \Big\}$$

$$+ 2\bar{\omega}_0^2 t\, e^{\beta\omega_0 - p} \cos\bar{\omega}_0 t \cdot 2\underset{\text{偶}}{\cos\omega}$$

$$- 2\bar{\omega}_0\, e^{\beta\omega_0 - p} \sin\bar{\omega}_0 t \Big\{ \frac{\overset{\text{偶}}{2(EDG+\omega EF+\omega FG-DF^2)}}{\underset{\text{偶}}{E^2+F^2}} \overset{\text{奇}}{\cos\omega}$$

$$+ i \cdot \frac{\overset{\text{偶}}{2i(\omega EG - EDF - FDG - \omega F^2)}}{\underset{\text{偶}}{E^2+F^2}} \underset{\text{奇}}{\sin\omega} \Big\}$$

$$- 4\bar{\omega}_0^2 e^{\beta\omega_0 - p} \cos\bar{\omega}_0 t \left(\frac{\overset{\text{偶}}{2(DE+\omega F)}}{\underset{\text{偶}}{E^2+F^2}} \cos\omega + i \cdot \frac{\overset{\text{偶}}{2i(\omega E - DF)}}{\underset{\text{偶}}{E^2+F^2}} \sin\omega \right)$$

$$+ 2\bar{\omega}_0 \sin\bar{\omega}_0 t \cos\bar{\omega}_0 t \cdot 2\underset{\text{偶}}{G}$$

$$D = \beta\omega_0 - p$$

$$E = D^2 - \omega^2 + \overline{\omega_0}^2 \qquad D^2 + \overline{\omega_0}^2 - \omega^2$$
$$= (\beta\omega_0 - p)^2 - \omega^2 + \overline{\omega_0}^2$$
$$= (\beta\omega_0 - p)^2 - \omega^2 + \omega_0^2(1-\beta^2)$$
$$= \cancel{\beta^2\omega_0^2} - 2\beta p\omega_0 + p^2 + \omega_0^2 - \cancel{\beta^2\omega_0^2} - \omega^2$$
$$= p^2 + \omega_0^2 - 2\beta\omega_0 p - \omega^2$$

$$F = 2D\omega \qquad = 2D\omega.$$
$$= 2\omega(\beta\omega_0 - p)$$
$$= 2(\beta\omega_0 - p)\cdot\omega$$

$$G = D^2 - \omega^2 - \overline{\omega_0}^2 = D^2 - \overline{\omega_0}^2 - \omega^2$$
$$= \beta^2\omega_0^2 - 2\beta p\omega_0 + p^2 - \omega_0^2 + \beta^2\omega_0^2 - \omega^2$$
$$= 2\beta^2\omega_0^2 + p^2 - 2\beta p\omega_0 - \omega_0^2 - \omega^2$$

$$DEG + \omega EF + \omega FG - DF^2$$
$$= D(D^2 + \overline{\omega_0}^2 - \omega^2)(D^2 - \overline{\omega_0}^2 - \omega^2)$$
$$+ \omega(D^2 + \overline{\omega_0}^2 - \omega^2)(2D\omega)$$
$$+ \omega(2D\omega)(D^2 - \overline{\omega_0}^2 - \omega^2)$$
$$- D(2D\omega)^2$$
$$= D\{(D^2 - \omega^2)^2 - \overline{\omega_0}^4\}$$
$$+ 2D\omega^2(D^2 \cancel{+\overline{\omega_0}^2} - \omega^2)$$
$$+ 2D\omega^2(D^2 \cancel{-\overline{\omega_0}^2} - \omega^2)$$
$$- 4D^3\omega^2$$
$$= D(D^4 + \omega^4 - \overline{\omega_0}^4 - 2D^2\omega^2) + \cancel{4D^3\omega^2} - 4D\omega^4$$
$$\cancel{-4D^3\omega^2}$$

$$E^2+F^2 = D^4+\overline{\omega_0}^4+\omega^4+2D^2\overline{\omega_0}^2-2\overline{\omega_0}^2\omega^2-2D^2\omega^2+4D^2\omega^2$$

$$= D^4+\overline{\omega_0}^4+\omega^4+2D^2\overline{\omega_0}^2-2\overline{\omega_0}^2\omega^2+2D^2\omega^2$$

$$= (D^2 \quad +\overline{\omega_0}^2 \quad +\omega^2 \quad)^2-4\overline{\omega_0}^2\omega^2$$

$$= (D^2+\overline{\omega_0}^2+\omega^2+2\overline{\omega_0}\omega)(D^2+\overline{\omega_0}^2+\omega^2-2\overline{\omega_0}\omega)$$

$$= \{D^2+(\omega+\overline{\omega_0})^2\}\{D+(\omega-\overline{\omega_0})^2\}$$

$$= \{D^2+(\omega+\overline{\omega_0})^2\}\{D^2+(\omega-\overline{\omega_0})^2\}$$

$$G^2+F^2 = (D^2-\overline{\omega_0}^2-\omega^2)^2+4D^2\omega^2$$

$$= (D^4+\overline{\omega_0}^4+\omega^4-2D^2\overline{\omega_0}^2-2D^2\omega^2+2\overline{\omega_0}^2\omega^2) + 4D^2\omega^2$$

$$= (D^4+\overline{\omega_0}^4+\omega^4-2D^2\overline{\omega_0}^2+2D^2\omega^2+2\overline{\omega_0}^2\omega^2)$$

$$= (D^2+\overline{\omega_0}^2+\omega^2)^2-4D^2\overline{\omega_0}^2$$

$$= (D^2+\overline{\omega_0}^2+\omega^2+2D\overline{\omega_0})(D^2+\overline{\omega_0}^2+\omega^2-2D\overline{\omega_0})$$

$$= \{\omega^2+(D+\overline{\omega_0})^2\}\{\omega^2+(D-\overline{\omega_0})^2\}$$

$$DE + \omega F = D(D^2 + \overline{\omega_0}^2 - \omega^2) + \omega \cdot 2D\omega$$
$$= D^3 + D\overline{\omega_0}^2 - D\omega^2 + 2D\omega^2$$
$$= D^3 + D\overline{\omega_0}^2 + D\omega^2$$
$$= D(D^2 + \overline{\omega_0}^2 + \omega^2)$$

$$\omega E - DF = \cancel{\omega \cdot 2D\omega}$$
$$\omega(D^2 + \overline{\omega_0}^2 - \omega^2) - D \cdot 2D\omega$$
$$= \omega D^2 + \omega\overline{\omega_0}^2 - \omega^3 - 2D^2\omega$$
$$= D^2\omega + \omega\overline{\omega_0}^2 - \omega^3$$
$$= \omega(D^2 + \overline{\omega_0}^2 - \omega^2)$$

$$I(\omega, t) = \int_0^t \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega}_0} e^{\beta\omega_0\xi} \sin\overline{\omega}_0(t-\xi)\cdot(a_1+a_2\xi)e^{-p\xi}e^{i\omega\xi}\,d\xi$$

$$= \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\overline{\omega}_0}\int_0^t (a_1+a_2\xi)e^{(\beta\omega_0-p+i\omega)\xi}\sin\overline{\omega}_0(t-\xi)\,d\xi.$$

ここで　$A = e^{-\beta\omega_0 t}/\overline{\omega}_0$

$$x = \beta\omega_0 - p + i\omega$$

とおくと.

$$I(\omega, t) = A\int_0^t (a_1+a_2\xi)e^{x\xi}\sin\overline{\omega}_0(t-\xi)\,d\xi$$

$$= A\int_0^t (a_1+a_2\xi)e^{x\xi}(\sin\overline{\omega}_0 t\cos\overline{\omega}_0\xi - \cos\overline{\omega}_0 t\sin\overline{\omega}_0\xi)\,d\xi$$

$$\therefore \frac{I(\omega,t)}{A} = a_1\left\{\sin\overline{\omega}_0 t\int_0^t e^{x\xi}\cos\overline{\omega}_0\xi\,d\xi\right.$$

$$* \left. - \cos\overline{\omega}_0 t\int_0^t e^{x\xi}\sin\overline{\omega}_0\xi\,d\xi\right\}$$

$$+ a_2\left\{\sin\overline{\omega}_0 t\int_0^t \xi e^{x\xi}\cos\overline{\omega}_0\xi\,d\xi\right.$$

$$\left. - \cos\overline{\omega}_0 t\int_0^t \xi e^{x\xi}\sin\overline{\omega}_0\xi\,d\xi\right\}$$

$$I_1 = \int_0^t e^{x\xi} \cos\overline{\omega}_0\xi \, d\xi$$

$$I_2 = \int_0^t e^{x\xi} \sin\overline{\omega}_0\xi \, d\xi$$

$$I_3 = \int_0^t \xi e^{x\xi} \cos\overline{\omega}_0\xi \, d\xi$$

$$I_4 = \int_0^t \xi e^{x\xi} \sin\overline{\omega}_0\xi \, d\xi$$

とおけば.

$$\frac{I(\omega,t)}{A} = a_1 \left(\sin\overline{\omega}_0 t \cdot I_1 - \cos\overline{\omega}_0 t \cdot I_2 \right)$$

$$+ a_2 \left(\sin\overline{\omega}_0 t \, I_3 - \cos\overline{\omega}_0 t \cdot I_4 \right)$$

$$I_1 = \int_0^t e^{x\xi} \cos\overline{\omega}_0\xi \, d\xi$$

$$= \left[\frac{e^{x\xi}}{x^2 + \overline{\omega}_0^2} \left(x\cos\overline{\omega}_0\xi + \overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0\xi \right) \right]_0^t$$

$$= \frac{e^{xt}}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left(x\cos\overline{\omega}_0 t + \overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0 t \right) - \frac{x}{x^2+\overline{\omega}_0^2}$$

$$I_2 = \int_0^t e^{x\xi} \sin\overline{\omega}_0\xi \, d\xi$$

$$= \left[\frac{e^{x\xi}}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left(x\sin\overline{\omega}_0\xi - \overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0\xi \right) \right]_0^t$$

$$= \frac{e^{xt}}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left(x\sin\overline{\omega}_0 t - \overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0 t \right) + \frac{\overline{\omega}_0}{x^2+\overline{\omega}_0^2}$$

$$I_3 = \int_0^t \xi e^{x\xi} \cos\overline{\omega}_0\xi \, d\xi$$

$$= \left[\frac{\xi e^{x\xi}}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left(x\cos\overline{\omega}_0\xi + \overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0\xi \right) \right]_0^t$$

$$- \frac{1}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left\{ x \int_0^t e^{x\xi} \cos\overline{\omega}_0\xi \, d\xi + \overline{\omega}_0 \int_0^t e^{x\xi} \sin\overline{\omega}_0\xi \, d\xi \right\}$$

$$= \frac{t e^{xt}}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left(x\cos\overline{\omega}_0 t + \overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0 t \right)$$

$$- \frac{x}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left\{ \frac{e^{xt}}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left(x\cos\overline{\omega}_0 t + \overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0 t \right) - \frac{x}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \right\}$$

$$- \frac{\overline{\omega}_0}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left\{ \frac{e^{xt}}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left(x\sin\overline{\omega}_0 t - \overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0 t \right) + \frac{\overline{\omega}_0}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \right\}$$

$$= \frac{t e^{xt}}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left(x\cos\overline{\omega}_0 t + \overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0 t \right)$$

$$- \frac{e^{xt}}{(x^2+\overline{\omega}_0^2)^2} \left\{ x\left(x\cos\overline{\omega}_0 t + \overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0 t \right) + \overline{\omega}_0 \left(x\sin\overline{\omega}_0 t - \overline{\omega}_0 \cos\overline{\omega}_0 t \right) \right\}$$

$$+ \frac{x^2 - \overline{\omega}_0^2}{(x^2+\overline{\omega}_0^2)^2}$$

$$= \frac{t e^{xt}}{x^2+\overline{\omega}_0^2} \left(x\cos\overline{\omega}_0 t + \overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0 t \right)$$

$$- \frac{e^{xt}}{(x^2+\overline{\omega}_0^2)^2} \left\{ (x^2 - \overline{\omega}_0^2)\cos\overline{\omega}_0 t + 2x\overline{\omega}_0 \sin\overline{\omega}_0 t \right\}$$

$$+ \frac{x^2 - \overline{\omega}_0^2}{(x^2+\overline{\omega}_0^2)^2}$$

$$I_4=\int_0^t \xi e^{x\xi}\sin\bar{\omega}_0\xi\,d\xi$$

$$=\left[\frac{\xi e^{x\xi}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\sin\bar{\omega}_0\xi-\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0\xi\right)\right]_0^t$$

$$-\frac{x}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\int_0^t e^{x\xi}\sin\bar{\omega}_0\xi\,d\xi+\frac{\bar{\omega}_0}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\int_0^t e^{x\xi}\cos\bar{\omega}_0\xi\,d\xi$$

$$=\frac{t\cdot e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\sin\bar{\omega}_0t-\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0t\right)$$

$$-\frac{x}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left\{\frac{e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\sin\bar{\omega}_0t-\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0t\right)+\frac{\bar{\omega}_0}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\right\}$$

$$+\frac{\bar{\omega}_0}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left\{\frac{e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\cos\bar{\omega}_0t+\bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0t\right)-\frac{x}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\right\}$$

$$=\frac{t\,e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\sin\bar{\omega}_0t-\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0t\right)$$

$$-\frac{e^{xt}}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}\Big\{x\left(x\sin\bar{\omega}_0t-\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0t\right)$$

$$-\bar{\omega}_0\left(x\cos\bar{\omega}_0t+\bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0t\right)\Big\}$$

$$-\frac{2x\bar{\omega}_0}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}$$

$$=\frac{t\cdot e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\sin\bar{\omega}_0t-\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0t\right)$$

$$-\frac{e^{xt}}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}\left\{(x^2-\bar{\omega}_0^2)\sin\bar{\omega}_0t-2x\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0t\right\}$$

$$-\frac{2x\bar{\omega}_0}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}$$

$$\frac{I(\omega,t)}{A} = a_1\left(\sin\bar{\omega}_0 t\, I_1 - \cos\bar{\omega}_0 t\, I_2\right)$$

$$+ a_2\left(\sin\bar{\omega}_0 t \cdot I_3 - \cos\bar{\omega}_0 t\, I_4\right)$$

$$= a_1\left[\sin\bar{\omega}_0 t\left\{\frac{e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\cos\bar{\omega}_0 t + \bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0 t\right) - \frac{x}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\right\}\right.$$

$$\left. - \cos\bar{\omega}_0 t\left\{\frac{e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\sin\bar{\omega}_0 t - \bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right) + \frac{\bar{\omega}_0}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\right\}\right]$$

$$+ a_2\left[\sin\bar{\omega}_0 t\left\{\frac{t\,e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\cos\bar{\omega}_0 t + \bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0 t\right)\right.\right.$$

$$- \frac{e^{xt}}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}\left\{(x^2-\bar{\omega}_0^2)\cos\bar{\omega}_0 t + 2x\bar{\omega}_0\sin\bar{\omega}_0 t\right\}$$

$$\left. + \frac{x^2-\bar{\omega}_0^2}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}\right\}$$

$$- \cos\bar{\omega}_0 t\left\{\frac{t\cdot e^{xt}}{x^2+\bar{\omega}_0^2}\left(x\sin\bar{\omega}_0 t - \bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right)\right.$$

$$- \frac{e^{xt}}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}\left\{(x^2-\bar{\omega}_0^2)\sin\bar{\omega}_0 t - 2x\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_0 t\right\}$$

$$\left.\left. + \frac{2x\bar{\omega}_0}{(x^2+\bar{\omega}_0^2)^2}\right\}\right]$$

$$J = \frac{a_2^2 A^2}{(D^2+\overline{\omega}_0^2-\omega^2)^2+4D^2\omega^2}$$

$$\times\Big[\overline{\omega}_0^2 t^2 e^{2D} + 4\overline{\omega}_0^2 \cos^2\overline{\omega}_0 t$$

$$+ 4\overline{\omega}_0^2 \cdot \frac{D^2+\omega^2}{(D^2+\overline{\omega}_0^2-\omega^2)^2+4D^2\omega^2}\, e^{2D}$$

$$+ \left\{(D^2-\overline{\omega}_0^2-\omega^2)^2+4D^2\omega^2\right\} \sin^2\overline{\omega}_0 t$$

$$-4\overline{\omega}_0^2 t\, e^{2D}\, \frac{D(D^2+\overline{\omega}_0^2-\omega^2)+\omega(2D\omega)}{(D^2+\overline{\omega}_0^2-\omega^2)^2+4D^2\omega^2}$$

$$+2\overline{\omega}_0 t \sin\overline{\omega}_0 t\, e^D\left\{(D^2-\overline{\omega}_0^2-\omega^2)\cos\omega + 2D\omega \sin\omega\right\}$$

$$+4\overline{\omega}_0^2 t\, e^D \cos\overline{\omega}_0 t \cos\omega$$

$$-4\overline{\omega}_0 e^D \sin\overline{\omega}_0 t\Big\}$$