§1. 板の座屈の基礎理論

Plate　die Platte　板．とは

- z 方向荷重
- x, 方向 y 方向まわりのモーメント，ねじりモーメント
  を受ける。

Disk　die Scheibe　板（盤）

- x, 方向 y 方向荷重も受ける。

Shell　die Scharre　殼

- 中立面が曲面であるもの

Section 1. 板の曲げ理論における仮定.

i) 板の中立面は平面である

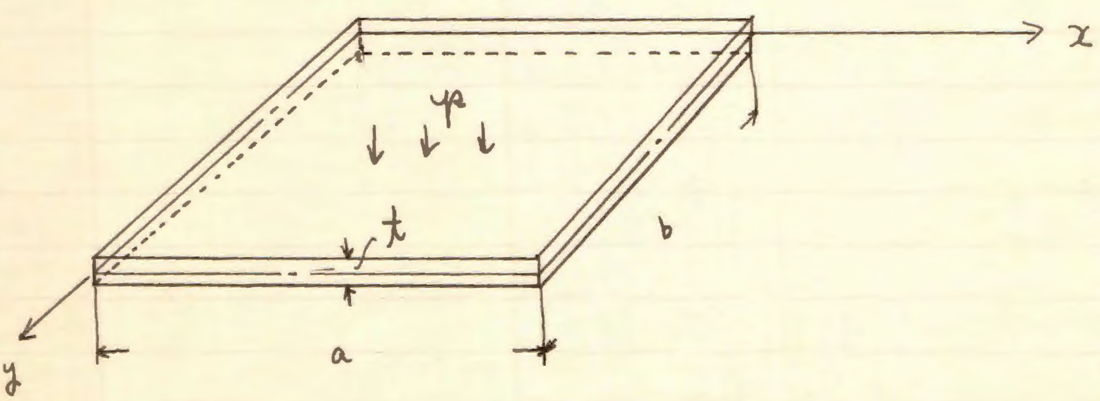
ii) 板厚は constant, 辺長に比してきわめて小さい

iii) 板は均質でかつ連続な弾性体

iv) 荷重は中立面に垂直に作用する

v) ベルヌーイ・オイラーの仮定.
〃
平面保持の原則.

"変形前に中立面に直角な断面は,
変形後も 〃 〃 である."



Section 2.　z方向荷重のみの場合の基礎方程式

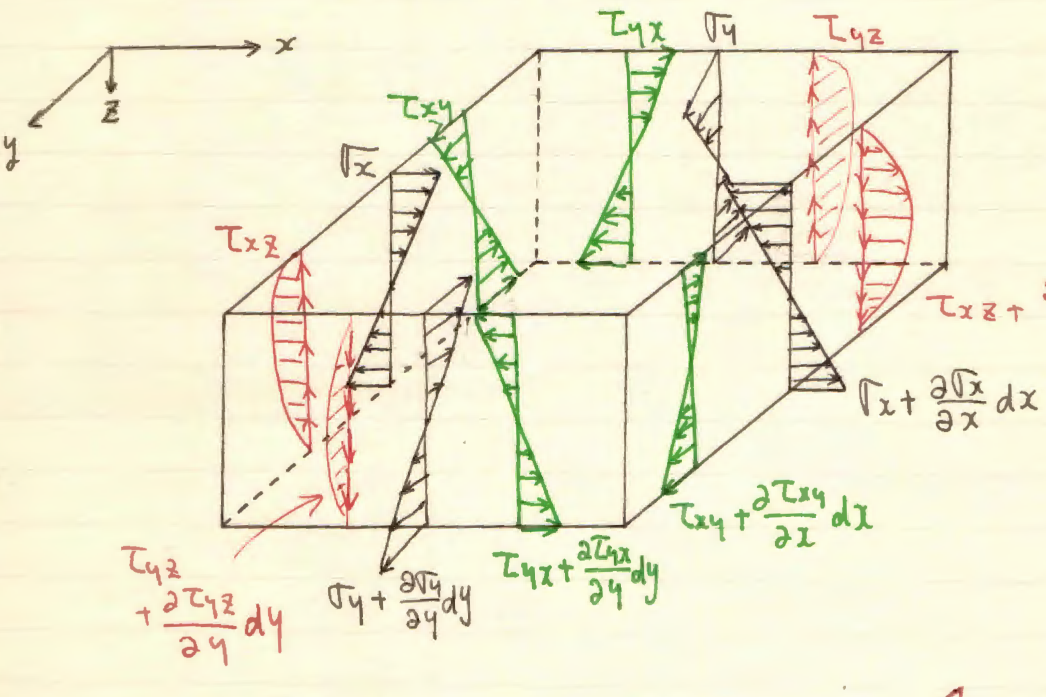
三次元連続体

⇓

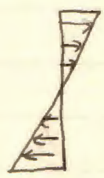
三変数の偏微分方程式

平板の微小要素 $dx \cdot dy$.

作用する stress.



$\tau_{xy} = \tau_{yx}$.



曲げによる直応力.

せん断応力

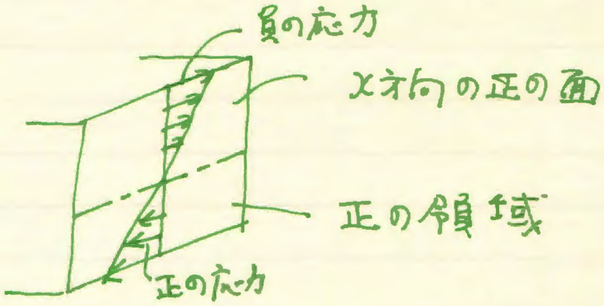
せん断応力
(ねじりに対する)

τ_{xy}

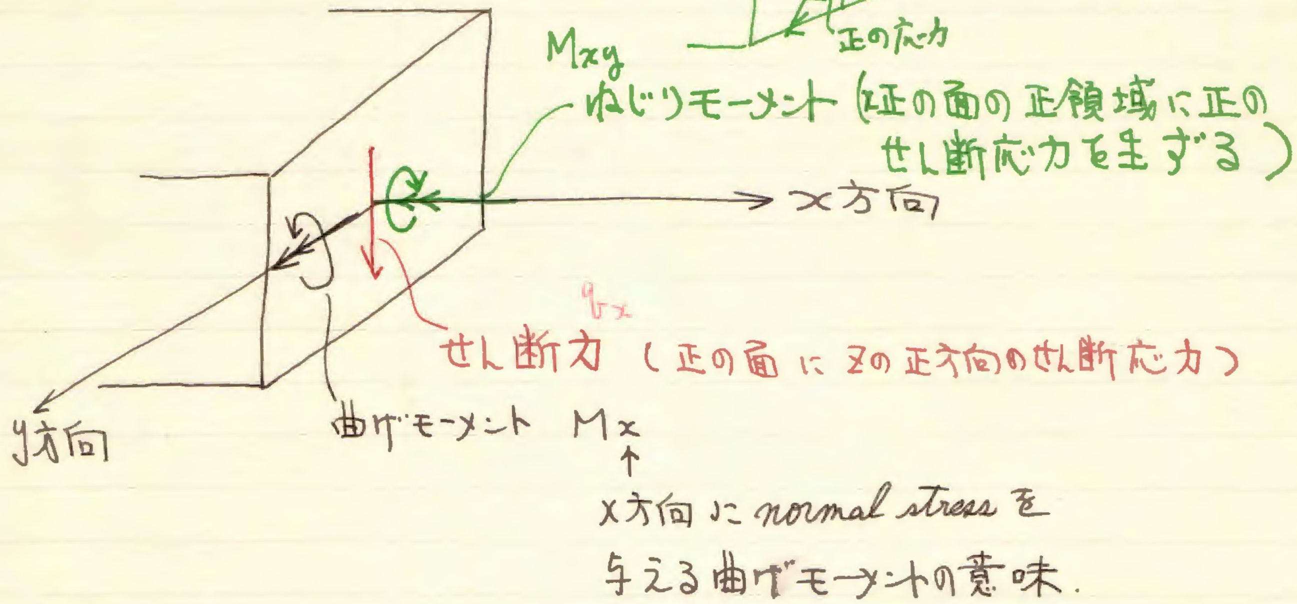
x ↑ 作用面

y ↖ 作用方向

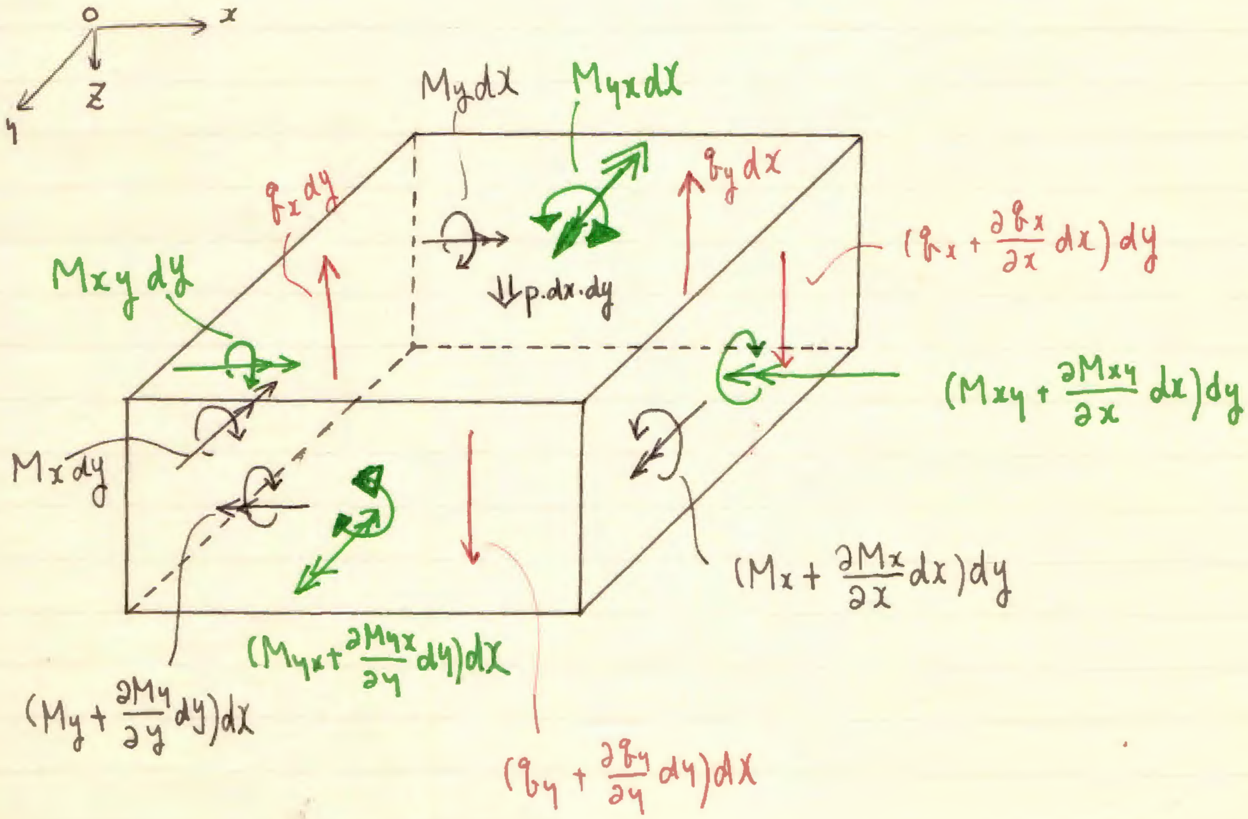
作用する力



負の応力
x方向の正の面
正の領域
正の応力



M_{xy}
ねじりモーメント（正の面の正領域に正のせん断応力を生ずる）
x方向
q_x
せん断力（正の面にzの正方向のせん断応力）
y方向
曲げモーメント M_x
x方向にnormal stressを与える曲げモーメントの意味.



O
x
y
z
$M_y dx$
$M_{yx} dx$
$q_y dx$
$q_x dy$
$(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dy$
$M_{xy} dy$
$p \cdot dx \cdot dy$
$(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx) dy$
$M_x dy$
$(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx) dy$
$(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy) dx$
$(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy) dx$
$(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy) dx$

M_x ： x方向にnormal stressを与えるB.M.

（ xz面内のB.M. ）－ y軸まわり

M_y ： y方向にnormal stressを与えるB.M.

（ yz面内のB.M. ）－ x軸まわり.

M_{xy} ： 正のx面／zの正の領域／yの正のS. stressを与える

（ x軸まわりのねじり）

M_{yx} ： 正のy面／正の領域／xの正方向のShear Stress

を与える （ y軸まわりのねじり ）

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

⇓

$$M_{xy} = M_{yx}.$$

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x \cdot z \, dz$$

$$M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dz$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} \, z \, dz \qquad (\because \tau_{xy} = \tau_{yx})$$

$$q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} \, dz$$

$$q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} \, dz$$

1) z方向の力のつり合い。

$$-q_x\,dy + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dy - q_y\,dx + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy\right)dx$$
$$+\,p\,dx\,dy = 0$$

$$\therefore\quad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0$$

(梁) せん断力

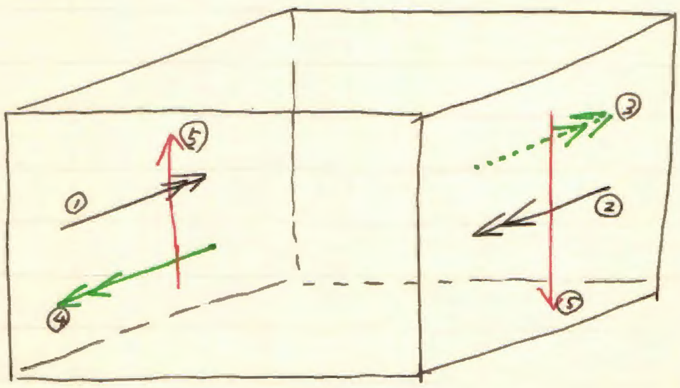
$$\left[\ \frac{\partial S_x}{\partial x} = -p\ \right]$$

荷重.

2) xz面内のモーメント（y軸まわり）

$$-M_x\,dy + \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x}dx\right)dy - M_{yx}\,dx + \left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}dy\right)dx$$
$$-\,q_x\cdot dx\cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - q_x = 0$$



(梁) B.M.

$$\left[\ \frac{dM}{dx} = S\ \right]$$

S.F.

3) x軸まわり
(yz面内)

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - q_y = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = q_x \Rightarrow \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q_x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = q_y \Rightarrow \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q_y}{\partial y}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x,y)} \quad (5.5)$$

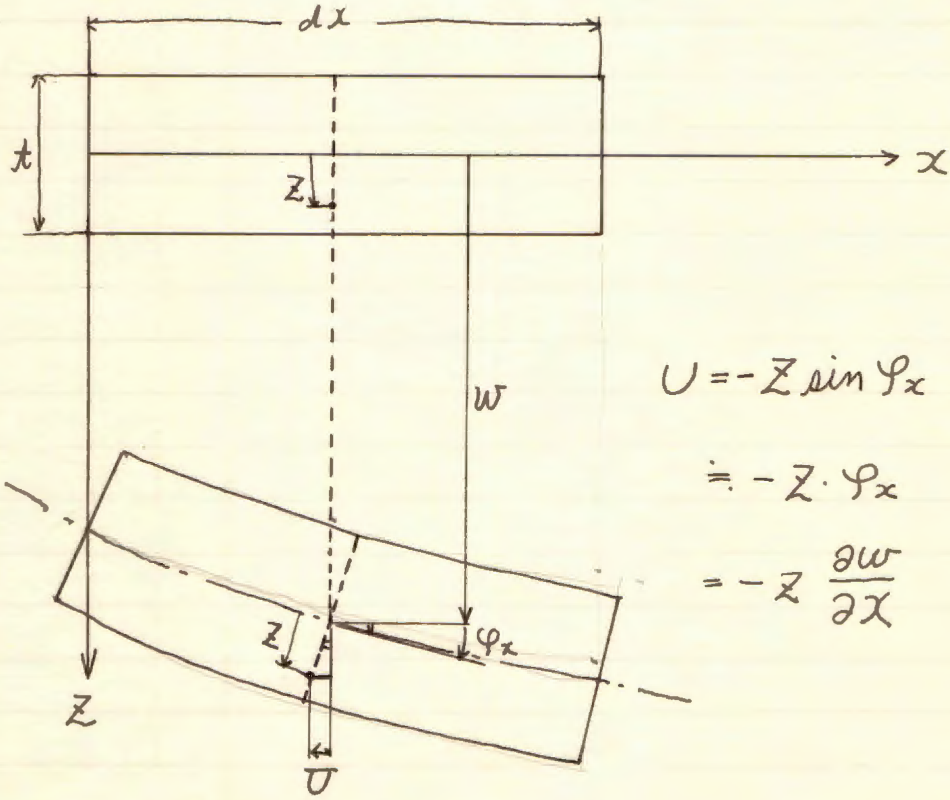
[梁]

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -p(x)$$

応力法 — 釣合い方程式

〈外力と内力のつり合い〉

▨ ひずみと変形の関係〈適合条件〉



$$U = -z \sin \varphi_x$$

$$\fallingdotseq -z \cdot \varphi_x$$

$$= -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\therefore \begin{cases} y\text{方向} & V = -z\dfrac{\partial w}{\partial y} \\ x\text{方向} & U = -z\dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}}$$

適合条件.

◎ 構成方程式

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

STEP1.　応力を変位(w)で表わす。

適合条件と構成方程式から、

ひずみを消去する。

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xy} = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

STEP2.　断面力を変位(w)で表わす。

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z\,dz = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz$$

$$\therefore M_x = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

同様に　$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$

$$M_{xy} = -\frac{Gt^3}{6}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = -\frac{Et^3}{12(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

$$= -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = -2\left(\frac{1-\nu}{2}D\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

ただし　$D=\dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$　：板の曲げ剛度

$\dfrac{1-\nu}{2}D$　：ねじり剛度

とする。

$$q_x=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\tau_{xz}\,dz=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

$$=-D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\nu\frac{\partial^3 M_{xy}}{\partial x\partial y^2}\right)-(1-\nu)D\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}$$

$$=-D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)$$

$$q_y=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\tau_{yz}\,dz=\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

$$=-D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\nu\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)-(1-\nu)D\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}$$

$$=-D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)$$

STEP. 3. 変位を未知数とする基礎方程式 (変位法)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x,y)$$

より.

$$-D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right) - 2(1-\nu)D\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right) = -p$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}p(x,y)}$$

☆ 変位法の手順.

(i) $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \dfrac{p(x,y)}{D}$ より $w(x,y)$ を求める。

[梁] $\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \dfrac{p(x)}{EI}$

(ii) $M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$

$M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$

$M = -EI\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$M_{xy} = -2\left(\dfrac{1-\nu}{2}D\right)\cdot\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

$q_x = -D\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)$

$q_y = -D\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)$

これらの式により、断面力を求める。

$S = -EI\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3}$

(iii) $\sigma_x = \dfrac{M_x}{I}z$ $\left[I = \dfrac{t^3}{12}\right]$

$\sigma_y = \dfrac{M_y}{I}z$

$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \dfrac{M_{xy}}{I}z$

$\tau_{xz} = \dfrac{q_x}{t}$ $\left(\because\ q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz}\,dz\right)$

$\tau_{yz} = \dfrac{q_y}{t}$ $\left(\because\ q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz}\,dz\right)$

これらより、各応力を求める。

(iv) 構成方程式よりひずみが求まる。

板の理論

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - q_x = 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - q_y = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x,y)$$

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \\ & \left(\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= -2\left(\frac{1-\nu}{2}D\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right) \end{aligned}\right.$$

梁の理論

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} = -p$$

せん断力と荷重

$$\frac{\partial M}{\partial x} = S$$

曲げモーメントとせん断力

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -p(x)$$

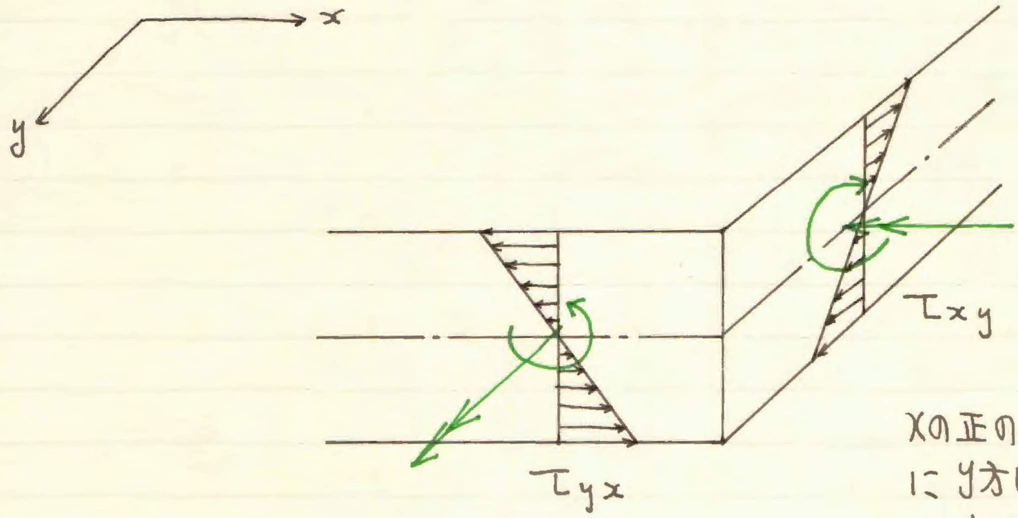
曲げモーメントと荷重.

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{p(x)}{EI} \\ & \left(\because M = -EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \end{aligned}\right.$$

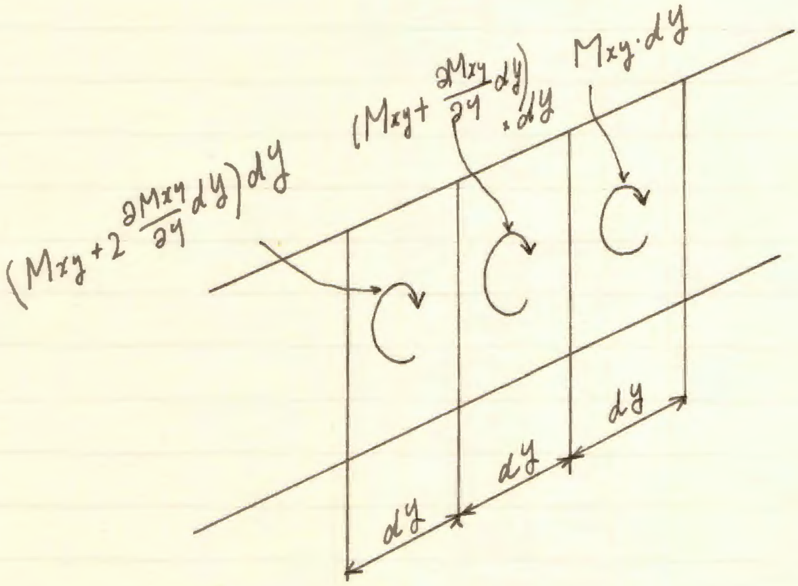
変位法.

◎ 境界条件（支持条件）による積分定数の決定。

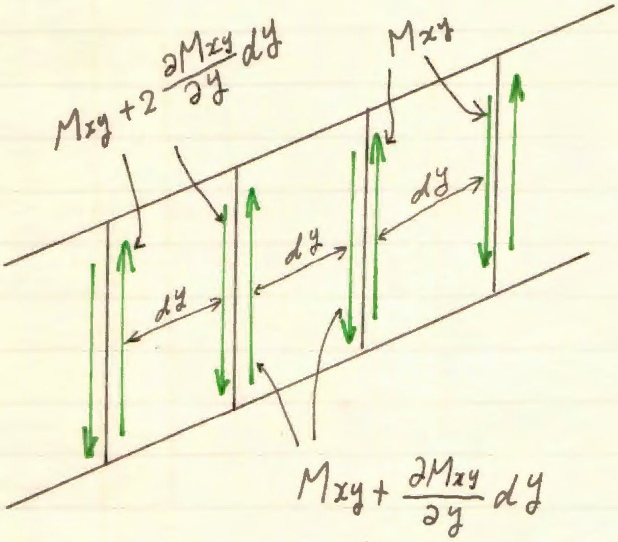
（☆） ねじりモーメントによる反力。



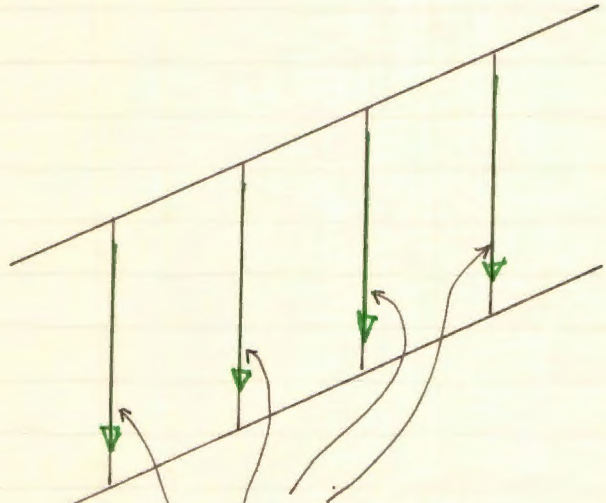
Xの正の面の正領域に Y方向に正の直応力が与えられる。
<正のねじりモーメント>



（a）



(b)



$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dy$ ： 一様分布 $\left\langle \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right\rangle$ のせん断力。

(c)

○ Kirchhoff の換算力．

$$\bar{q}_x = q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

等価合せん断力

鉛直方向のせん断力

ねじりモーメントによるせん断力に相当する。

(単純支持では、ねじりに対する反力はこの換算力となる)

↓

〈固定支持では、~~ねじり~~反力ねじりモーメントが生ずる〉

同様に

$$\bar{q}_y = q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

(換算力)

$$\bar{q}_x = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) - (1-\nu) D \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

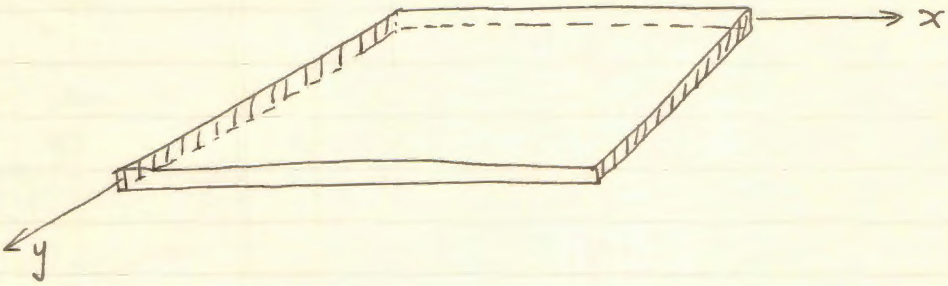
$$= -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]$$

$$\bar{q}_y = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right) - (1-\nu) D \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$$

$$= -D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]$$

◎ 支持条件

(I) 単純支持 (yz面を考える — x=const.)



たわみ零 $\boxed{w = 0}$

たわみ角 $\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$ $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \text{const.}$

曲げモーメント零. $\boxed{M_x = 0}$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

or

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0$$

or $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w = 0$

〈ナビヤの境界条件〉

反力 $\bar{q}_x = -D\left[\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]$

(II) 固定支持 (;)

$\boxed{w = 0}$ (たわみなし)

$\boxed{\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0}$ $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0\right)$ — たわみ角なし

反力 $q_x = -D\left[\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]$

(III) 自由端

$w \neq 0$, $\partial w/\partial x \neq 0$, $\partial w/\partial y \neq 0$.

$\boxed{M_x = 0}$

or $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

$\boxed{\overline{q}_x = 0}$

or $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$

横方向の荷重をうける Schaibe, disk, 盤

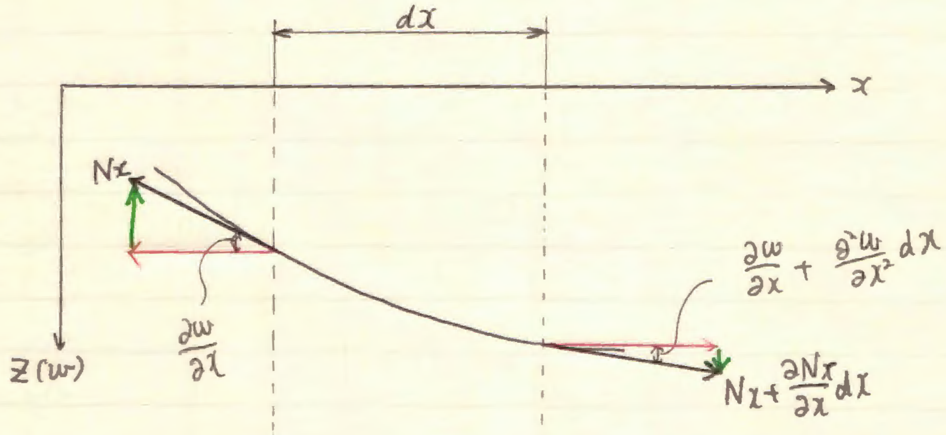
の釣合い方程式

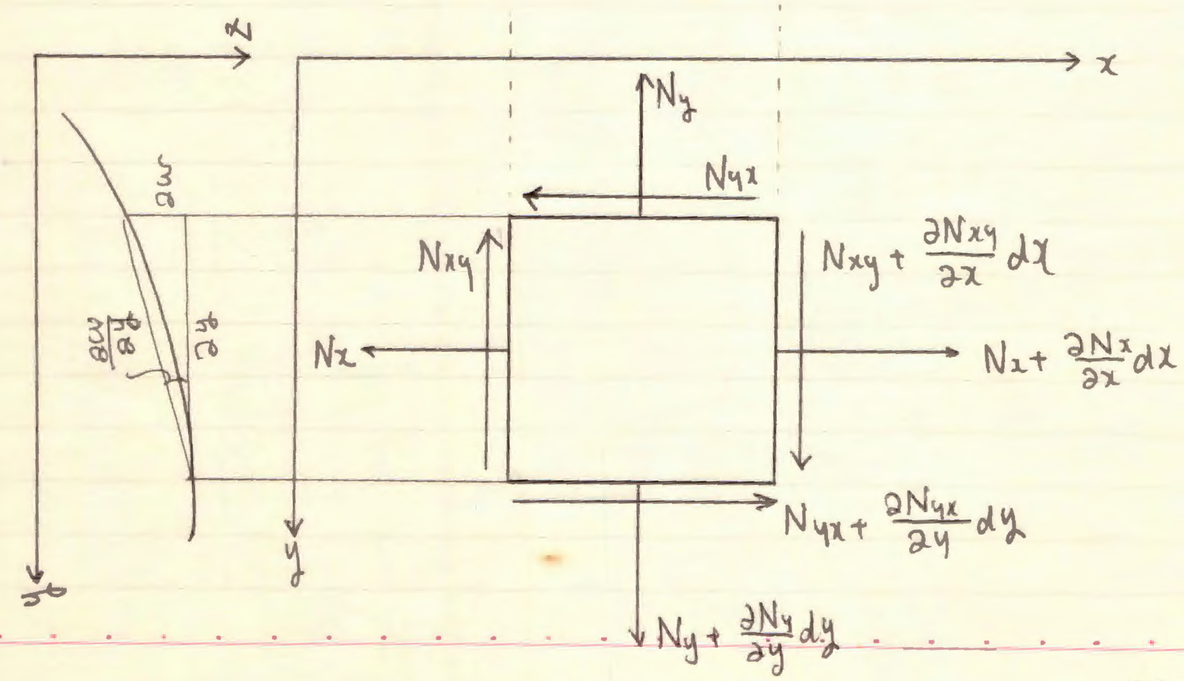
<有限変形理論>

変形後のつり合い。

新たに考えられる内力　軸力 N_x, N_y

せん断力 N_{xy}, N_{yx}
(水平)





(1) x方向のつり合い。

$$\left(\cancel{N_x}+\frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)dy-\cancel{N_x dy}+\left(\cancel{N_{yx}}+\frac{\partial N_{yx}}{\partial y}dy\right)dx-\cancel{N_{yx}dx}=0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{yx}}{\partial y}=0$$

(2) y方向のつり合い

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0$$

(3) 鉛直方向の力 (下向き正)

① N_xの鉛直成分

$$-N_x dy\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+\left(N_x+\frac{\partial N_x}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx\right)dy$$

$$\approx N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx\,dy+\frac{\partial N_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\cdot dx\,dy+\underbrace{\frac{\partial N_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx^2 dy}_{\text{neglect}}$$

② N_yの鉛直成分

$$N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dx\,dy+\frac{\partial N_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}dx\,dy$$

③ N_{xy}の鉛直成分

$$-\cancel{N_{xy}\,dy\,\frac{\partial w}{\partial y}}+\left(N_{xy}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dx\right)dy$$

$$\approx N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}dx\,dy+\underbrace{\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dx^2 dy}_{\text{neglect}}$$

④ N_{yx} の鉛直成分

$$N_{yx}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}dx\,dy$$

$$= N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dx\,dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}dx\,dy$$

①〜④ の合計

$$\Big(N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$+ N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\Big)dx\,dy$$

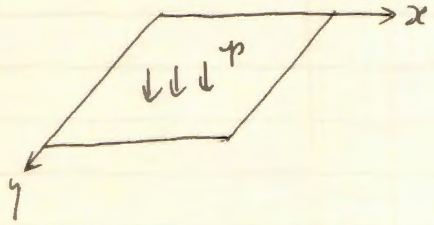
$$= \Big\{\Big(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\Big)\frac{\partial w}{\partial x} + \Big(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\Big)\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$+ N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big\}dx\,dy$$

$$= \Big(N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big)dx\,dy.$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\Big[\underline{\underline{p}} + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big]$$

板の座屈 $p=0$



微小変形の仮定の下に、 $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \dfrac{p}{D}$

変形する前の形状で
つり合いを考える。

$\Downarrow$

有限変形理論の下に、
変形した後の状態で
つり合いを考える。

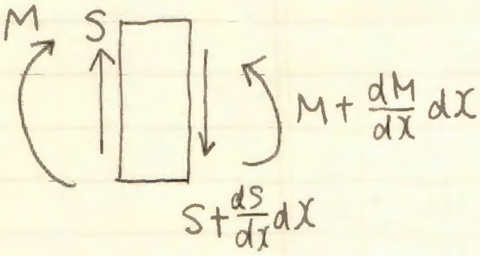
横方向荷重のため、 N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}
が生じ、これの鉛直成分が鉛直荷重 $p(x,y)$
の他に作用することになる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left[p + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]$$

板の座屈を考える場合は

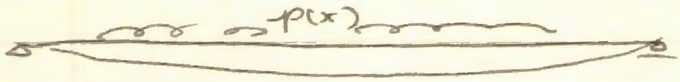
$p(x,y) = 0$ と考える。

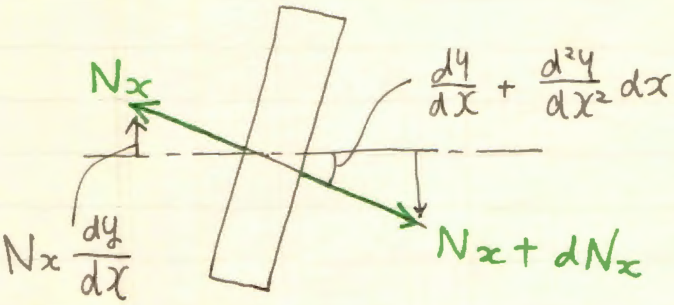
梁における有限変形.



$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{p}{EI}$$

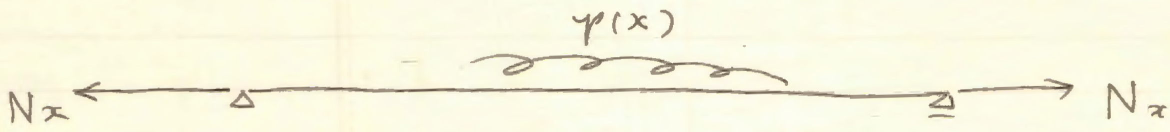




~~鉛直のつり合い~~・鉛直方向の力の和.

$$\left(N_x+\frac{dN_x}{dx}dx\right)\left(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}dx\right)-N_x\frac{dy}{dx}$$

$$= N_x\frac{d^2y}{dx^2}dx + \frac{dN_x}{\cancel{dx}}\cancel{dx}\frac{dy}{dx}$$



$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = p + N_x\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$p = 0$$

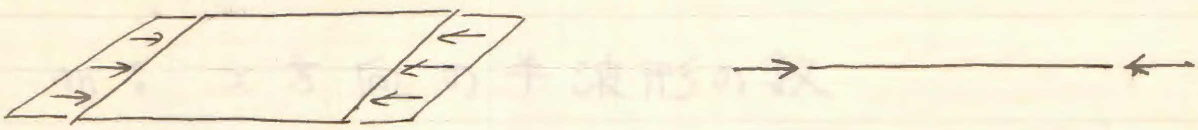
$$EI\frac{d^4y}{dx^4} - N_x\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{N_x}{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Euler の 座屈荷重が求まる。

$$y = A\sin kx + B\cos kx$$

⋮



$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} k \left(\frac{t}{b}\right)^2 \qquad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2} m^2$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E t^3}{12(1-\nu^2) b^2} k \qquad P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{l^2} m^2$$

半波長の数
(形)

$$= \frac{\pi^2 E D}{b^2} k.$$

板 幅 ⟷ 柱長

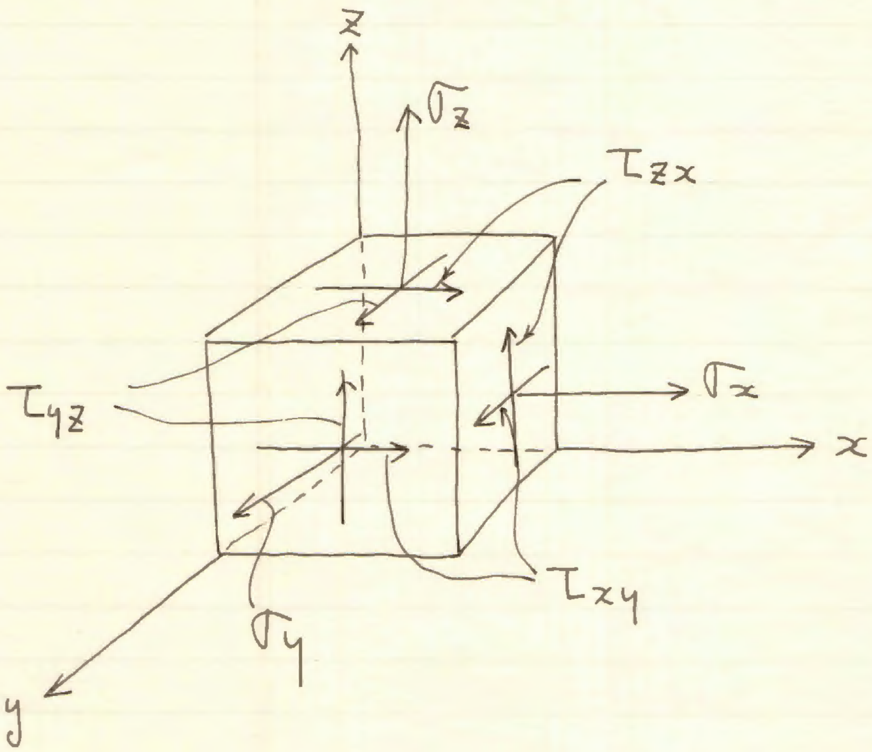
幅厚比 ⟷ 細長比.

$$D = \frac{t^3}{12} \cdot \frac{1}{1-\nu^2} \qquad k = \left(\frac{m}{\alpha} + n^2 \frac{\alpha}{m}\right)^2$$

力方向の半波形の数 (m) 及び $\alpha = a/b$ による。

◎ 最小ポテンシャルエネルギの原理よりの座屈荷重の求め方.

$$U_0 = \iiint_V \sigma^* \varepsilon \, dx\, dy\, dz$$



$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}$$

純曲げ

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y\}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}$$

$$M = (M_x, M_y)$$

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{r_x}, \frac{1}{r_y}\right)$$

$$U_0 = \frac{1}{2}\iiint [\sigma_x \ , \ \sigma_y] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y)\, dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\iiint \left(\varepsilon_x^2 + 2\nu\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 \right) \frac{E}{1-\nu^2}\, dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)}\iiint \left[\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right] dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)}\iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right] \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2\, dz\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right] dx\,dy$$

* 曲げモーメントから.

$$U_0 = \frac{1}{2}\iint \left(M_x \frac{1}{r_x} + M_y \frac{1}{r_y} \right) dx\,dy$$

$$= \frac{D}{2}\iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx\,dy$$

= 同式

(2) 横荷重による曲げをうける板.
（鉛直）

$$dU_0 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,dz\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}D\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\}dx\,dy$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot G\cdot\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} 4\underset{\nearrow \frac{t^3}{12}}{z^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 dz\,dx\,dy$$

$$G\gamma_{xy}^2 = G\cdot(4z^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}D\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\}dx\,dy$$

$$2\times\frac{1}{2}\cdot\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\cdot(1-\nu) \leftarrow \quad + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{E}{\cancel{2}(1+\nu)}\cdot\cancel{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}D\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

$$\therefore U_0 = \frac{1}{2}D\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

$$u_0 = \frac{1}{2}\iint \left(M_x \frac{1}{r_x} + M_y \frac{1}{r_y} + M_{xy}\frac{1}{r_{xy}} + M_{yx}\frac{1}{r_{yx}} \right) dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\iint \left\{ +D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu)D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

$$= \frac{D}{2}\iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

(3) 曲げと引張又は圧縮を受ける板

$$dU_0 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy})\, dz\, dx\, dy$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} - z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} - z\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} - 2z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$dU_0 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2}\left\{\left[(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)\varepsilon_x + (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)\varepsilon_y\right] + \frac{1}{2}(1-\nu)\gamma_{xy}^2\right\} dz\, dx\, dy$$

軸方向

$$\begin{cases} = \dfrac{Et}{2(1-\nu^2)}\left\{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \dfrac{1}{2}(1-\nu)\gamma_{xy}^2\right\} dx\, dy \\ = \dfrac{Et}{2(1-\nu^2)}\left\{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + 2(\nu-1)\varepsilon_x\varepsilon_y + \dfrac{1}{2}(1-\nu)\gamma_{xy}^2\right\} dx\, dy \\ = \dfrac{Et}{2(1-\nu^2)}\left\{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + 2(1-\nu)\left\{\dfrac{\gamma_{xy}^2}{4} - \varepsilon_x\varepsilon_y\right\}\right\} dx\, dy \\ = \cancel{\dfrac{Et}{2(1-\nu^2)}} \end{cases}$$

曲げ

$\frac{1}{2}\ z^2$

$\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} \dfrac{E}{2(1-\nu^2)}\displaystyle\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz \left\{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + 2(1-\nu)\left\{\dfrac{\gamma_{xy}^2}{4} - \varepsilon_x\varepsilon_y\right\}\right\} dx\, dy \\ = \dfrac{Et^3}{2\cdot 12(1-\nu^2)}\left\{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + 2(1-\nu)\left\{\dfrac{\gamma_{xy}^2}{4} - \varepsilon_x\varepsilon_y\right\}\right\} dx\, dy \end{cases}$$

$$\therefore \quad dU_{0p} = \frac{Et}{2(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2(1-\nu)\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right\}\right] dx\,dy$$

$$dU_{0b} = \frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}\right] dx\,dy$$

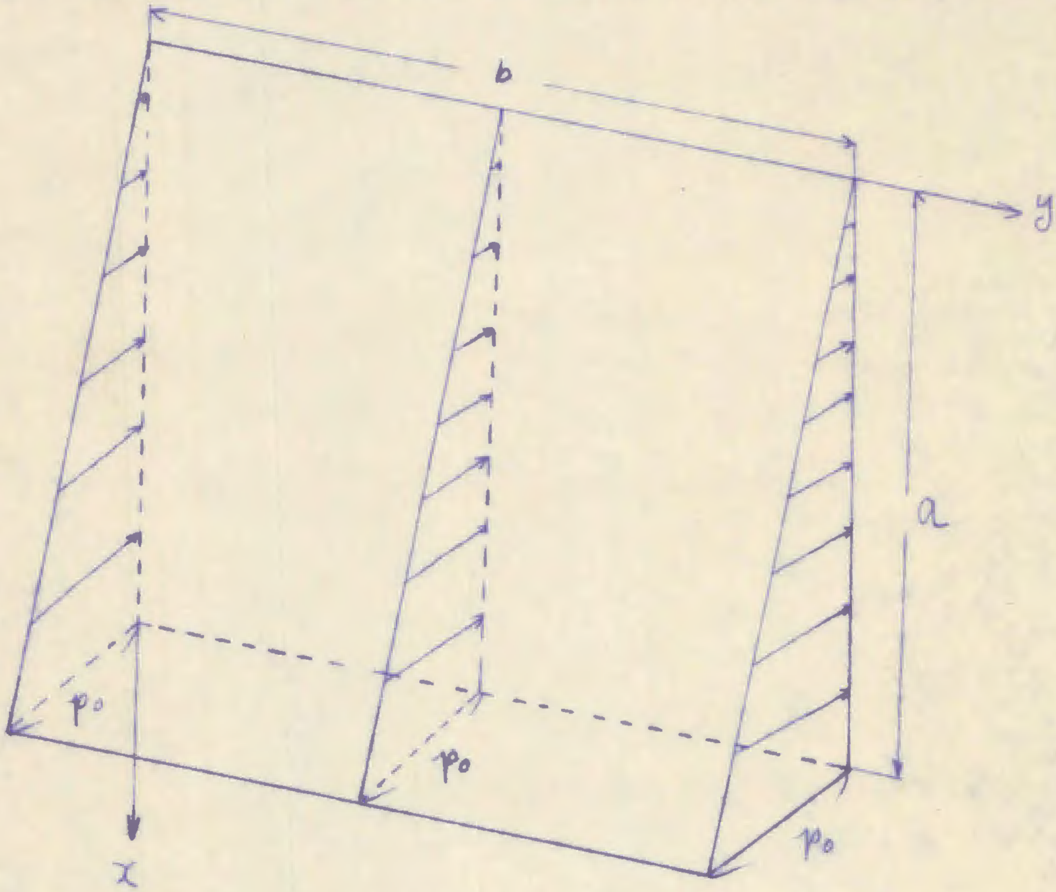
$$U_p = \frac{Et}{2(1-\nu^2)}\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2(1-\nu)\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right\}\right] dx\,dy$$

$$U_b = \frac{D}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}\right] dx\,dy$$

[1]　四辺単純支持の長方形等方性平板が

$$p = p_0 \frac{x}{a} \quad (y方向に一定)$$

を受けるときの ~~最大~~ 曲げモーメント 及び ~~最大~~ たわみ ~~の生ずる位置を~~



~~その各々の大きさ~~を求めよ。

境界条件

$$\begin{cases} x = 0,\ a \rightarrow w = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \\ y = 0,\ b \rightarrow w = 0, \quad \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \end{cases}$$

まず、たわみ $w(x,y)$ を2つの方法で求める。

[解1] 未定係数法による。

w の解として、境界条件を満たす次のフーリエ級数を考える。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad \cdots\cdots (1)$$

荷重 $p(x,y)$ も同形のフーリエ級数に展開する。

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad \cdots\cdots (2)$$

(1)より

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \\
\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \\
\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}
\end{aligned}\right\} \cdots (3)$$

(2)における任意の係数を a_{ij} とし、(2)式両辺に $\sin(i\pi x/a)\cdot\sin(j\pi y/b)\,dx\,dy$ を掛けて $x=0\sim a$, $y=0\sim b$ で積分する。

$$\int_0^b\int_0^a p(x,y) \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b}\,dx\,dy = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^b\int_0^a a_{ij} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{j\pi y}{b}\,dx\,dy$$

ここで

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{i\pi x}{a} = \begin{cases} 0 & (m \neq i) \\ \dfrac{a}{2} & (m = i) \end{cases}$$

$$\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{j\pi y}{b} = \begin{cases} 0 & (n \neq j) \\ b/2 & (n = j) \end{cases}$$

である。

$$\therefore\ a_{ij}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a p(x,y)\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\,dx\,dy$$

ここで、 $p(x,y)=p_0\dfrac{x}{a}$ であるから、

$$a_{ij}=\frac{4p_0}{a^2b}\int_0^b\int_0^a x\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\,dx\,dy \qquad \cdots (4)$$

(4)式において

$$\int_0^a x\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx=\int_0^a x\left(-\frac{a}{i\pi}\cos\frac{i\pi x}{a}\right)'dx$$

$$=-\frac{a}{i\pi}\left\{\left[x\cos\frac{i\pi x}{a}\right]_0^a-\int_0^a\cos\frac{i\pi x}{a}\,dx\right\}$$

$$=-\frac{a}{i\pi}\left\{a\cos i\pi-\left[\frac{a}{i\pi}\sin\frac{i\pi x}{a}\right]_0^a\right\}=-\frac{a^2}{i\pi}\cos i\pi$$

$$\int_0^b\sin\frac{j\pi y}{b}\,dy=-\frac{b}{j\pi}\left[\cos\frac{j\pi y}{b}\right]_0^b=-\frac{b}{j\pi}(\cos j\pi-1)$$

$$\therefore\ a_{ij}=\frac{4p_0}{a^2b}\cdot\left\{-\frac{a^2}{i\pi}\cos i\pi\right\}\left\{-\frac{b}{j\pi}(\cos j\pi-1)\right\}$$

$$=\frac{4p_0}{\pi^2}\cdot\frac{1}{ij}\cos i\pi(\cos j\pi-1)$$

$$\cos i\pi(\cos j\pi-1)=\begin{cases}0 & (j\text{が偶数})\\ 2 & (j\text{が奇数, }i\text{も奇数})\\ -2 & (j\text{が奇数, }i\text{は偶数})\end{cases}$$

よって

$$a_{ij} = \frac{4p_0}{\pi^2} \cdot \frac{1}{ij} \cdot (-1)^{i+1} \cdot 2 = \frac{8p_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{i+1}}{ij} \qquad \cdots \quad (5)$$

ここで

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}$$

に、(3)、(2)式を代入すると.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\,\pi^4 \left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{m=1,2,3,\cdots}^{\infty}\ \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{8p_0}{\pi^2}\frac{(-1)^{m+1}}{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\therefore\ A_{mn} = \frac{8p_0}{\pi^6 D}\ \frac{(-1)^{m+1}}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \qquad \left(\begin{array}{l} m = 1, 2, 3, 4, \cdots \\ n = 1, 3, 5, 7, \cdots \end{array}\right)$$

$$\therefore\ w = \frac{8p_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1,2,3,\cdots}^{\infty}\ \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

[解2] エネルギー法による。

[解1] と同様に、$w(x, y)$ を次のようにおく。

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (1)$$

横荷重による曲げを受ける板にたくわえられるひずみエネルギー U は、

$$U = \frac{1}{2}D\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right\}dxdy$$

であり、(1) より

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right) \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

であるから、

$$U = \frac{1}{2}D\iint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(\nu-1)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$= \frac{1}{2}D\iint\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right]^2 dxdy$$

$$+D(\nu-1)\iint\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}\right.$$

$$\left. - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos^2\frac{m\pi x}{a}\cos^2\frac{n\pi y}{b}\right]dxdy$$

$$\iint\left(\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b} - \cos^2\frac{m\pi x}{a}\cos^2\frac{n\pi y}{b}\right)dxdy = 0$$

$$\therefore\ U = \frac{1}{2} D \int_0^b \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left\{ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right\}^2 \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b}\, dy = \frac{b}{2} \quad , \quad \int_0^a \sin^2 \frac{m\pi x}{a}\, dx = \frac{a}{2}$$

$$\therefore\ U = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left\{ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\}^2$$

係数 A_{mn} に微小増分 δA_{mn} を与えたとき，これに対する仮想変位は

$$\delta w = \delta A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

であるから，仮想仕事 δW は，

$$\delta W = \int_0^b \int_0^a p_0 \frac{x}{a} \delta A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$= \frac{p_0}{a} \delta A_{mn} \int_0^b \int_0^a x \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$\therefore\ \delta W = \frac{2ab\, p_0}{\pi^2} \frac{(-1)^{m+1}}{mn} \delta A_{mn} \quad \left(\begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \cdots \\ n = 1, 3, 5, \cdots \end{array} \right)$$

（∵ 解[1]における積分計算と同様）

仮想仕事の原理より，

$$\delta W = \frac{\partial U}{\partial A_{mn}} \delta A_{mn}$$

$$\therefore\ \frac{2ab\, p_0}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{mn} \delta A_{mn} = \frac{\pi^4 ab}{4} D A_{mn} \left\{ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\}^2 \delta A_{mn}$$

$$\therefore\ A_{mn} = \frac{8 p_0}{\pi^6 D} \frac{(-1)^{m+1}}{mn \left\{ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\}^2} \quad \left(\begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \cdots \\ n = 1, 3, 5, \cdots \end{array} \right)$$

$$\therefore \quad w(x,y) = \frac{8p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,2,3\cdots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

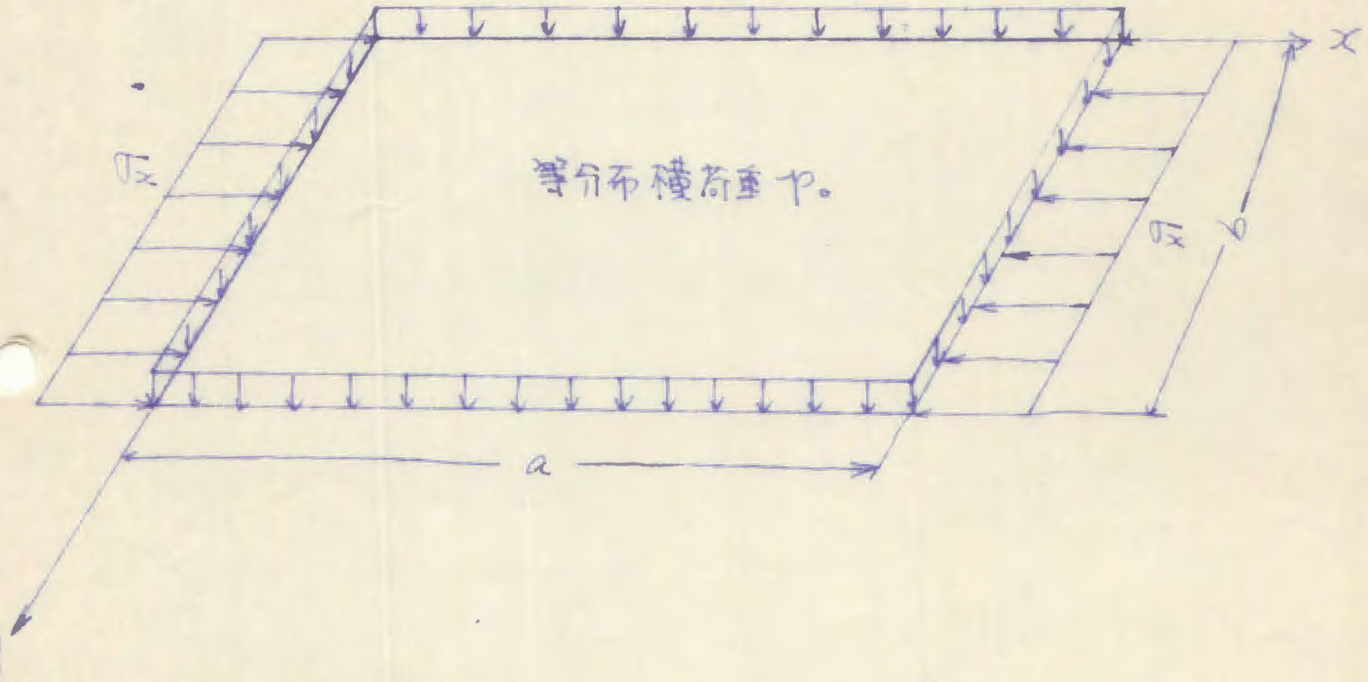
また

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{8p_0}{\pi^4} \sum_{m=1,2,3\cdots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \nu\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi}{b}$$

$$M_y = \frac{8p_0}{\pi^4} \sum_{m=1,2,3\cdots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \left\{\left(\frac{n}{b}\right)^2 + \nu\left(\frac{m}{a}\right)^2\right\} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi}{b}$$

[2]



四辺単純支持の長方形等方性平板

たわみ と 曲げモーメント を求めよ。

境界条件

$$\begin{cases} x=0,a \longrightarrow w=0,\ \partial^2 w/\partial x^2=0 \\ y=0,b \longrightarrow w=0,\ \partial^2 w/\partial y^2=0 \end{cases}$$

$w(x,y)$の解として、次のフーリエ級数を考える。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (1)$$

荷重（横方向）$p(x,y)$も同様のフーリエ級数を考える。

$$p = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (2)$$

中心面内の荷重として $N_x = -\sigma_x t$, $N_y = 0$, $N_{xy} = 0$ である。

この場合の基礎方程式は、

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (3)$$

である。

(1)より

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \\
\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \\
\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(2) における係数 a_{mn} は、問題[1]と同様に、

$$a_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a p(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$p(x,y) = p_0 \;(=\text{const})$ のとき、

$$a_{mn} = \frac{4p_0}{ab}\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\,dx\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

$$= \frac{4p_0}{ab}\left(\frac{a}{m\pi}\times 2\right)\left(\frac{b}{n\pi}\times 2\right)$$

$$\therefore\; a_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2}\cdot\frac{1}{mn} \qquad (m,n = 1, 3, 5, \cdots) \qquad (5)$$

(4), (5), (2) より、(3) を書きなおすと、

$$\sum_m\sum_n A_{mn}\pi^4\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} - \sum_m\sum_n A_{mn}\frac{\pi^2\sigma_x t}{D}\left(\frac{m}{a}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$= \sum_m\sum_n \frac{16p_0}{\pi^2 D}\cdot\frac{1}{m\cdot n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

係数を比較して、

$$A_{mn} = \frac{16p_0}{D\pi^2 mn}\cdot\frac{1}{\pi^4\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2 - \frac{\pi^2\sigma_x t}{D}\left(\frac{m}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{16p_0}{\pi^6 D}\;\frac{1}{mn}\cdot\frac{1}{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2 - \frac{\sigma_x t}{\pi^2 D}\left(\frac{m}{a}\right)^2}$$

$$\therefore\; w = \frac{16p_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\;\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{mn\left[\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2 - \frac{\sigma_x t}{\pi^2 D}\left(\frac{m}{a}\right)^2\right]}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

*

$$= \frac{16 P_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \nu\left(\frac{n}{b}\right)^2}{mn\left[\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2 - \frac{\sigma_x t}{\pi^2 D}\left(\frac{m}{a}\right)^2\right]} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi}{b}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$= \frac{16 P_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{b}\right)^2 + \nu\left(\frac{m}{a}\right)^2}{mn\left[\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2 - \frac{\sigma_x t}{\pi^2 D}\left(\frac{m}{a}\right)^2\right]} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi}{b}$$

[2]における座屈~~荷重~~応力を求める。

$$w=\frac{16P_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,2,3}^{\infty}\frac{1}{mn\left[\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2-\frac{\sigma_x t}{\pi^2 D}\left(\frac{m}{a}\right)^2\right]}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

座屈~~荷重~~応力を σ_{cr} とすると、

$$\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2-\frac{\sigma_{cr}t}{\pi^2 D}\left(\frac{m}{a}\right)^2=0$$

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 D}{t}\,\frac{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2}{\left(\frac{m}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{t}\cdot\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\cdot\left\{\frac{m}{a}+\frac{n^2}{b^2}\cdot\frac{a}{m}\right\}^2$$

$$=\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2\left\{\frac{bm}{a}+n^2\frac{a}{bm}\right\}^2$$

$$=\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2\left\{\frac{m}{\alpha}+n^2\frac{\alpha}{m}\right\}^2 \qquad \left(\text{ただし}\ \alpha=\frac{a}{b}\right)$$

$$=\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}k\left(\frac{t}{b}\right)^2$$

$$k=\left(\frac{m}{\alpha}+n^2\frac{\alpha}{m}\right)^2$$

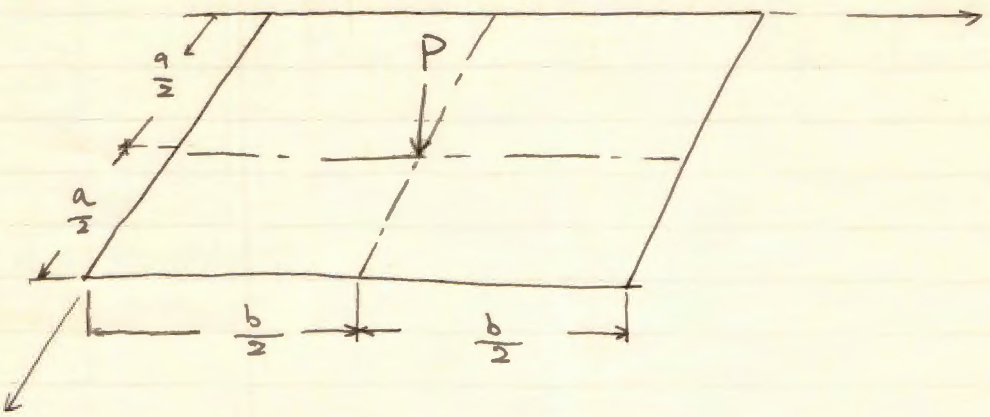
特に $n=1$ のとき

$$k=\left(\frac{m}{\alpha}+\frac{\alpha}{m}\right)^2$$

である。

この結果は四辺単純支持板の座屈応力と一致する。

[5·1]



周辺単純支持。　たわみを求めよ。

境界条件　$x=0,\ a$　$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$

$y=0,\ b$　$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$ とおく。

$$p=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a p(x,y)\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$p(x,y)=P$ $\left(x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}\right)$ より

$$a_{mn}=\frac{4}{ab}\cdot P\cdot\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$
m+n \quad \left|\quad \begin{cases} 4n-3 & 1 \\ 4n-2 & 0 \\ 4n-1 & -1 \\ 4n & 0 \end{cases}\right.
$$

m = 偶数 , n = 偶数

$$a_{mn} = 0$$

$m = 2l+1$, $n = 2k+1$ のとき 及び $m = 2l-1$, $n = 2k-1$ のとき

$$a_{mn} = \frac{4}{4b} P$$

$m = 2l+1$, $n = 2k-1$ 及び $m = 2l-1$, $n = 2k+1$ のとき

$$a_{mn} = -\frac{4}{ab} P$$

$$\therefore \quad a_{mn} = \frac{4}{ab} P \cdot \sin\frac{m\pi}{2} \sin\frac{n\pi}{2} \quad ?$$

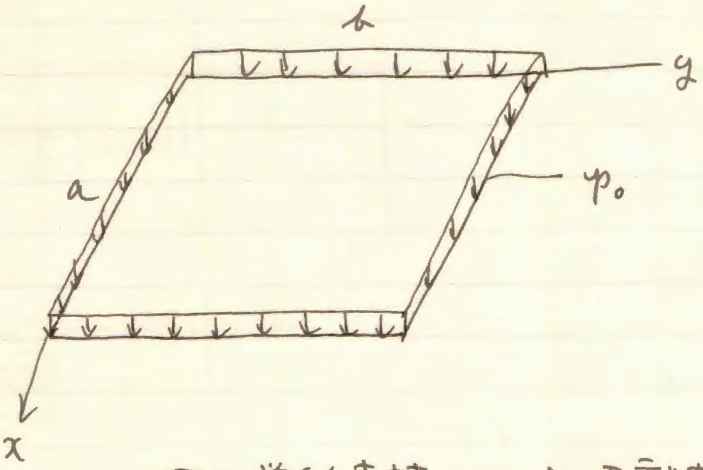
$$A_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{a_{mn}}{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} = \frac{4P}{\pi^4 D a b} \sin\frac{m\pi}{2} \sin\frac{n\pi}{2}$$

$(m, n = 1, 3, 5, \cdots)$

$$\therefore \quad w = \frac{4P}{\pi^4 D a b} \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi}{2} \sin\frac{n\pi}{2}}{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

//

[5.2]



周辺単純支持 ⟶ エネルギー法でたわみを求める。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad ①$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_m\sum_n A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\sum_m\sum_m A_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \sum_m\sum_n A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$U_0 = \frac{1}{2}D\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}D\iint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(\nu-1)\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}\right]dx\,dy$$

$$= \frac{\pi^4}{2}D\sum_m\sum_n A_{mn}^2\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2\iint \sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$+\pi^4 D(\nu-1)\sum_m\sum_n A_{mn}^2\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(\frac{n}{b}\right)^2\iint\left(\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b} - \cos^2\frac{m\pi x}{a}\cos^2\frac{n\pi y}{b}\right)d$$

$$\int_0^a \sin^2\frac{m\pi x}{a}dx = \int_0^a \cos^2\frac{m\pi x}{a} = \frac{a}{2}, \quad \int_0^b \sin^2\frac{n\pi y}{b}dy = \int_0^b \cos^2\frac{n\pi y}{b}dy = \frac{b}{2}$$

$$\therefore\ U = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_m \sum_n A_{mn}^2 \left\{ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\}^2$$

仮想変位

$$\delta w = \delta A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

外力の仮想仕事 = ひずみエネルギの増分.
δW　　　　　　δU

$$\cancel{\delta W = \delta A_{mn}\ p \cdot \sin\frac{m\pi}{2} \sin\frac{n\pi}{2} \quad (m, n = 1, 3, 5, \cdots)}$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial A_{mn}} \delta A_{mn}$$

$$= \frac{\pi^4 ab}{4} D A_{mn} \left\{ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\}^2 \delta A_{mn}$$

~~$\delta W = \delta U$ より~~

~~$A_{mn} =$~~

$$\delta W = \int_0^a \int_0^b \delta A_{mn}\, p_0 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

$$= \delta A_{mn}\, p_0 \int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx \cdot \int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\, dy$$

$$= \delta A_{mn} \cdot p_0 \cdot \frac{ab}{\pi^2 mn} (\cos m\pi - 1)(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{4ab\, p_0}{\pi^2 mn} \delta A_{mn} \cdot \qquad (m, n = 1, 3, 5, \cdots)$$

$\delta W = \delta U$ より

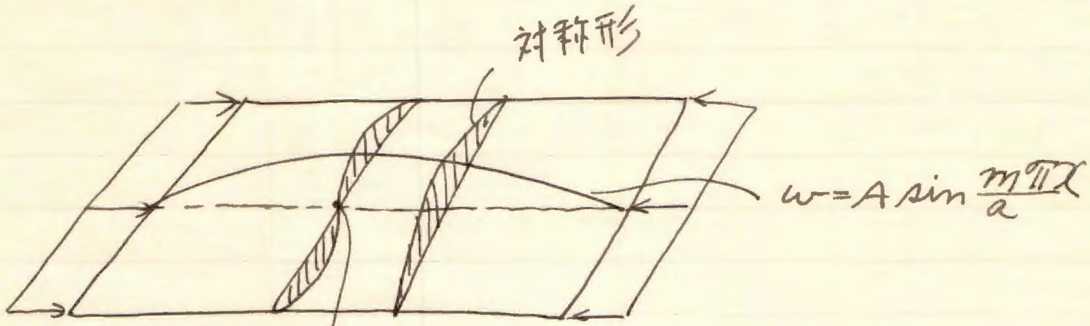
$$A_{mn} = \frac{4ab\,p_0}{\pi^2 mn} \cdot \frac{4}{\pi^4 abD} \frac{1}{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2}$$

$$= \frac{16\,p_0}{\pi^6 D} \frac{1}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2}$$

$$\therefore\ w = \frac{16\,p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

//

5/24.　5.5 板の座屈強度



x方向の変形を拘束する

↓

座屈荷重が大きくなる。

$$w=\sin\frac{m\pi x}{a}\left(C_1\cosh k_1 y+C_3\cos k_2 y\right)$$

$y=\pm\frac{b}{2}$,　　$w=0$

$M_y=0$　　$\partial^2 w/\partial x^2=0$　　$\partial^2 w/\partial y^2=0$

$$C_1\cosh k_1\frac{b}{2}+C_3\cos k_2\frac{b}{2}=0 \qquad w=0 \text{ より}$$

$$C_1 k_1^2\cosh k_1\frac{b}{2}-C_3 k_2^2\cos k_2\frac{b}{2}=0 \qquad M_y=0 \text{ より}$$

$C_1=C_3=0$ ，$w=0$ も解ではあるが

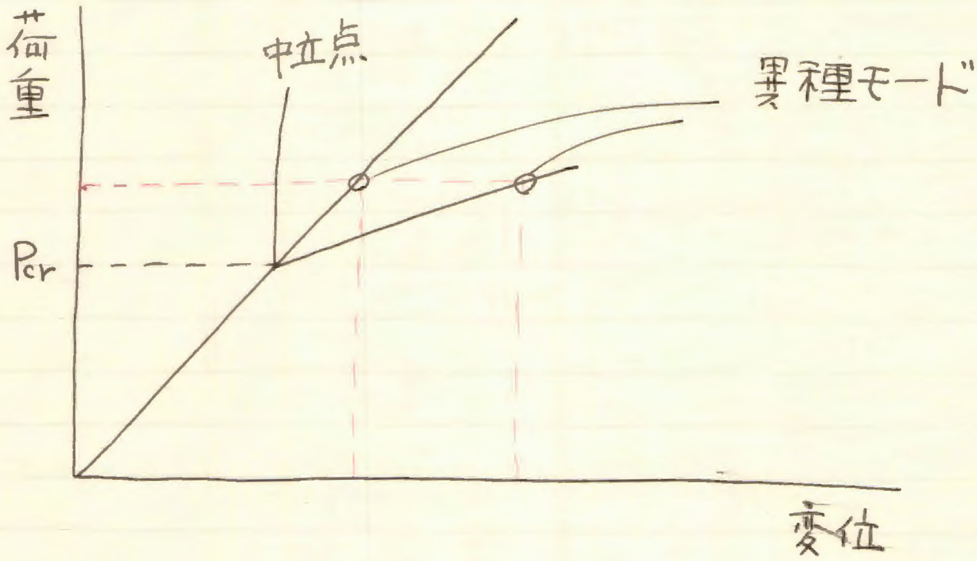
座屈しない状態を示す → 無意味。

斉次方程式

数学的に　固有値に対して ω が存在する

力学的に　或る荷重（座屈荷重）に対して、
座屈という現象が可能である。

（ k_1 , k_2 には P_{cr} が含まれる ）



固有値

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad x_1 , x_2 \neq 0$$

↓

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \cosh k_1 \frac{b}{2} & \cos k_2 \frac{b}{2} \\ k_1^2 \cosh k_1 \frac{b}{2} & -k_2^2 \cos k_2 \frac{b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$C_1 \neq 0 \quad , \quad C_3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \cosh k_1 \frac{b}{2} & \cos k_2 \frac{b}{2} \\ k_1^2 \cosh k_1 \frac{b}{2} & -k_2^2 \cos k_2 \frac{b}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\cosh k_1 \frac{b}{2}}_{\neq 0} \cos k_2 \frac{b}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \cos k_2 \frac{b}{2} = 0$$

$$k_2 \frac{b}{2} = \frac{m\pi b}{2a}\sqrt{\mu - 1} = \frac{m\pi}{2\alpha}\sqrt{\mu - 1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mu^2 &= \left\{ \left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 + 1 \right\}^2 \\ D &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \right.$$

板.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{m} + \frac{m}{\alpha}\right)^2$$

$$k = \left(\frac{\alpha}{m} + \frac{m}{\alpha}\right)^2$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)\cdot\left(\frac{b}{t}\right)^2} \cdot k$$

$$= k \cdot \frac{\pi^2 \bar{E}}{\left(\frac{b}{t}\right)^2}$$

$$\left(\bar{E} = \frac{E}{12(1-\nu^2)}\right.$$

$\frac{b}{t}$: 幅厚比.

柱.

$$\sigma_{cr} = \sigma_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

柱の Euler 座屈荷重.

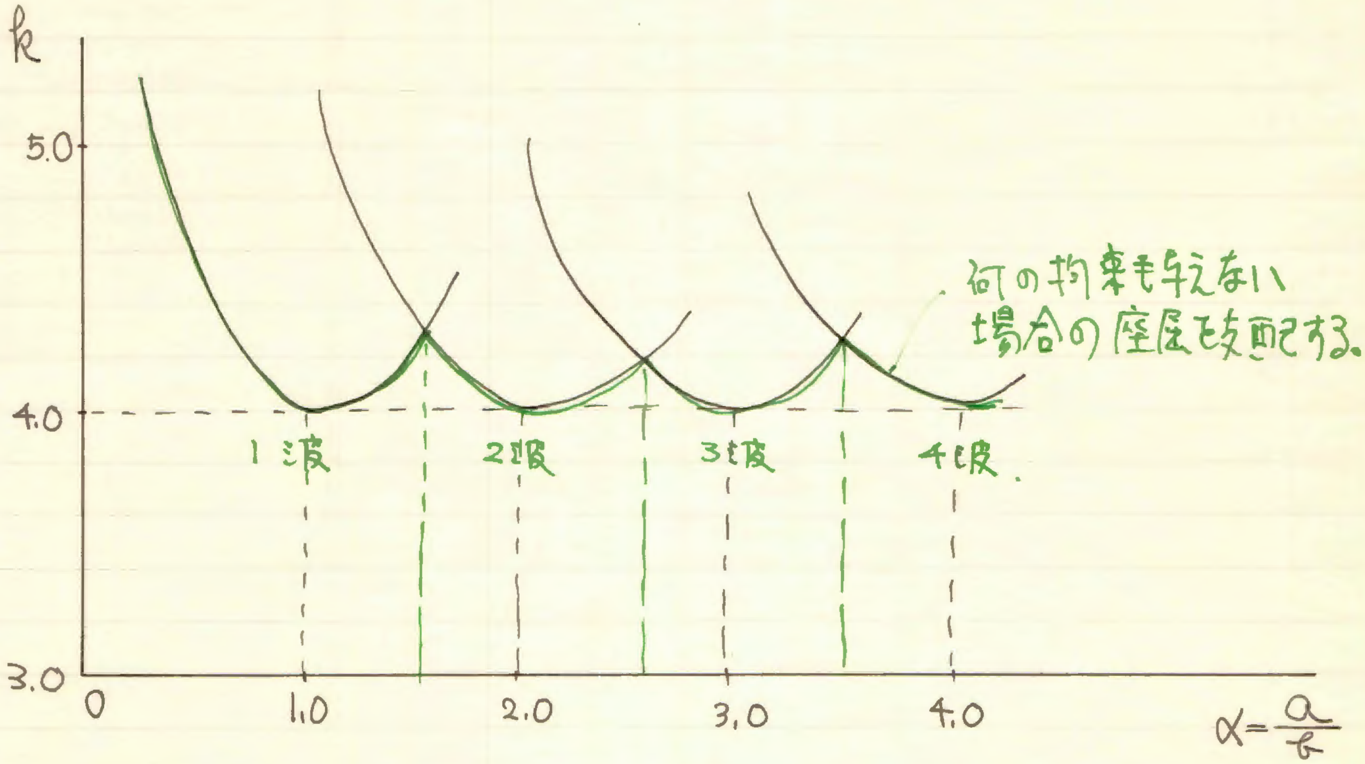
$\frac{l}{r}$: 細長比.

$\sigma_{cr} = k \cdot \sigma_e$ とおくと.

x方向の半波形の数

<u>座屈係数</u> k : 板の形(α)(a/b)と 座屈形(m) で決まる.

σ_e : 板の寸法(b/t), 材料(E, ν) で決まる.



∘ $m=m$ と $m=m+1$ の境界の $\alpha=\bar{\alpha}$

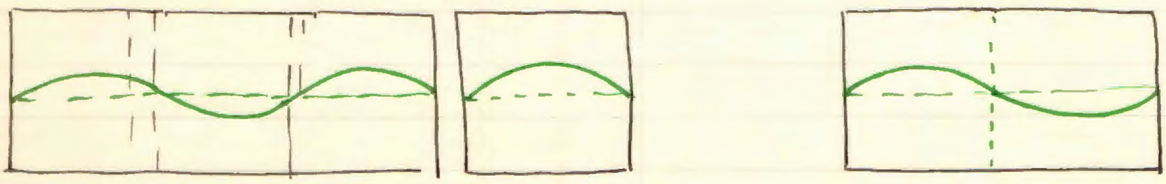
$$\frac{\bar{\alpha}}{m}+\frac{m}{\bar{\alpha}}=\frac{\bar{\alpha}}{m+1}+\frac{m+1}{\bar{\alpha}}$$

$$\bar{\alpha}=\sqrt{m(m+1)}$$

∘ k の最小値

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha}=0 \longrightarrow \cancel{\alpha=0} \quad \alpha=1,2,3,4,\cdots$$

$\alpha=3$ $\alpha=1$ $\alpha=2$



$$w = \sin\frac{m\pi x}{a}\left(C_1\cosh k_1 y + C_2 \sinh k_1 y + C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sin\frac{m\pi x}{a}\left(k_1 C_1 \sinh k_1 y + k_1 C_2 \cosh k_1 y - k_2 C_3 \sin k_2 y + k_2 C_4 \cos k_2 y\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sin\frac{m\pi x}{a}\left(k_1^2 C_1 \cosh k_1 y + k_1^2 C_2 \sinh k_1 y - k_2^2 C_3 \cos k_2 y - k_2^2 C_4 \sin k_2 y\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cancel{=0}\right|_{y=0} = \sin\frac{m\pi x}{a}\left(k_1^2 C_1 - k_2^2 C_3\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sinh = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh \quad \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

$w_{y=0} = 0 \qquad C_1 + C_3 = 0 \qquad C_1 = -C_3$

$$-C_3\left(k_1^2 + k_2^2\right) = 0$$

$$k_1^2 + k_2^2 \neq 0 \qquad \therefore\ C_3 = 0 \qquad \therefore\ C_1 = 0$$

$\sinh + \cosh = e^x$

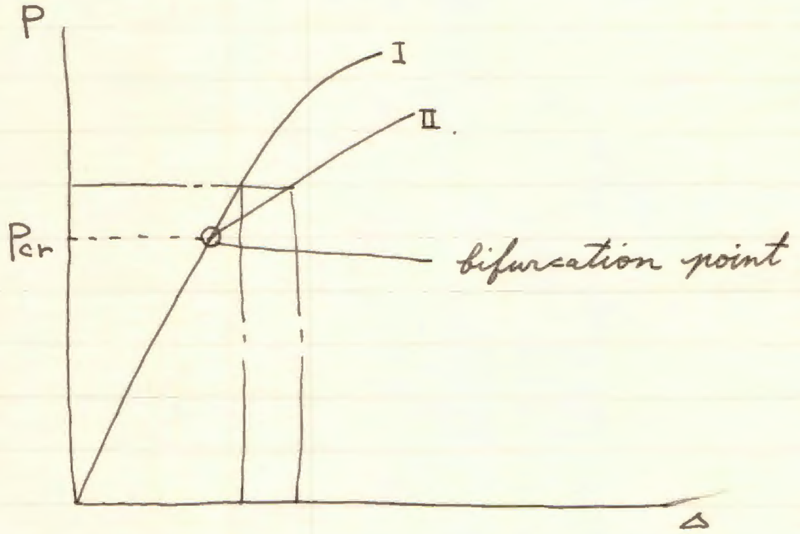
$\sinh - \cosh = -e^{x}$

(2) エネルギー法による座屈解析.

total potential energy Π の増分（変分）$\delta\Pi$.

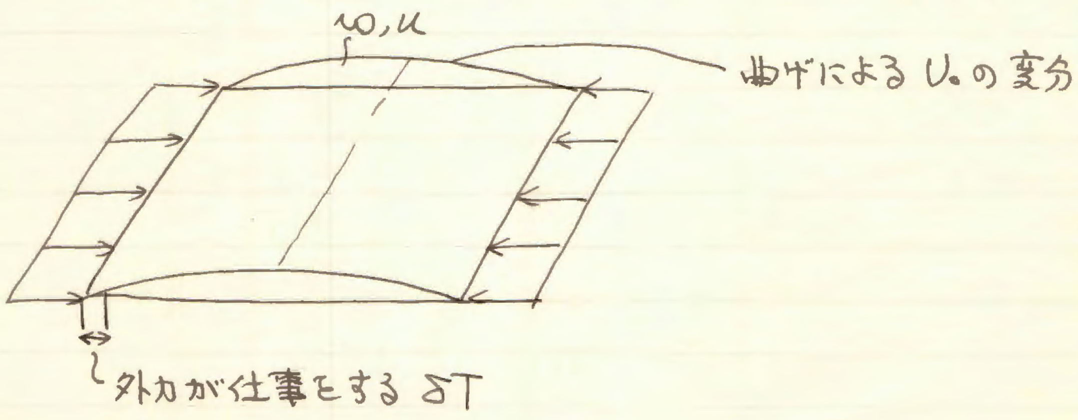
$$\delta\Pi = \delta U_0 - \delta T = 0$$

$-\delta T$: 外力ポテンシャルの変分
δU_0 : ひずみエネルギーの変分.



bifurcation point の問題と post buckling behavior の問題とは別の問題である.

Pcr において，部材に何ら disturbance がなければ I へ進む可能性も含む.



ひずみ. ← たわみ u , 曲げによるたわみ w.

normal stress

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

Fig 5.17

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

shear stress

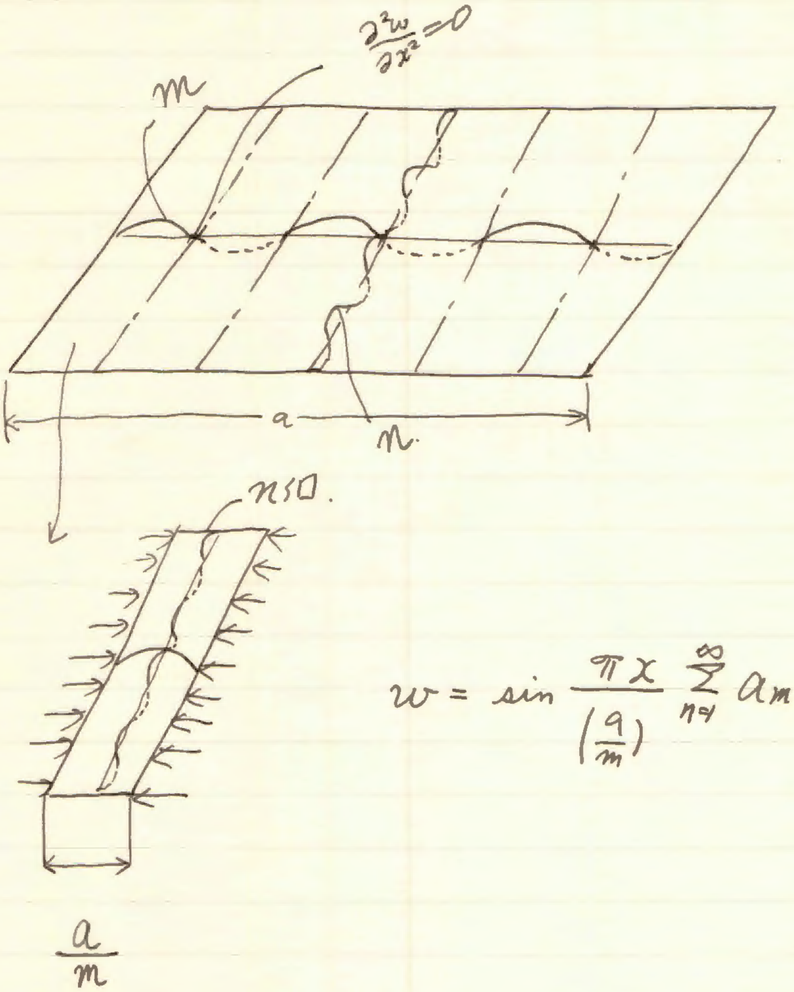
$$\gamma = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{linear}} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}}_{\text{non-linear}}$$

Fig 5.18

外力仕事の変分は w に関する項だけで,

$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$ $\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$ 等である.

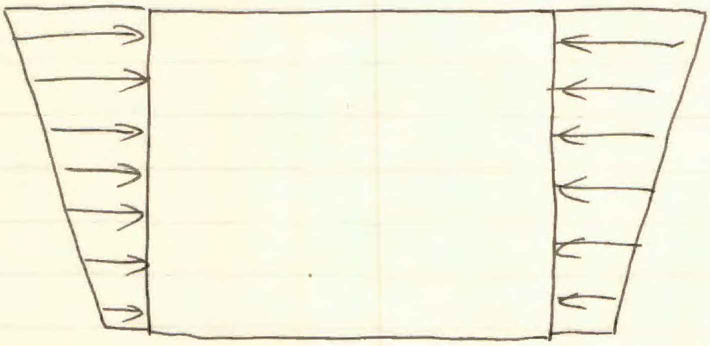
P85



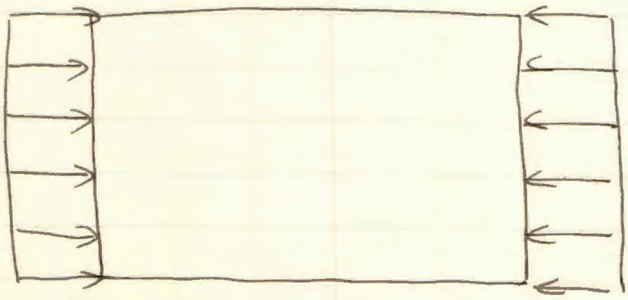
$$w = \sin\frac{\pi x}{\left(\frac{a}{m}\right)}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

梁の Web. → 曲げとせん断.

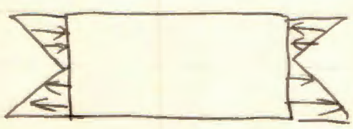
Arch の Web. → 曲げと軸力.



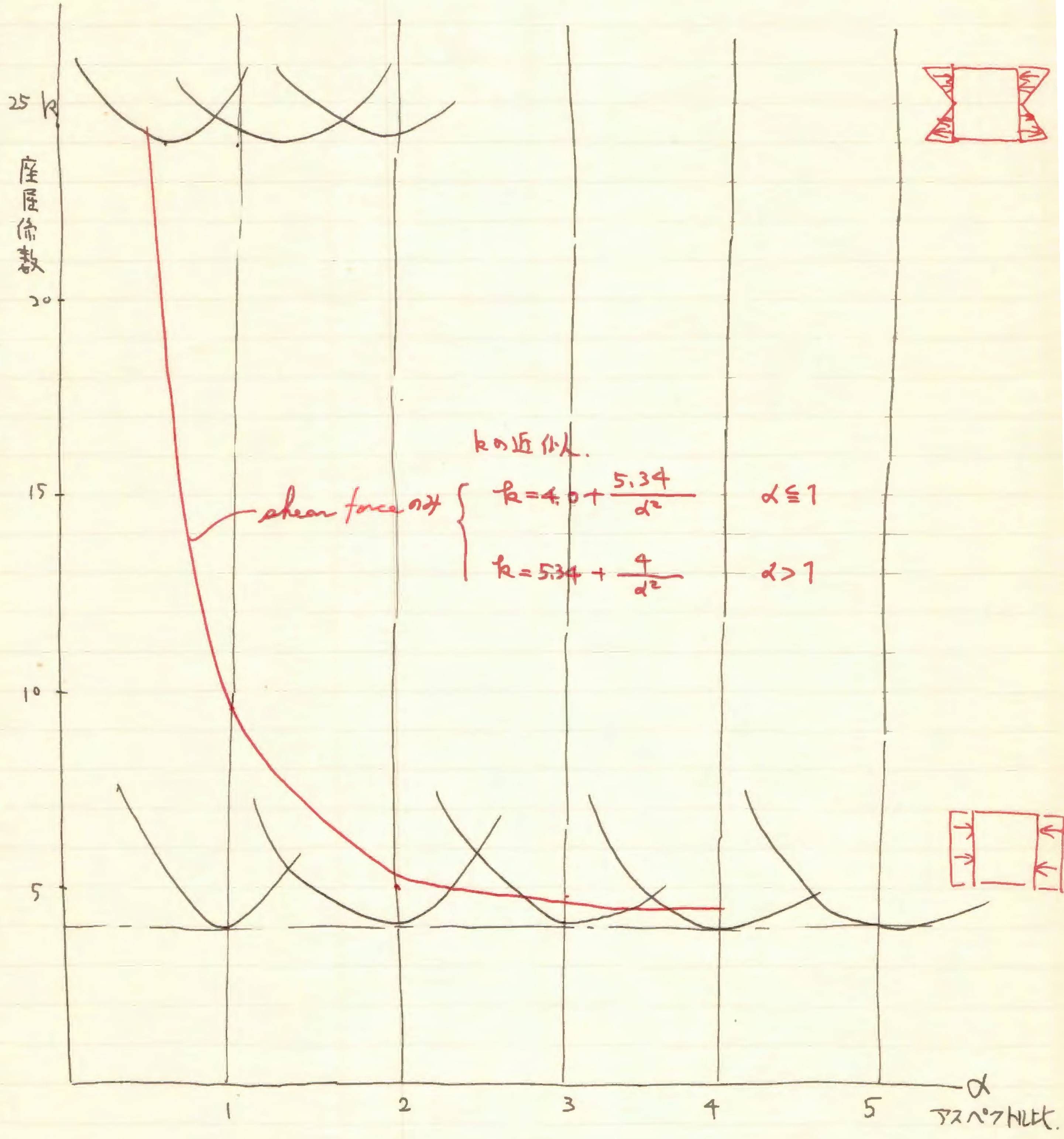
Truss, Arch の Flange. → 軸力.



梁の Flange

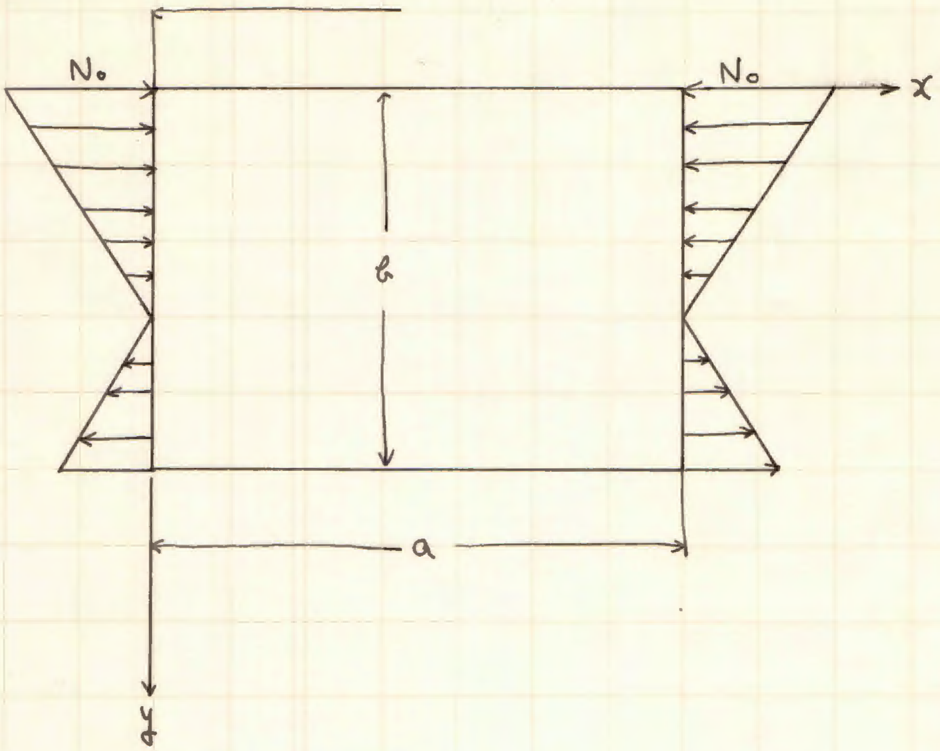


純曲げ



(参) 弾性安定要覧 Handbook of Elastic Stability コロナ社

[5.3]
~~[5·1]~~



$$N_x = N_0\left(1-\alpha\frac{y}{b}\right)$$

境界条件 $\begin{cases} x=0,\,a & w=0\ ,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ y=0,\ b & w=0\ ,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \end{cases}$

たわみを仮定.

$$w = \sum\sum A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad \text{①}$$

ひずみエネルギ（面外変形に対する）

$$\delta U = \frac{D}{2}\int_0^b\int_0^a \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\Sigma\Sigma\, a_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\Sigma\Sigma\, a_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \Sigma\Sigma\, a_{mn}\frac{m\pi}{a}\cdot\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}^2 + 2(1-\nu)\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}$$

$$= \Sigma\Sigma\, a_{mn}^2\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2 \sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}$$

$$+\Sigma\Sigma\, 2(1-\nu)a_{mn}^2\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\cos^2\frac{m\pi x}{a}\cos^2\frac{n\pi y}{b} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}\right]$$

$$\delta U = \Sigma\Sigma\, a_{mn}^2\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2\cdot\frac{D}{2}\int_0^b\int_0^a \sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy$$

$$= \frac{ab\pi^4}{8}D\,\Sigma\Sigma\, a_{mn}^2\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2 \qquad \text{——— ②}$$

外力のポテンシャル.

$$+\delta T = +\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b -N_0\left(1-\alpha\frac{y}{b}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy$$

$$= -\frac{N_0}{2}\int_0^b\int_0^a \left(1-\frac{\alpha}{b}y\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy$$

$$= -\frac{N_0}{2}\cdot\frac{\pi^2}{a^2}\sum\sum a_{mn}^2\, m^2\int_0^b\int_0^a \cos^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}\cdot\left(1-\frac{\alpha}{b}y\right)dx\,dy$$

$$\int_0^b\int_0^a \cos^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{ab}{4}$$

$$\int_0^a \cos^2\frac{m\pi x}{a} = \frac{a}{2}$$

~~[1]~~ $I = \int_0^b y\sin\frac{i\pi y}{b}\sin\frac{j\pi y}{b}\,dy$

$$= \frac{1}{2}\int_0^b y\left\{\cos\frac{(i-j)\pi y}{b} - \cos\frac{(i+j)\pi y}{b}\right\}dy \quad =$$

[1] $i=j$ のとき. $I = \frac{b^2}{4}$.

$$I_1 = -\frac{1}{2}\int_0^b y\cos\frac{2i\pi y}{b}\,dy = -\frac{1}{2}\int_0^b y\left(\frac{b}{2i\pi}\sin\frac{2i\pi y}{b}\right)'dy$$

$$= -\frac{b}{4i\pi}\left\{\left[y\sin\frac{2i\pi y}{b}\right]_0^b - \int_0^b \sin\frac{2i\pi y}{b}\right\} = -\frac{b}{4i\pi}\cdot\frac{b}{2i\pi}\left[\cos\frac{2i\pi y}{b}\right]_0^b$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^b y\,dy = \frac{b^2}{4} \qquad = 0$$

[2]　$i \neq j$ のとき.

$$2I = \frac{1}{2}\int_0^b y\left\{\frac{b}{(i-j)\pi}\sin\frac{(i-j)\pi y}{b} - \frac{b}{(i+j)\pi}\sin\frac{(i+j)\pi y}{b}\right\}dy$$

$$= \frac{b}{(i-j)\pi}\left\{\cancel{\left[y\sin\frac{(i-j)\pi y}{b}\right]_0^b} - \int_0^b \sin\frac{(i-j)\pi y}{b}dy\right\} \rightarrow \frac{b^2}{(i-j)^2\pi^2}\left[\cos\frac{(i-j)\pi y}{b}\right]_0^b$$

$$- \frac{b}{(i+j)\pi}\left\{\cancel{\left[y\sin\frac{(i+j)\pi y}{b}\right]_0^b} - \int_0^b \sin\frac{(i+j)\pi y}{b}dy\right\} \rightarrow -\frac{b^2}{(i+j)^2\pi^2}\left[\cos\frac{(i+j)\pi y}{b}\right]_0^b$$

① $i \pm j$ = 偶数のとき　　$I = 0$.

② $i \pm j$: 奇数のとき.

$$2I = -2\frac{b^2}{(i-j)^2\pi^2} + 2\frac{b^2}{(i+j)^2\pi^2}$$

$$I = +\frac{b^2}{\pi^2}\left\{\frac{1}{(i-j)^2} + \frac{1}{(i+j)^2}\right\}$$

$$= +\frac{b^2}{\pi^2}\frac{-(i+j)^2 + (i-j)^2}{(i^2-j^2)^2} = -\frac{4b^2}{\pi^2}\frac{ij}{(i^2-j^2)^2}$$

$$\delta T = -\frac{N_0}{2}\cdot\frac{\pi^2}{a^2}\cdot\frac{ab}{4}\sum\sum a_{mn}^2 m^2$$

$$+\frac{N_0}{2}\cdot\frac{\pi^2}{a^2}\cdot\frac{\alpha}{b}\cdot\frac{a}{\cancel{4}2}\times\sum_m m^2$$

$$\left[\frac{b^2}{4}\sum_n a_{mn}^2-\frac{4b^2}{\pi^2}\sum_n\sum_i\frac{a_{mn}\cdot a_{mi}\cdot ni}{(n^2-i^2)^2}\right]$$

$$\frac{\cancel{\pi^2}\alpha N_0 a}{\cancel{4b}}\cdot\frac{4b^2}{\cancel{\pi^2}}\qquad\frac{\alpha N_0 ab}{a^2}.$$

$$=-\frac{\pi^2 N_0 ab}{8\cancel{a}}\sum_m\sum_n a_{mn}^2\left(\frac{m}{a}\right)^2$$

$$+\frac{\pi^2 N_0}{\cancel{24}4}\cdot\frac{a\alpha}{b}\sum_m\left(\frac{m}{a}\right)^2\cdot\left[\frac{b^2}{4}\sum_n a_{mn}^2-\frac{\cancel{4}8b^2}{\pi^2}\sum_n\sum_i\frac{a_{mn}a_{mi}\cdot ni}{(n^2-i^2)^2}\right]$$

[ただし $n\pm i$ は奇数, $n\neq i$]

$\delta U+\delta T=0$ より.

$$\delta\Pi=\frac{\pi^4 ab}{8}D\sum_m\sum_n a_{mn}^2\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2$$

$$=-\frac{\pi^2(\alpha-2)ab\,N_0}{16}\sum_m\sum_n a_{mn}^2\left(\frac{m}{a}\right)^2+2\alpha\,\cancel{ab}\,\frac{b}{a}N_0\sum_m m^2\sum_n\sum_i\frac{a_{mn}a_{mi}\,n\cdot i}{(n^2-i^2)^2}$$

$$\therefore N_0=\frac{\dfrac{2\pi^2\cancel{ab}D}{\cancel{8}}\sum_m\sum_n a_{mn}^2\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2+\cancel{\dfrac{\pi^2(\alpha-2)ab}{16}}}{\cancel{2}32\,\alpha\dfrac{\cancel{b}}{a^2}\sum_m m^2\sum_n\sum_i\dfrac{a_{mn}a_{mi}\,n\cdot i}{(n^2-i^2)^2}-\dfrac{\pi^2(\alpha-2)\cancel{ab}}{\cancel{16}}\sum_m\sum_n a_{mn}^2\left(\frac{m}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{2\pi^2 D\sum_m\sum_n a_{mn}^2\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2}{\dfrac{32\alpha}{a^2}\sum_m m^2\sum_n\sum_i\dfrac{a_{mn}\cdot a_{mi}\cdot n\cdot i}{(n^2-i^2)^2}-\pi^2(\alpha-2)\sum_m\sum_n a_{mn}^2\left(\frac{m}{a}\right)^2}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{mn}} = \frac{\pi^4 a b D}{4} \cancel{\Sigma}\, a_{mn} \left\{ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\}^2$$

$$- \left[\frac{\pi^2 (\alpha - 2) a b}{8} a_{mn} \left(\frac{m}{a}\right)^2 - 2\alpha \frac{b}{a} N_0 m^2 \sum_i \frac{a_{mi} \cdot n \cdot i}{(n^2 - i^2)^2} \right] N_0 = 0$$

$$a \longrightarrow \frac{a}{m}$$

$$\frac{\pi^4 a b D}{4 m} a_{mn} \left\{ \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\}^2$$

$$- \left[\frac{\pi^2 (\alpha - 2) a b}{8 m} a_{mn} \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2\alpha \frac{b}{a} N_0 m^3 \sum_i \frac{a_{mi} \cdot n \cdot i}{(n^2 - i^2)^2} \right] \cancel{N_0}\ 0$$

$$m \longrightarrow 1$$

$$\frac{\pi^4 a b D}{4} a_{1n} \left\{ \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\}^2$$

$$- \left[\frac{\pi^2 (\alpha - 2) a b}{8} a_{1n} \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2\alpha \frac{b}{a} \cancel{N_0} \sum_i \frac{a_{1i} \cdot n \cdot i}{(n^2 - i^2)^2} \right] N_0 = 0$$

$$\frac{\pi^4 a b D}{4} a_{1m} \left\{ 1 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right\}$$

$$- \left[\frac{\pi^2 (\alpha - 2) a b}{8} a_{1n} - 2\alpha \frac{\cancel{a} b}{a} \cdot \sum_i \frac{a_{1i} \cdot n \cdot i}{(n^2 - i^2)^2} \right] N_0 = 0$$

$$\frac{4}{\pi^4 a b D}$$

$$\left(1 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right) a_{1m} - \left[\frac{\alpha - 2}{2\pi^2 D} a_{1n} - \frac{8\alpha}{\pi^4 D a} \sum_i \frac{a_{1i} \cdot n \cdot i}{(n^2 - i^2)^2} \right] N_0 = 0$$

$$\frac{(\alpha - 2)}{\pi^2 2 D}$$

$$\frac{4}{\pi^4 D \cancel{ab}} \times 2\alpha \cancel{ab} = \frac{8\alpha}{\pi^4 D}$$

a_{11}, a_{12} だけを考える。

$$\begin{cases} n=1 \longrightarrow i=2 \\ n=2 \longrightarrow i=1 \end{cases}$$

$n=1$, $i=2$ のとき.

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)a_{11} - \left[\frac{\alpha-2}{2\pi^2 D}a_{11} - \frac{8\alpha}{\pi^4 D a^2}\frac{2a_{12}}{9}\right]N_0 = 0$$

$$\left\{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) - \frac{(\alpha-2)N_0}{2\pi^2 D}\right\}a_{11} + \frac{16\alpha N_0}{9\pi^4 D a^2}a_{12} = 0 \quad \text{—— Ⓐ}$$

$n=2$, $i=1$ のとき

$$\left(1+4\frac{a^2}{b^2}\right)a_{12} - \left[\frac{\alpha-2}{2\pi^2 D}a_{12} - \frac{8\alpha}{\pi^4 D a^2}\cdot\frac{2}{9}a_{11}\right]N_0 = 0$$

$$\frac{16\alpha N_0}{9\pi^4 D a^2}a_{11} + \left\{\left(1+4\frac{a^2}{b^2}\right) - \frac{(\alpha-2)N_0}{2\pi^2 D}\right\}a_{12} = 0 \quad \text{—— Ⓑ}$$

係数行列の DETERMINANT=0.

$$\left\{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) - \frac{(\alpha-2)N_0}{2\pi^2 D}\right\}\left\{\left(1+4\frac{a^2}{b^2}\right) - \frac{(\alpha-2)N_0}{2\pi^2 D}\right\} - \frac{16\alpha N_0}{9\pi^4 D a^2}\cdot\frac{\overset{16}{\cancel{2}}\alpha N_0}{9\pi^4 D a^2} = 0$$

$$\left(\frac{(\alpha-2)^2}{4\pi^4 D^2} - \frac{\overset{16^2}{\cancel{32}}\alpha^2}{81\pi^8 D^2 a^4}\right)N_0^2 - \left\{\frac{(\alpha-2)}{2\pi^2 D}\left(2+5\frac{a^2}{b^2}\right)\right\}N_0 + \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\left(1+4\frac{a^2}{b^2}\right) = 0$$

$2\pi^4 D^2 \qquad \pi^2 D$

$$N_0 = \frac{\frac{(\alpha-2)}{2\pi^2 D}\left(2+5\frac{a^2}{b^2}\right) \pm \sqrt{\frac{(\alpha-2)^2}{4\pi^4 D^2}\left(2+5\frac{a^2}{b^2}\right)^2 - 4\left(\frac{(\alpha-2)^2}{4\pi^4 D^2} - \frac{16^2\alpha^2}{81\pi^8 D^2 a^4}\right)\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\left(1+4\frac{a^2}{b^2}\right)}}{2\left(\frac{(\alpha-2)^2}{4\pi^4 D^2} - \frac{16^2\alpha^2}{81\pi^8 D^2}\right)}$$

$$\frac{D\pi^2}{b^2}$$

$$= \frac{\frac{\alpha-2}{2\pi^2 D}\left(2+5\beta^2\right) + \sqrt{\frac{(\alpha-2)^2}{4\pi^4 D^2}\left(2+5\beta^2\right)^2 - 4\left(\frac{(\alpha-2)^2}{4\pi^4 D^2} - \frac{16^2\pi^2}{81\pi^8 D^2 a^4}\right)(1+\beta^2)(1+4\beta^2)}}{2\left(\frac{(\alpha-2)^2}{4\pi^4 D^2} - \frac{16^2\alpha^2}{81\pi^8 D^2}\right)}$$

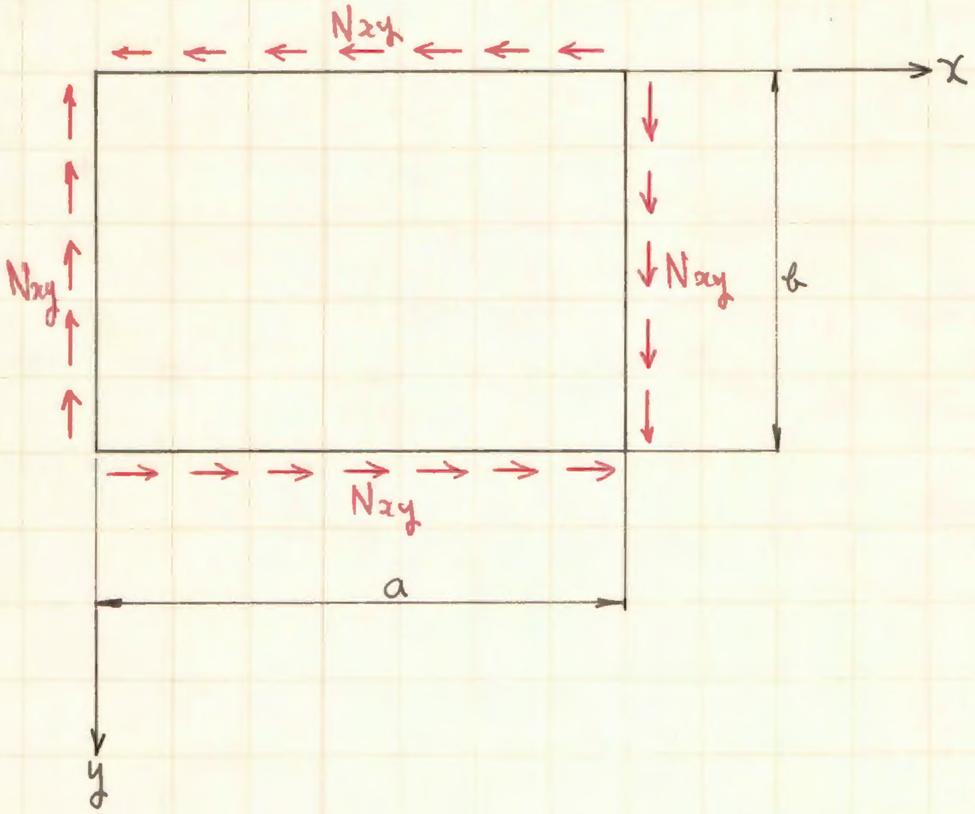
$$\text{分母} = 2\cdot\frac{81\pi^4(\alpha-2)^2 - 1024\alpha^2}{324\pi^8 D^2} = \frac{81\pi^4(\alpha-2)^2 - 1024\alpha^2}{162\pi^8 D^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2 k(\alpha)$$

$k(\alpha) =$

$\cancel{162\pi^6 D}$

[5·4]



$$\delta U = \frac{ab\pi^4}{8} D \sum\sum a_{mn}^2 \left\{ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\}^2 \qquad \text{———} \quad ①$$

$$\delta T = \int_0^b\int_0^a N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \, dx \, dy$$

$$= N_{xy}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_m \sum_n a_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_m \sum_n a_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$I = \int_0^a \sin\frac{i\pi x}{a} \cancel{\sin}\cos \frac{j\pi x}{a}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \left\{ \sin\frac{(i+j)\pi x}{a} + \sin\frac{(i-j)\pi x}{a} \right\} dx$$

$i \neq j$ 〃

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-a}{(i+j)\pi} \cos\frac{(i+j)\pi x}{a} - \frac{a}{(i-j)\pi} \cos\frac{(i-j)\pi x}{a} \right]_0^a$$

$i \neq j$

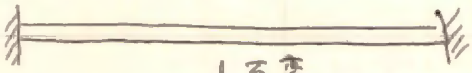
① $i \pm j$ = 偶数. $\quad I = 0$

② $i \pm j$ = 奇数. $\quad I = \frac{a}{\pi}\left(\frac{1}{i+j} + \frac{1}{i-j}\right) = \frac{a}{\pi} \frac{2i}{(i^2-j^2)}$

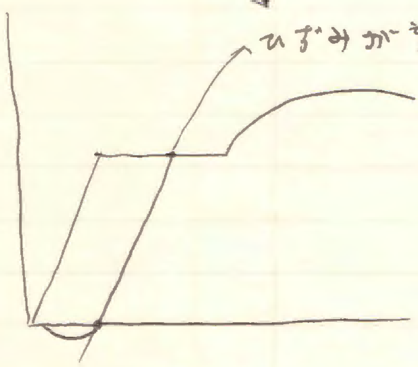
③ $i = j$ のとき.

$$I = \frac{1}{2}\int_0^a \sin\frac{2i\pi x}{a} = \frac{-a}{4i\pi}\left[\cos\frac{2i\pi x}{a}\right]_0^a = 0$$

6/14.



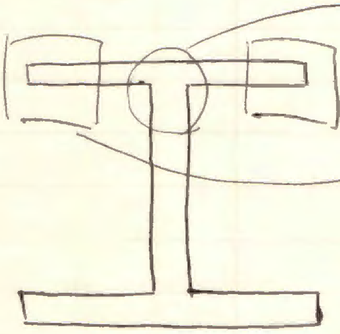
ひずみ $e_t = \alpha \Delta t$



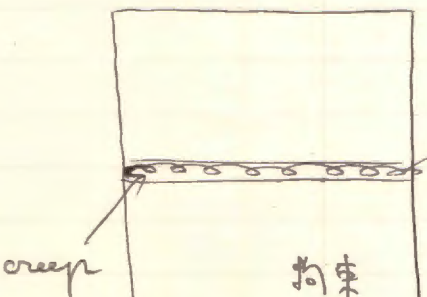
ひずみが塑性域に達すると，塑性ひずみが生じなければならないのに，ℓは不変だから，ひずみが部材内の残る

① 温度によって生ずる収縮に対する拘束．

溶接後冷えることによる収縮がおこる．



収縮に対する拘束．



溶接部．

cooling pattern : 温度差による
welding pattern : 変位差による

残留応力はそれ自体でつりあっている (∵ 外力が作用しない)

↓

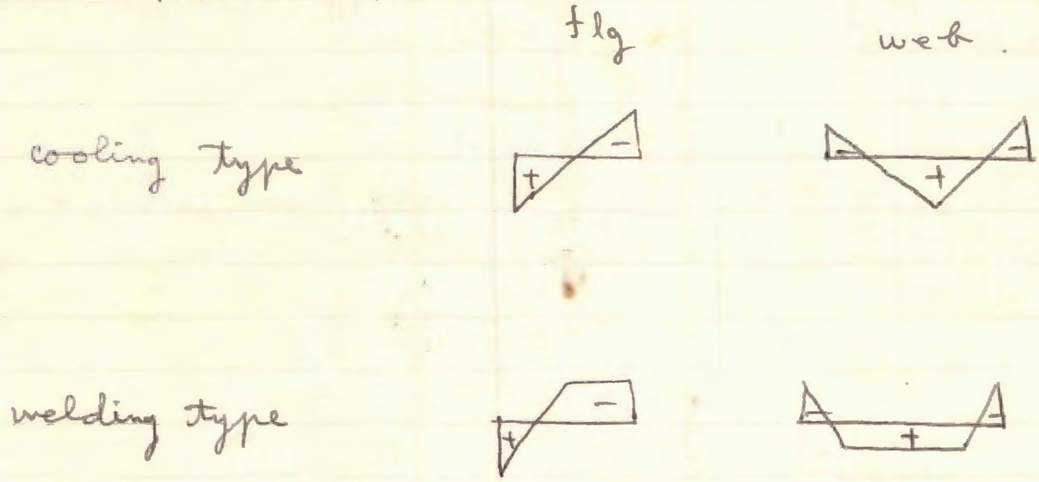
自平衡系 self equiribruim system

$$\int_A \sigma_r \, dA = 0 \;,\quad \int_A \sigma_x x \, dA = 0 \;,\quad \int_A \sigma_r y \, dA = 0$$

(参) JSSC Vol.3 No.16 1967
残留応力と座屈.

1. 残留応力.
◎ 2. 残留応力のある材の座屈強度に関する.
3. 座屈強度に関する実験結果.
4.
5. 実構造物設計に際しての残留応力の評価.

残留応力を有する板の座屈強度



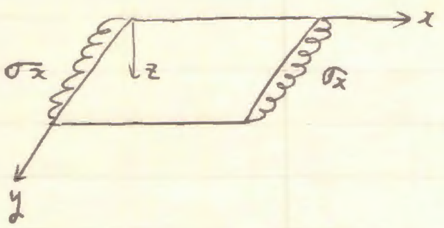
(参) 土論 No 172 1969—12 pp 79〜96

Residual Stress and Local Buckling Strength of Steel Columns

F. Nishino and L. Tall.

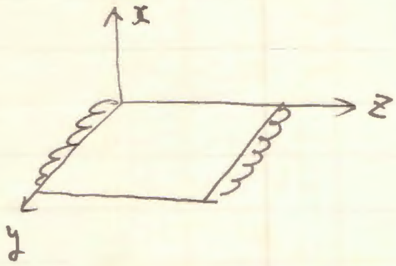
☆
- 弾性域においても，残留応力は座屈荷重を低下させる。
- cooling type の方が welding type よりも影響が大きい。
- 残留応力だけで座屈応力に達することがある。

○ 弾性域



$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \sigma_x t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

○ 非弾性域



~~$y \rightarrow x$~~

~~$z \rightarrow y$~~

$z \rightarrow -x$

$$E\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(I k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + I k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\left(I k_4 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(I k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + I k_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right] + \sigma_x t \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

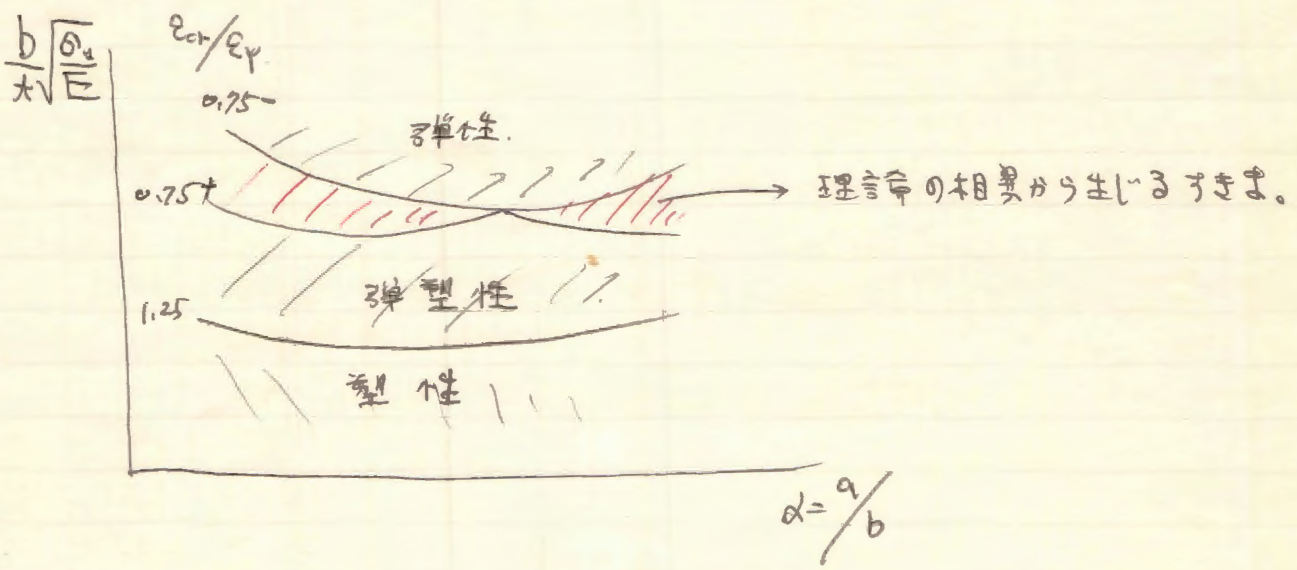
k_1 k_2 k_3 k_4 $\longrightarrow$ ビジラード形 (P94)

幅厚比とアスペクト比の関係.

残留応力なし

| 弾性域 —— $a/b=1.0$ で b/t minimum
| 塑性域 —— $a/b=0.7$ で b/t 〃

残留応力 $\sigma_{rc}=\frac{1}{4}\sigma_{Y}$.



6/21

残留応力, *imperfection* のない場合の座屈.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2} k$$

$\sigma_{cr} = \sigma_{cr}$(材料常数, 幅厚比, アスペクト比, 載荷条件, 境界条件)

線形座屈解析.　k(アスペクト比, 載荷条件, 境界条件)

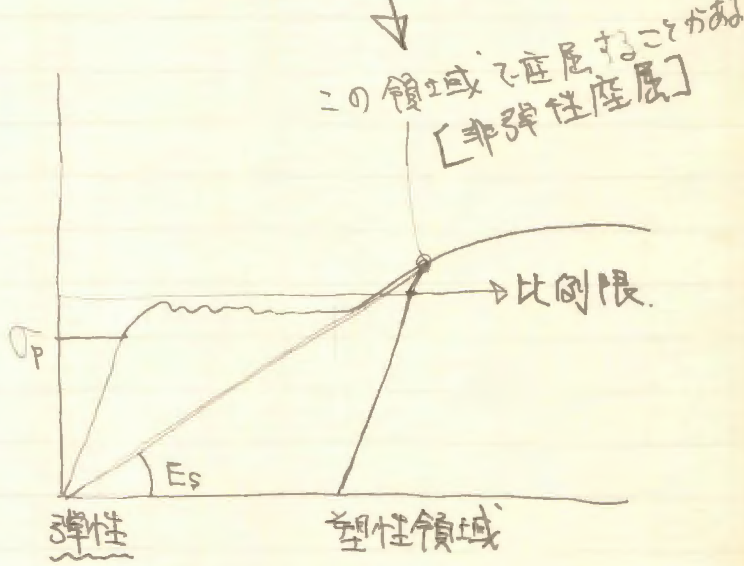
他

> 残留応力の形、大きさ、初期不整
>
> 座屈応力 —— 座屈応力は k の関数であるが,
> k は座屈応力に支配される。

影響

線形座屈

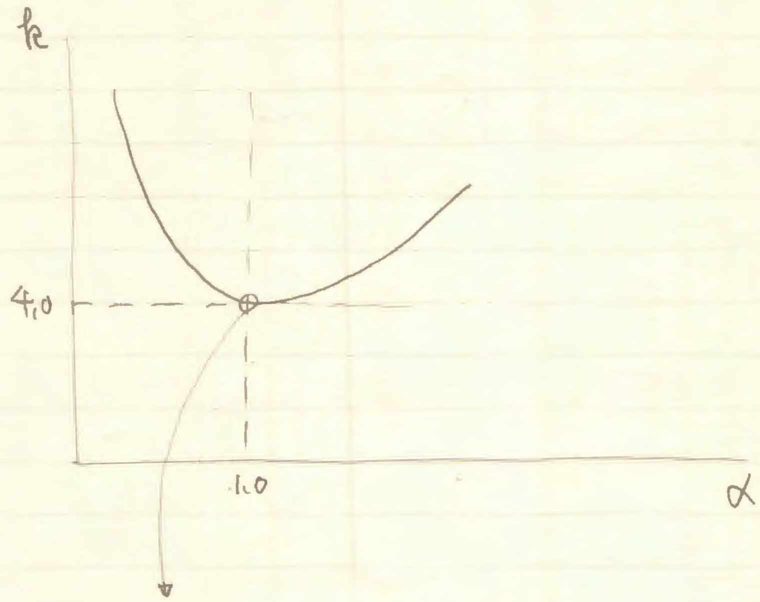
$\Longrightarrow$



比例限度内.

↓

steel の場合には
ある程度保証される。
コンクリートに比例限
があるか?



kの値を決めて，

$\left(\frac{b}{t}\right)_0$ により $\sigma_{cr.0}$が決まる。

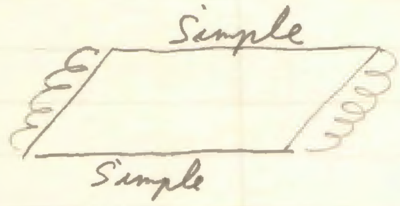
実際には． $\sigma_{cr.0} > \sigma_{cr}$ で座屈してしまう。

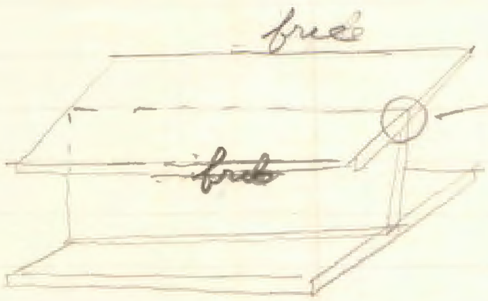
⇓

$\sigma_{cr.0}$まで保障されるまで $\left(\frac{b}{t}\right)$ の値をおさえる必要がある。

$$\frac{\left(\frac{b}{t}\right)}{\left(\frac{b}{t}\right)_0} = R.$$

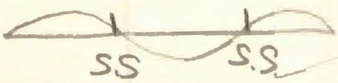
考えられる部材要素.



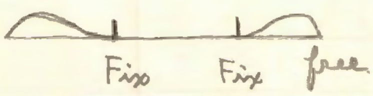


Simple と fix の中間!?

stiffner

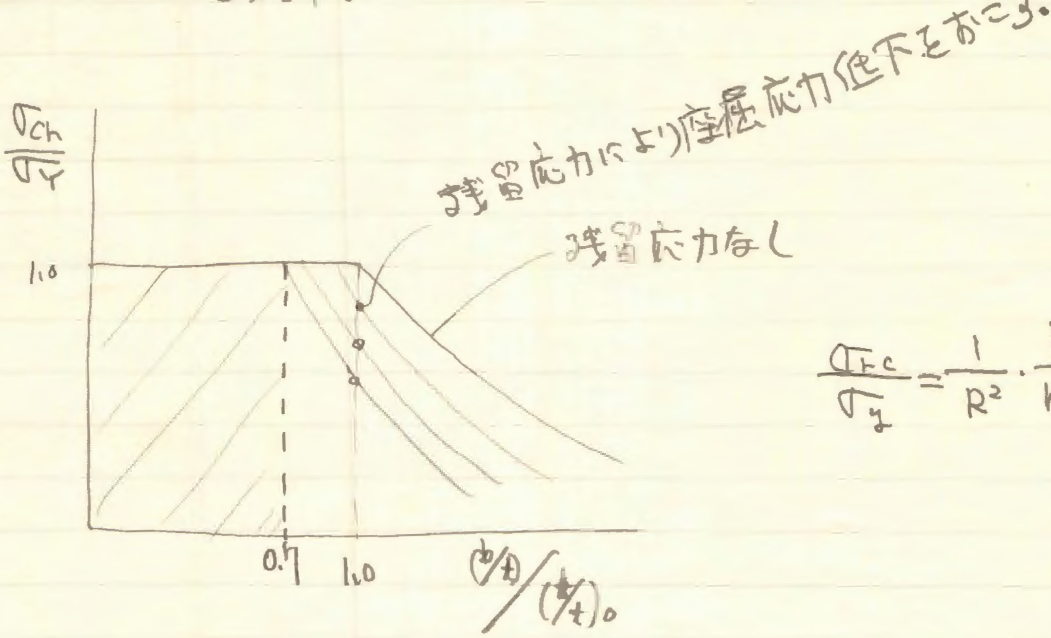


simply support



極端な場合 ⟶ 非載荷辺が simple or fix
の場合についてしらべる。

座屈が降伏点 ($\sigma_{cr}/\sigma_Y = 1.0$) までおこらないようにすることが、現在の設計目標である

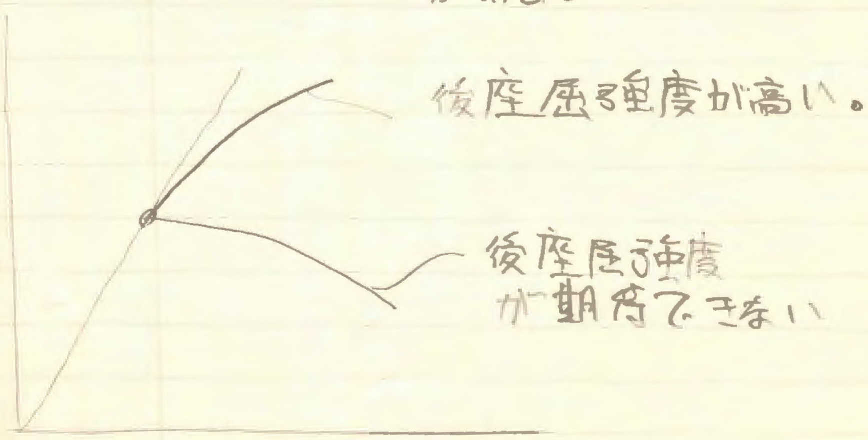


$$\frac{\sigma_{Fc}}{\sigma_Y} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{k}{k_0}$$

全体座屈

局部座屈 → 全体座屈以前に起こってはならない。

プレートガーダー Web → Post Buckling Strength がある。



東工大: 西村　　　　複合材料
京大:
東大 — [illegible]

・横方向荷重だけのときの微分方程式

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D}$$

・横方向及び中心面方向荷重のときの微分方程式

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(p + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right.$$

・中心面方向荷重だけのときの微分方程式

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$$

・ひずみエネルギー

(1) 純曲げ

$$U_1 = \frac{1}{2}D\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\}dxdy$$

(2) 横荷重による曲げ

$$U_2 = \frac{1}{2}D\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \underline{2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2}\right\}dx$$

(3) 曲げと軸方向力

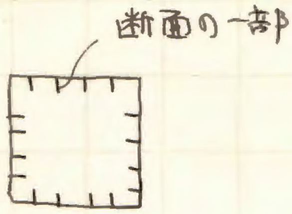
$$U_3 = \frac{Et}{2(1-\nu^2)}\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2(1-\nu)\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}\right]dxdy$$

$$+ U_2$$

7/5　補剛板の座屈解析.

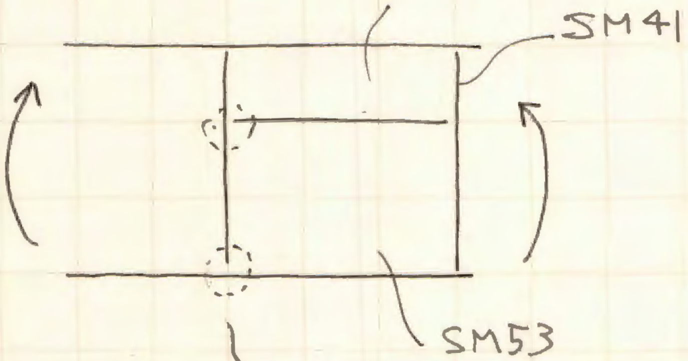
縦補剛材を有する板.

吊橋の塔柱
アーチ部材（フランジ）
トラス部材.

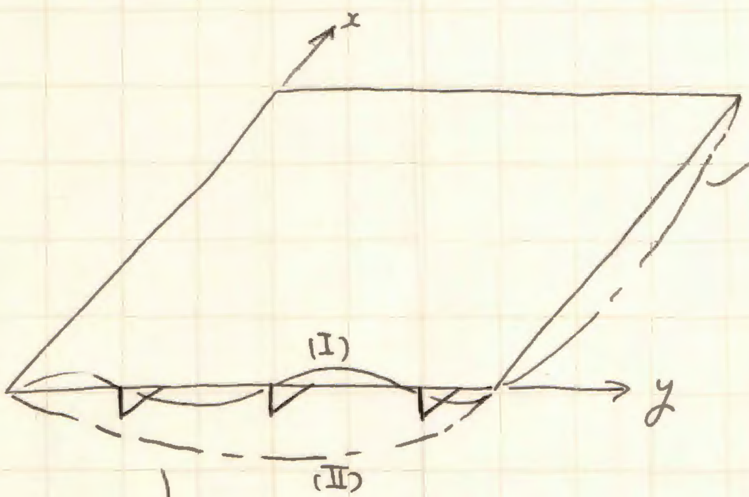


プレートガーダー.

ウェブと同じSM53（ある程度応力を分担する）



溶接しない → 曲げ応力を分担しない



m=1 であろう。

stiffner の剛性 大 → (I)の波形
〃　〃 小 → (II)の波形
その境界は？

パラメーター

(1) 補剛材の曲げ剛性と板の曲げ剛性の比.

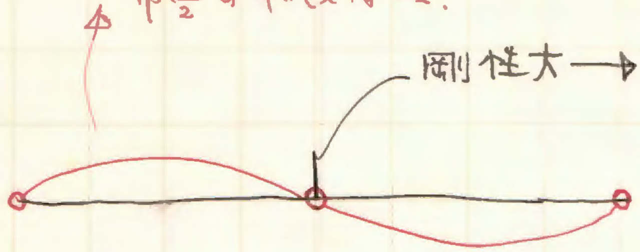
$$\gamma = \frac{EI \leftarrow \text{stiffner}}{Db \leftarrow \text{板}}$$

(2) 断面積.

$$\delta = \frac{A}{bt}$$

巾 $\frac{b}{2}$ の単純支持板.

剛性大 → たわまない → ヒンジ



y方向の半波形 $n=2$. ($m=1$)

$$k = \left(\frac{m}{\alpha} + n^2\frac{\alpha}{m}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha} + n^2\alpha\right)^2 * \qquad (m=1).$$

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha} = 2\left(\frac{1}{\alpha} + n^2\alpha\right)\cdot\left(-\frac{1}{\alpha^2} + n^2\right) = 0$$

どんな形状(α)においても安全に設計する.

$$\frac{1}{\alpha^2} = n^2 \rightarrow \alpha = \frac{1}{n}$$

$$\rightarrow \quad k = \left(\frac{1}{\alpha} + n^2\alpha\right)^2 = (n+n)^2 = 4n^2$$

[逆対称変形する場合の座屈荷重の最小値]

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2} \cdot 4n^2$$

スティフナーがN本あれば.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)\left(\frac{b}{t}\right)^2} 4(N+1)^2$$

$\alpha = \alpha * n$

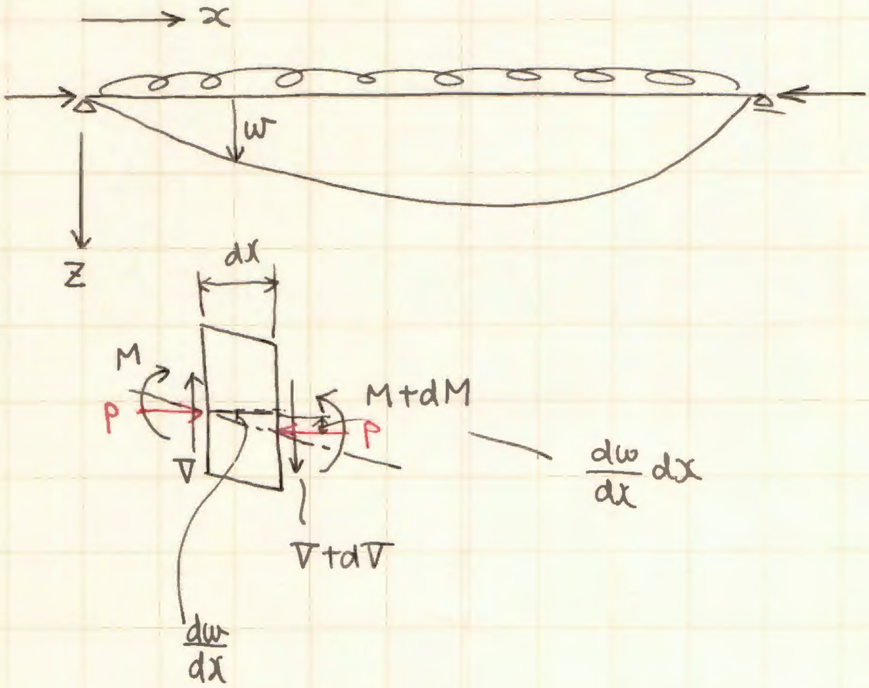
$\alpha * n$

$\frac{a}{[illegible]} = \alpha.$

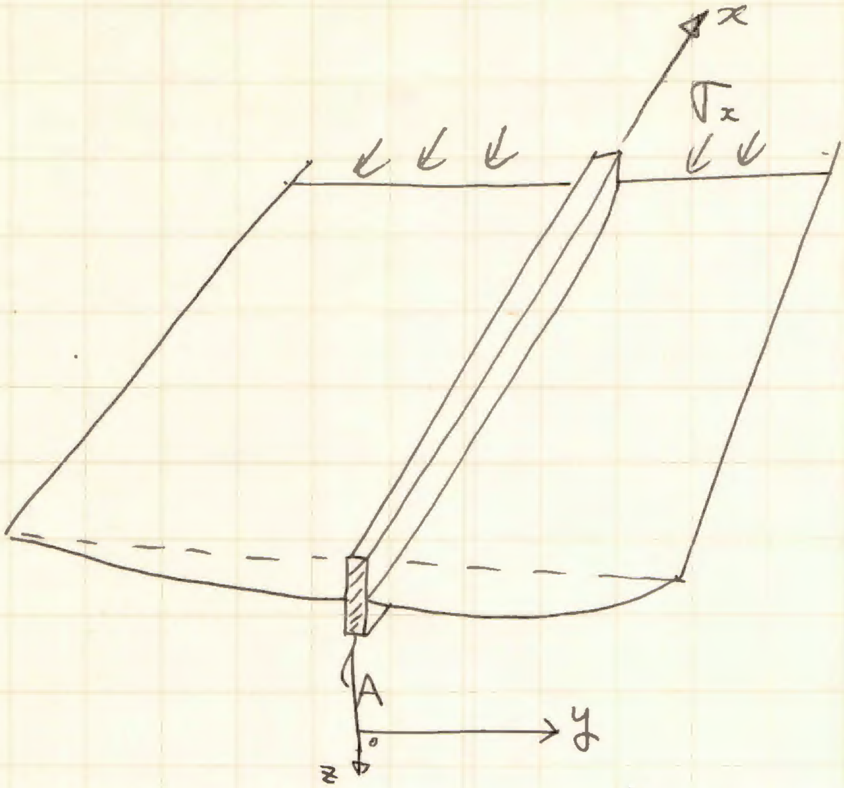
$\frac{1}{\alpha n} + n^2 \cdot \alpha n$

$\frac{1}{\alpha n} + \alpha n^3$

Beam — Column （梁-柱）

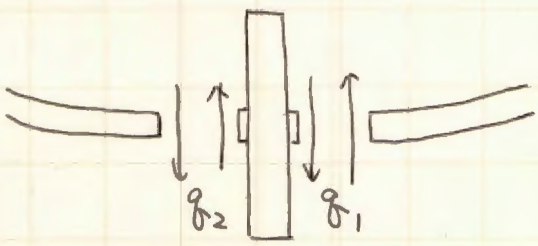


$$EI\frac{d^4w}{dx^4} + \underbrace{P\frac{d^2w}{dx^2}}_{\text{有限変形による項}} = q$$



補剛材にかかる軸力　$P = \sigma_x A$

$= \sigma_{cr} A$ （座屈時）



横荷重　$q = q_1 - q_2$

<P63>
式(5,15)より

$$q_1 = -D\left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y}\right]_{y=0}$$

$$q_2 = -D\left[\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2}\right]_{y=0}$$

$$q = q_1 - q_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} - (2-\nu)\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right]_{y=0}$$

$$\left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial w_2}{\partial x^2}\right]_{y=0}$$ より

$$q = -D\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 w_2}{\partial y_3}\right)_{y=0}$$

$$\left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} = -\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3}\right]_{y=0}$$

$$q = -2D\left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3}\right]_{y=0}$$

補剛材のたわみ → 常微分

$$q = EI\frac{d^4 w}{dx^4} + P\frac{d^2 w}{dx^2}$$

板の y=0 でのたわみ → 偏微分

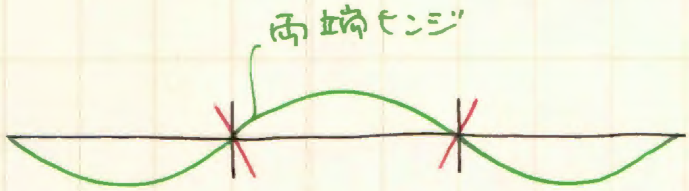
$$w = [w_1]_{y=0}$$

$$\left[EI\frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + P\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2D\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3}\right]_{y=0} = 0$$

$EI = \gamma b D$, $P = \sigma_0 \delta b t$

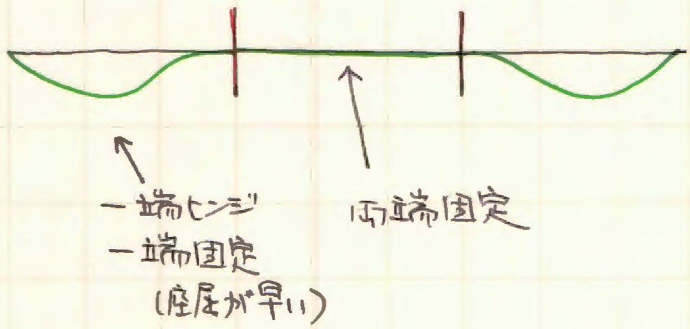
$$\left[\gamma b\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \delta\frac{\sigma_0 b t}{D}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3}\right]_{y=0} = 0$$

①問題点①



ねじり剛性[大]

⇓



こういう場合どうか？

同じ理論は使えない。

② 残留応力がある場合はどうか.

③ 複雑な問題 ——→ エネルギー法

P115　エネルギー法による解.

$$w=\sum_m\sum_n a_{mn}\left(1-\cos\frac{2m\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2n\pi y}{a}\right)$$

$$\begin{cases} x=0,\,a & w=\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial y}=0 \\ y=0,\,b & w=\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial y}=0 \end{cases}$$

$$U=\frac{D}{2}\iint\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy$$

$$\frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

$$\iint_A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 dx\,dy=\oint_S\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\,dx-\oint_S\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dy$$

$$+\iint_A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dx\,dy.$$

$\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial y}=0$ （周辺固定）

$\therefore$

たわみ No.

$$U = 8\pi^4 D \int_0^a \int_0^b \left[\sum_m \frac{m^2}{a^2} \cos \frac{2m\pi x}{a} \left\{ \sum_n a_{mn} \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{b} y\right) \right\} \right.$$

$$\left. + \sum_m \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \left\{ \sum_n a_{mn} \frac{n^2}{b^2} \cos \frac{2n\pi y}{b} \right\} \right]^2 dx dy$$

$$= 2\pi^4 D \left[\sum_m \sum_n a_{mn}^2 \left(\frac{3bm^4}{a^3} + \frac{3an^4}{b^3} + \frac{2m^2n^2}{ab} \right) \right.$$

$$\left. + \sum_m \sum_s \sum_t \frac{2bm^4}{a^3} a_{ms} a_{mt} + \sum_n \sum_s \sum_t \frac{2an^4}{b^3} a_{sn} a_{tn} \right]$$

$$(m, n, s, t = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし $s \neq t$

等分布荷重 p の仕事.

$$W = \iint_A p \sum_m \sum_n a_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right) dx dy$$

$$= \iint_A p \sum \sum \left\{ \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right) - \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{b} y\right) \cos \frac{2m\pi x}{a} \right\} dx dy$$

$$= \int_0^b p \sum \sum a_{mn} \left[\left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right) x - \frac{a\left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right)}{2m\pi} \sin \frac{2m\pi x}{a} \right]_0^a dy$$

$$= a \cdot p \sum \sum a_{mn} \left[y - \frac{b}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi y}{b} \right]_0^b$$

$$= abp \sum \sum a_{mn}$$

最小仕事.

$$\frac{\partial(U-W)}{\partial a_{mn}} = 4\pi^4 D\left[a_{mn}\left(\frac{3bm^4}{a^3}+\frac{3an^4}{b^3}+\frac{2m^2n^2}{ab}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{s\\(s\neq n)}}\frac{2bm^4}{a^3}a_{ms}+\sum_{\substack{s\\(s\neq m)}}\frac{2an^4}{b^3}a_{sn}\right]-pab=$$

$a=b$ のとき（正方形板）

$$a_{mn}(3m^4+3n^4+2m^2n^2)+\sum_{\substack{s\\s\neq n}}2m^4a_{ms}$$

$$+\sum_{\substack{s\\(s\neq m)}}2n^4a_{sn}=\frac{pa^4}{4\pi^4D}$$

○ a_{11} だけの近似式　$a_{11}=0.03125\dfrac{pa^4}{\pi^4 D}$

$$w_{max} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{11} \\ x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{b}{2} \end{array}\right.$$

$$D^4 y - A D^2 y + B y = 0$$

$$D^4 - A D^2 + B = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{m\pi}{a}\sqrt{1+\mu}$$

$$D^2 = C$$

$$\lambda_2 = \frac{m\pi}{a}\sqrt{1-\mu}$$

$$C^2 - AC + B = 0$$

$$\lambda_3 = -\frac{m\pi}{a}\sqrt{1+\mu}$$

$$C = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

$$\lambda_4 = -\frac{m\pi}{a}\sqrt{1-\mu}$$

$$A^2 - 4B = 4\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - 4\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 (1-\mu^2)$$

$$= 4\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \mu^2$$

$$\sqrt{A^2 - 4B} = 2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \mu$$

$$C = \frac{2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \pm 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \mu}{2}$$

$$= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \{1 \pm \mu\} \rightarrow Z = A e^{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 (1+\mu)} + A_2 e^{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 (1-\mu)}$$

$$D = \pm \frac{m\pi}{a}\sqrt{1 \pm \mu}$$

$$y = \underline{A_1 e^{\frac{m\pi}{a}\sqrt{1+\mu}}} + A_2 e^{\frac{m\pi}{a}\sqrt{1-\mu}} \underline{+ A_3 e^{-\frac{m\pi}{a}\sqrt{1+\mu}}} + A_4 e^{-\frac{m\pi}{a}\sqrt{1-\mu}}$$

$$e^{x} = \sinh x + \cosh x \qquad \frac{m\pi}{a}\sqrt{1+\mu} = k_1$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x \qquad \frac{m\pi}{a}\sqrt{\mu-1} = k_2.$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$y = A_1 e^{k_1} + A_2 e^{ik_2} + A_3 e^{-k_1} + A_4 e^{-ik_2}$$

$$\begin{aligned} &= A_1(\sinh k_1 + \cosh k_1) \\ &+ A_2(\cos k_2 + i\sin k_2) \\ &+ A_3(\cosh k_1 - \sinh k_1) \\ &+ A_4(\cos k_2 - i\sin k_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = &(A_1 - A_3)\sinh k_1 + (A_1 + A_2)\cosh k_1 \\ &+ (A_2 + A_4)\cos k_2 + i(A_2 - A_4)\sin k_2 \end{aligned}$$

$A_1 - A_3 = C_2$, $A_1 + A_2 = C_1$

$A_2 + A_4 = C_3$, $i(A_2 - A_4) = C_4$

$$\therefore Y = C_1\cosh k_1 + C_2\sinh k_1 + C_3\cos k_2 + C_4\sin k_2$$

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

10/4.

PLATE BUCKLING IN THE STRAIN-HARDENING RANGE

G. Haaijer

Proc. Paper 1212

Proc. of ASCE EM2.

1957 April. Vol 83.

直交異方性板

板の釣合方程式.

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{t\sigma_x}{I} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (1)$$

異方性 …… ひずみ硬化がはじまっている.

$$D_x = \frac{E_x}{1-\nu_x \nu_y}, \quad D_y = \frac{E_y}{1-\nu_x \nu_y}, \quad I = \frac{bt^3}{12}$$

$$D_{xy} = \frac{\nu_x E_x}{1-\nu_x \nu_y}, \quad D_{yx} = \frac{\nu_y E_y}{1-\nu_x \nu_y}$$

$2H = D_{xy} + D_{yx} + 4G_t$ （G_t：せん断弾性係数）

$H^2 = D_x \cdot D_Y$ の場合には、解析解が求まる。

(参) ① Bleich, Buckling Strength of Metal Structures)

② 仲, 加藤　座屈論　彰国社 (建築学大系)

・局部座屈

$H^2 \neq D_x D_Y$ の場合には、解析解が求まらない

↓

エネルギー法

ひずみエネルギと外力仕事の、座屈による変化は等しいから、

$$\frac{\sigma_x t}{I}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dY$$

$$=\iint\left[D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+D_Y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial Y^2}\right)^2+(D_{xY}+D_{Yx})\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial Y^2}\right.$$

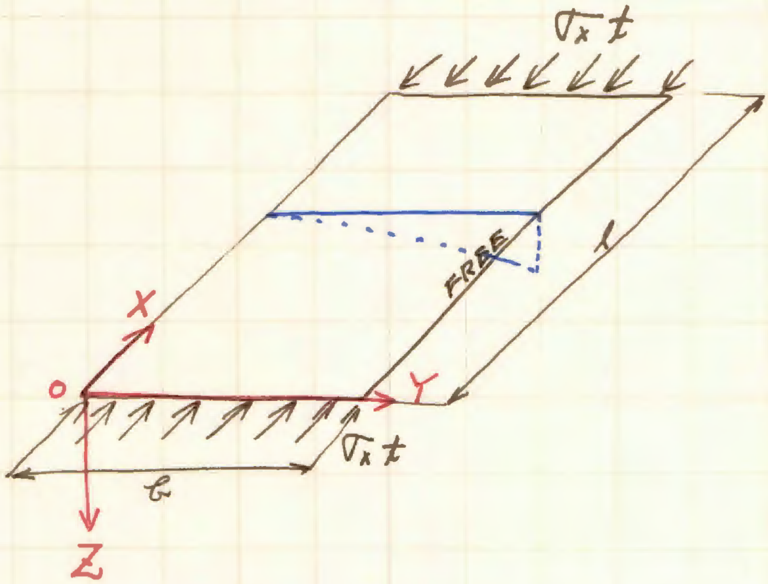
$$\left.+4G_t\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial Y}\right)^2\right]dx\,dY \qquad (2)$$

ここまでは厳密である。

※ ここでたわみ形を仮定するが、この仮定が適当でないと、実際の解とほど遠い解が得られる。

⟶ 座屈実験が必要である。

1) *Plates with One Free Edge.*



たわみ形仮定.

$$w = \left[A\frac{Y}{b} + B\left\{ \left(\frac{Y}{b}\right)^2 + a_1\left(\frac{Y}{b}\right)^3 + a_2\left(\frac{Y}{b}\right)^4 \right\} \right] \sin\frac{\pi X}{l} \quad (3)$$

x方向に半波形.

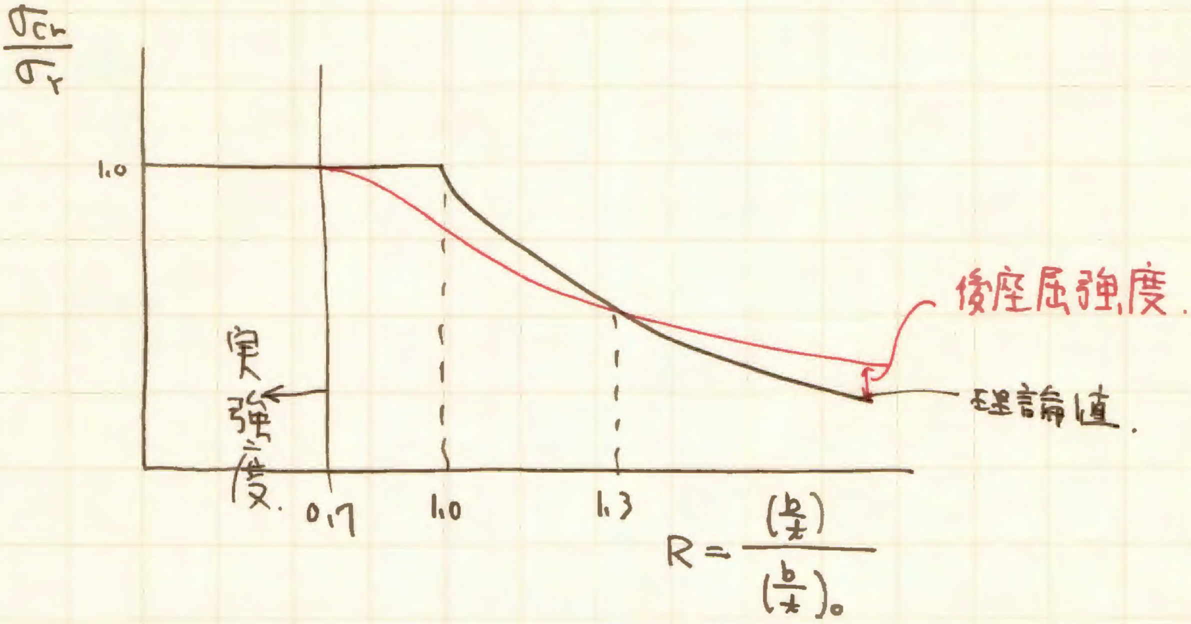
$$\beta = \frac{B}{A} \qquad \left.\begin{array}{lll} \beta = 0 & \text{ヒンジ} & (B=0) \\ \beta \Rightarrow \infty & \text{固定} & (A \Rightarrow 0) \end{array}\right\} Y=0\text{において.}$$

著者の学位論文によれば. a_1, a_2 として次の値が適当である。

$$\left\{\begin{array}{lll} 0 < \beta < 0.1 & a_1 = -0.7 & a_2 = 0.2 \\ \beta = \infty & a_1 = -1.10 & a_2 = 0.54 \end{array}\right.$$

(3)式を(2)式に代入して積分すると.

$$\sigma_x = \frac{t^2}{12\,b^2}\left[D_x\left(\frac{\pi b}{l}\right)^2 + D_Y\left(\frac{l}{\pi b}\right)^2 \frac{2\beta + \beta^2 C_3}{\frac{1}{3} + \beta C_1 + \beta^2 C_2} - (D_{xY} + D_{Yx})\frac{\beta C_4 + \beta^2 C_5}{\frac{1}{3} + \beta C_1 + \beta^2 C_2} + 4G_t \frac{1 + \beta C_6 + \beta^2 C_7}{\frac{1}{3} + \beta C_1 + \beta^2 C_2}\right] \quad (4)$$



土木構造物では　0.7 > R の範囲であるから
後座屈強さは期待しない。

◎ ベズーホフ　弾性・塑性言命
佐藤常三訳.
日刊工業新聞社.

・ プラガー　塑性論.　コロナ

第7章．断面構成する鋼板の幅厚比．

7·1 前文．

薄板（幅厚比の大きい板）：

弾性座屈（ごく小さい荷重で座屈）

⇩

後座屈強さが期待される．

~~強度は座屈強さではなく降伏~~

圧延成形断面，厚板：

非弾性座屈（断面全体が降伏するまで座屈しない）

⇩

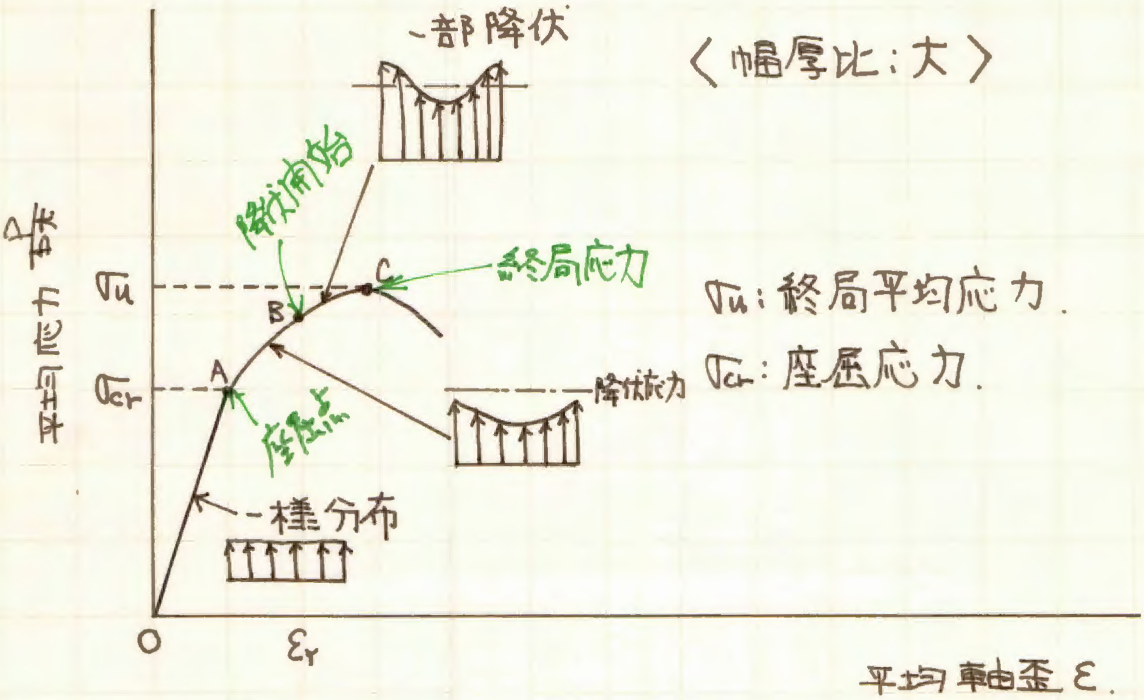
後座屈強さは期待できない．

板要素に作用する最大応力は．幅厚比，境界条件，作用応力分布で決まる．

↓

境界条件，応力分布が同一であれば．弾性座屈か非弾性座屈かは板の幅厚比だけで決まる．

7.2 圧縮を受ける板の挙動.



〈幅厚比:大〉

σ_u: 終局平均応力.

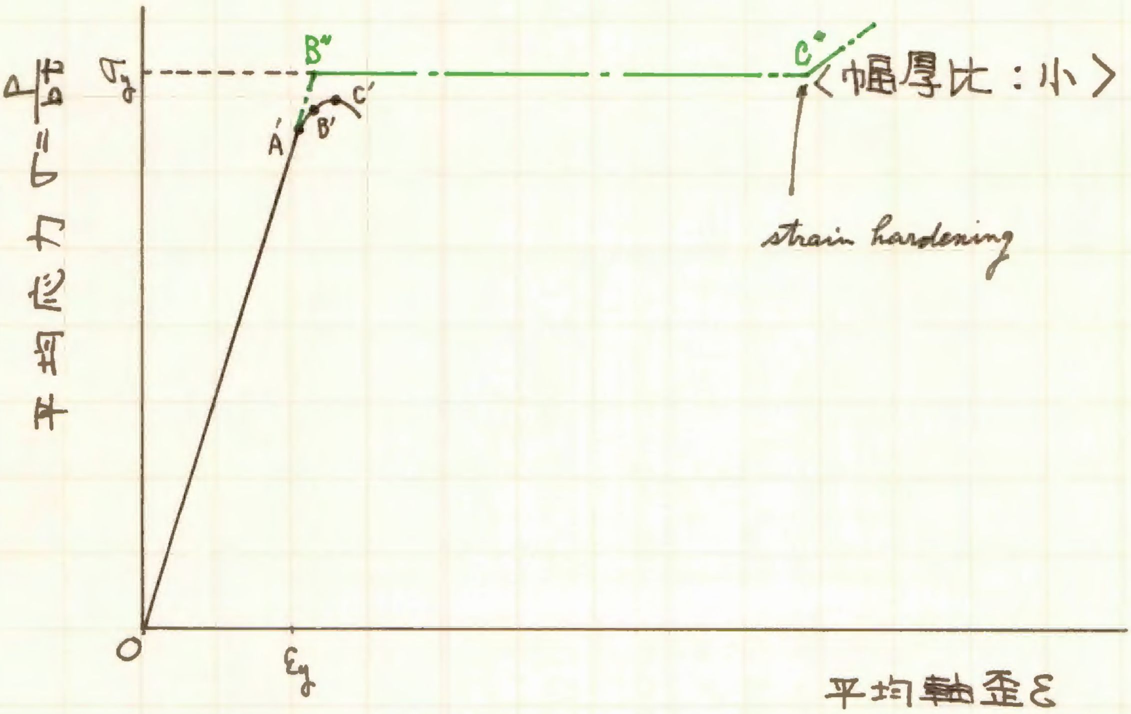
σ_{cr}: 座屈応力.

$\frac{P}{bt} = \sigma_{cr}$ (点A) に達すると, 板は横方向に変形し始める。〈座屈〉

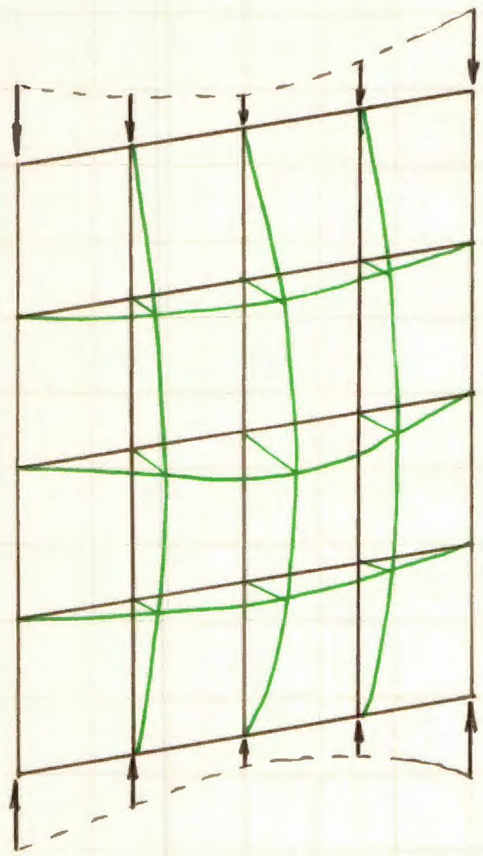
⇩

柱では座屈するとただちに破壊につながるが、板の場合は, 無載荷辺も支持されているために座屈荷重以上の荷重を支えることができる。

座屈荷重以上の荷重の増加は大きい幅厚比の板ほど著しい。


平均応力 $\sigma = \frac{P}{bt}$
σ_y
B"
C"
A'
B'
C'
〈幅厚比：小〉
strain hardening
O
ε_y
平均軸歪 ε

7·3 板の座屈後の挙動.



板の鉛直辺は真直に支持されているため、鉛直辺に近いほどたわみは小さく，中央ほどたわみは大きい。

⇩

鉛直辺に近いほど大きな荷重をうけもつ。

⇩

応力分布は図のように不均一となる。

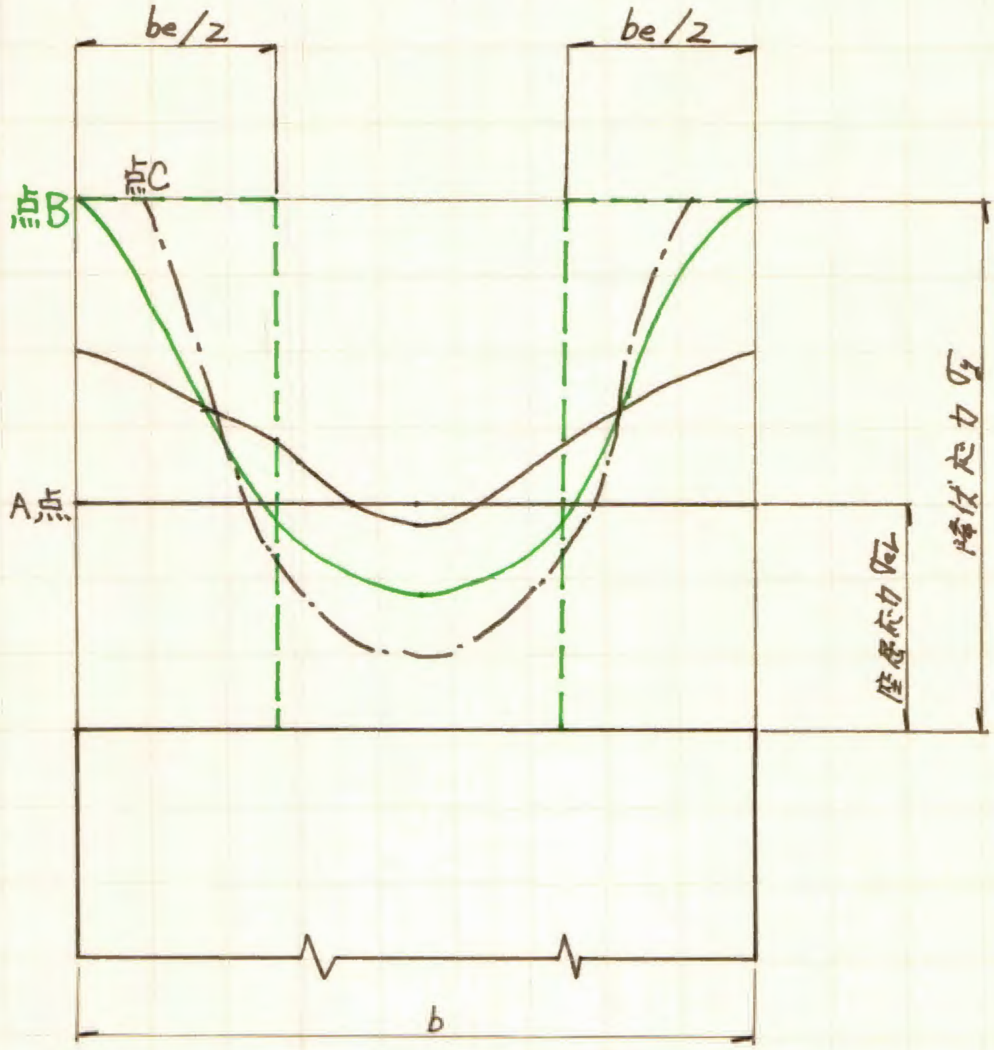
⇩

鉛直辺の応力が降伏応力に達する.

⇩

降伏領域が次第に広がり，逆に中央の応力は減少する。

実際の応力分布と有効幅の概念導入.



be；有効巾.

［実際の応力分布を，巾be/2の2つの長方形応力分布におきかえる（面積は一定）］

be，b，σcr，及び σmax の関係について，フォン・カールマン，ウィンター などが近似公式を提案している。

フォン・カールマン

$$\frac{b_e}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}}}$$

ウィンター

$$\frac{b_e}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}}} \cdot \left\{ 1 - 0.25\sqrt{\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{max}}} \right\}$$

σ_{max} ： 圧縮降伏応力（steel）

ただし、$\sigma_{cr} > 0.7 \cdot \sigma_{max}$ では、耐荷力 $= b \cdot t \cdot \sigma_{cr}$ となり、b_e を計算する必要はない。

7.4 実験結果.

無次元化による一般化.

応力: ⟶ 縦軸.

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y} = \frac{\text{座屈応力}}{\text{降伏応力}}$$

or

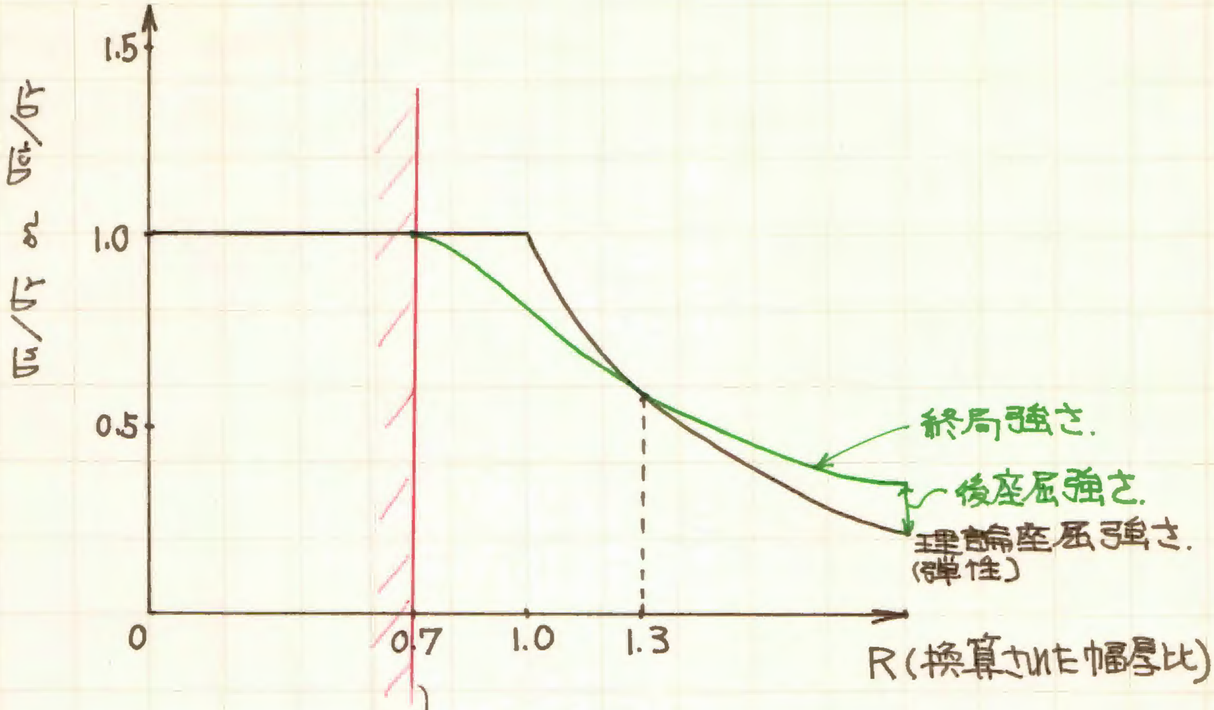
$$\frac{\sigma_u}{\sigma_Y} = \frac{\text{終局応力}}{\text{降伏応力}}$$

幅厚比(換算された): ⟶ 横軸.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} k \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_Y}{\sigma_{cr}}} = \frac{b}{t} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E} \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k}}$$

ある定まった材料(E, ν, σ_Y)及び境界条件(k)に対して、σ_{cr} または σ_u と b/t の関係を示す。



実際使用される板は R<0.7 である。

↓

後座屈強さは期待しない。

7.5 板の幅厚比.

(1) 板の座屈によって決定される部材強度.

10/11

才8章　梁の弾性理論.

曲げを受ける部材

1. 充実体 (Solid body)：すべての方向の寸法が同程度.

⇒ 弾性学

塑性学 (材料の性質が時間に依存する)

2. 板, シェル ：一方向の寸法が他方向の寸法に比べて小さい。

⇒ 境界条件を、弾性学・塑性学に導入.

3. 充実梁 ：二方向の寸法が他の一方向のそれに比べて小さく、二方向の寸法はほぼ同程度.

⇒ 平面保持則の仮定 ⇒ 初等梁力学

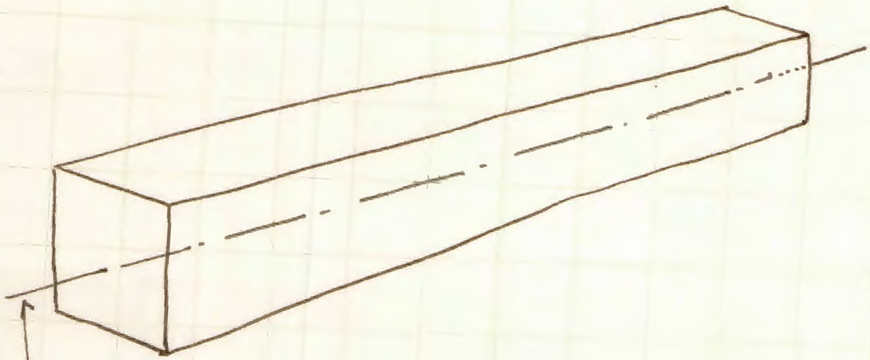
4. 薄肉梁 ：板またはシェルによって構成される.

⇒ 平面保持則は不成立.

充実梁の曲げ.

対称曲げ …… 単純曲げ

非対称曲げ … 二軸曲げ

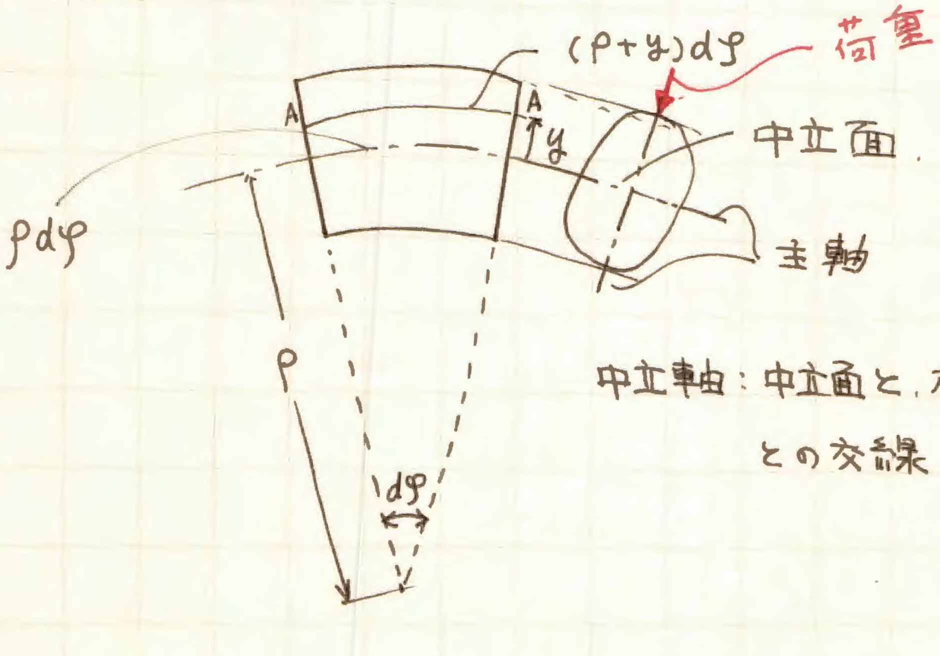


図心を結ぶ線 $\begin{cases} \text{直線} \\ \text{曲線} \begin{cases} \text{曲り梁} \\ \text{Arch} \end{cases} \end{cases}$

‖

材軸.

[対称曲げ]



中立軸: 中立面と,材軸直角断面との交線.

AA面のひずみ $\varepsilon_y = \dfrac{(\rho+y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \dfrac{y}{\rho}$

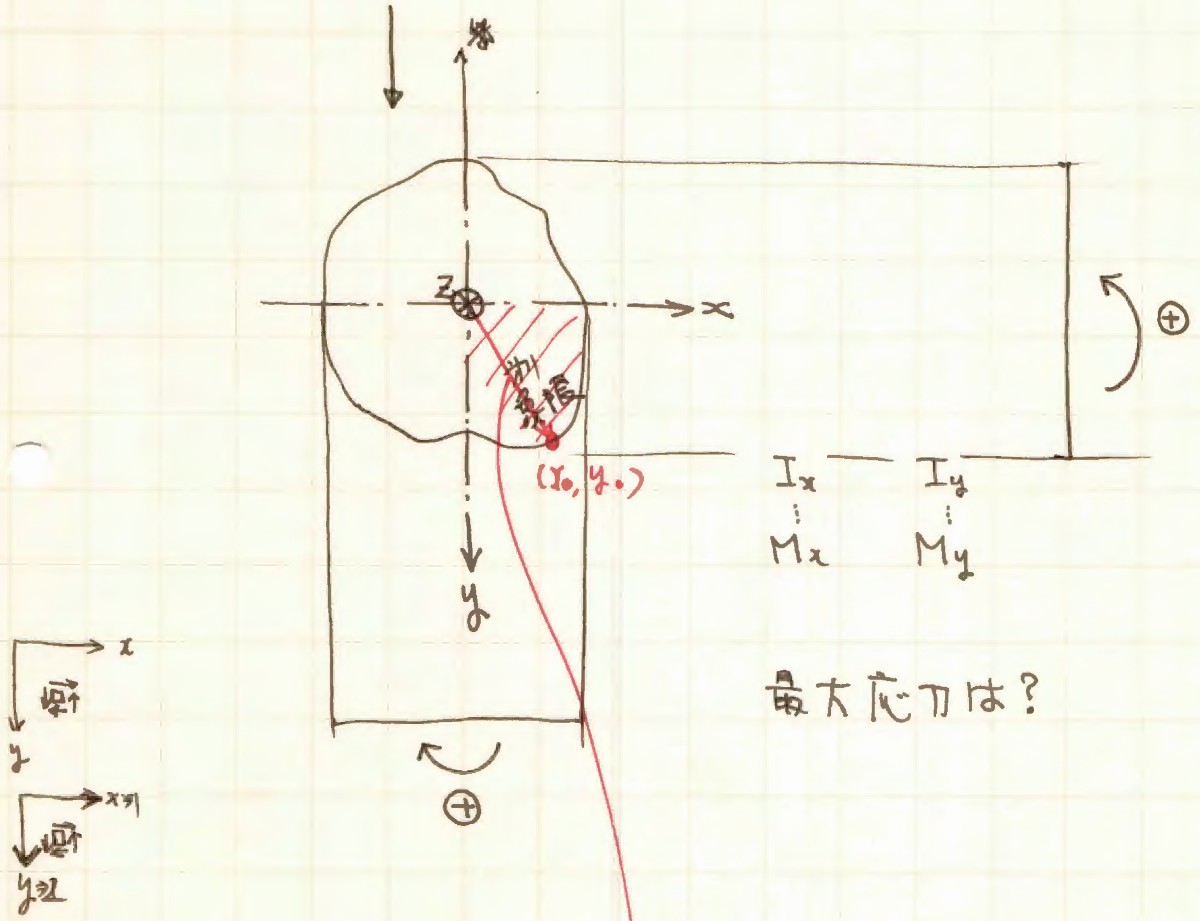
$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}$$

$$M = \int_A E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot y \, dA = \frac{EI}{\rho}$$

$$\left(\int_A y^2 dA = I \right)$$

☆主軸面内に荷重をうける ⟹ 対称曲げ

[非対称曲げ]



I_x — I_y

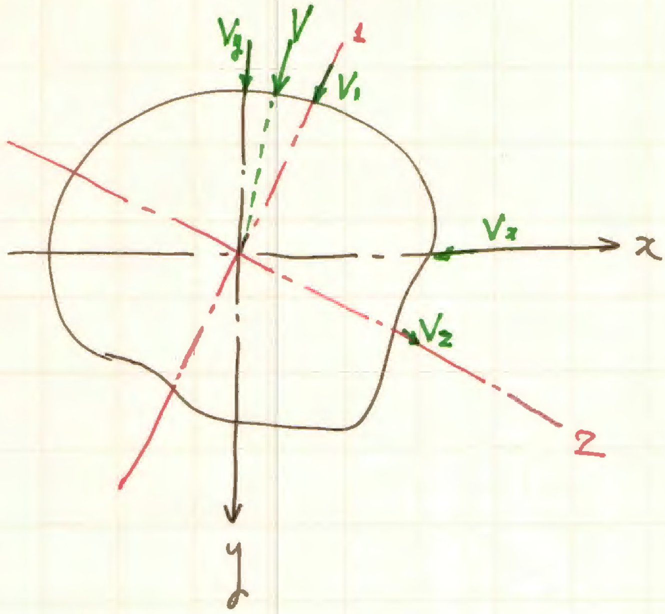
M_x　M_y

最大応力は?

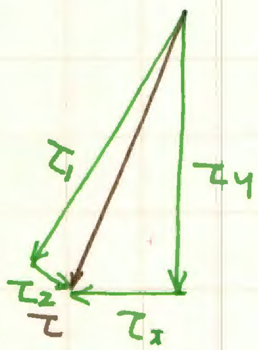
原点から最も遠い点 ($\sqrt{x^2+y^2} = MAX$) において、応力が最大となる。

(証明する → 課題)

式(8.11)に関する問題点.

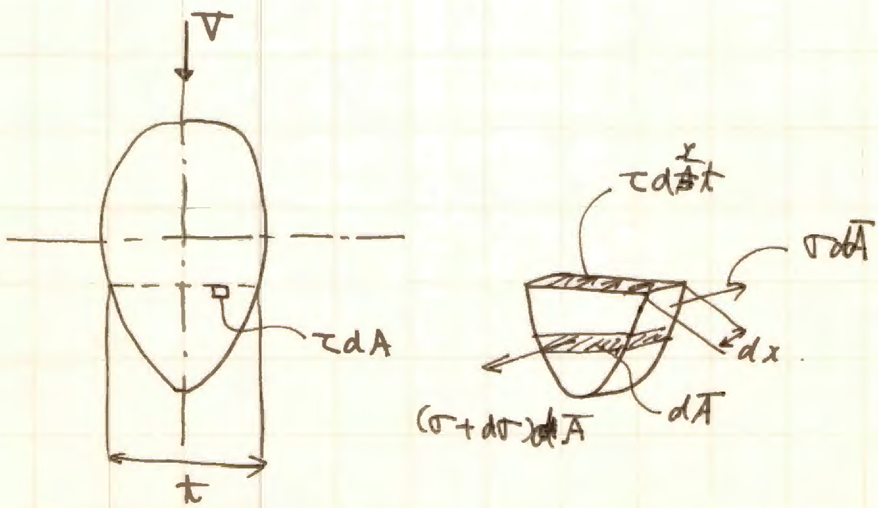


$$V=\int_A \tau dA$$



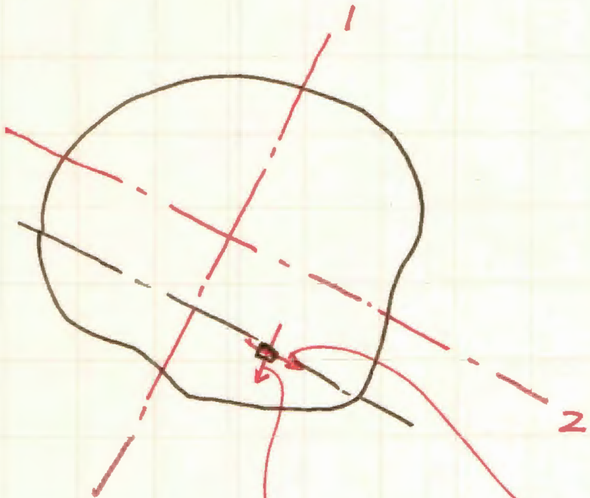
せん断応力τの分解.

式(8.8)のみちびかれる手順.



$$\int d\sigma \, dA = \tau \, dx \, t$$

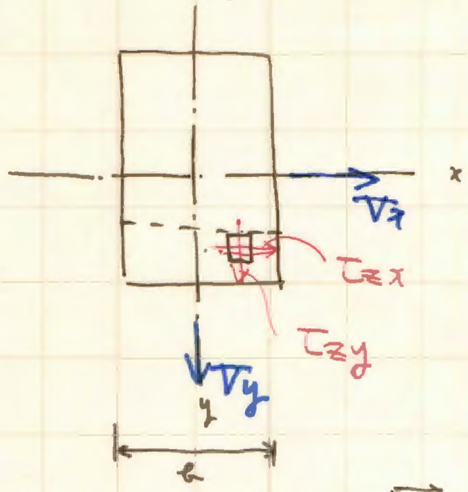
$$\tau = \frac{\int d\sigma \, dA}{dx \, t} = \frac{\int \frac{V y}{I} \cancel{dx} \, dA}{\cancel{dx} \cdot t} = \frac{V Q}{I t}$$

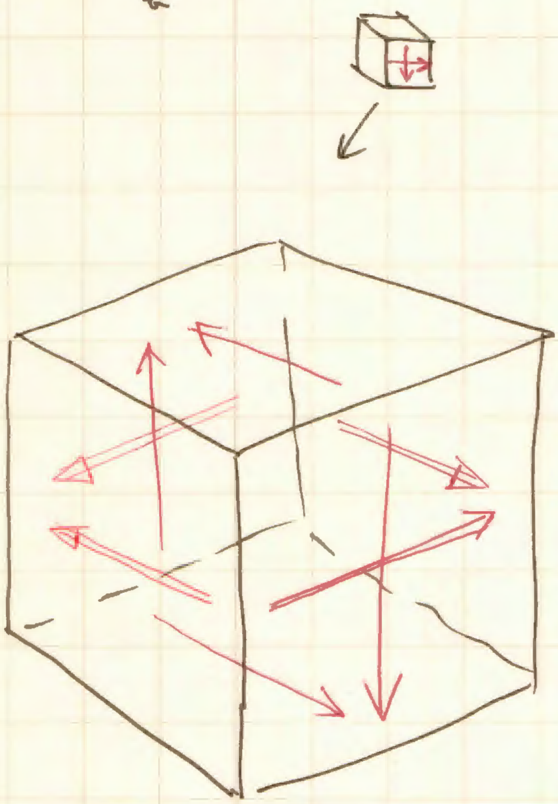


$$\tau_2 = \frac{V_2 \cdot Q_1}{I_1 \cdot t}$$

$$\tau_1 = \frac{V_1 \cdot Q_2}{I_2 \, t}$$

充実梁の二軸曲げによるせん断応力
（主軸について）





$$\tau_{zx} = \frac{V_y G_x}{I_x b}$$

$$\tau_{zy} = \frac{V_x G_y}{I_y b}$$

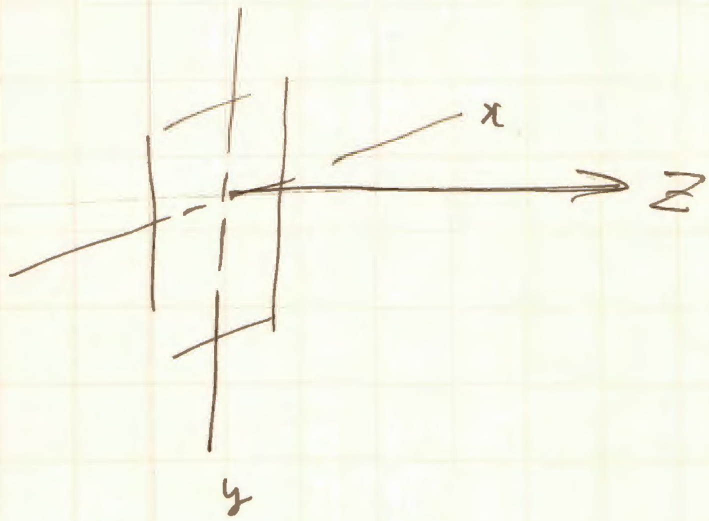
加えることは意味がない。

皆

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= -\frac{\nu M}{EI_y} y + \frac{M}{2EI_y} \cdot 2\nu y = 0$$

二軸（主軸についてやってみる）



u, v, w は重ね合せが成立する。

$$M_x = M_x(z)$$
$$M_y = M_y(z)$$

$$M = M(z)$$

<u>応力関数</u>

[参] 応用弾性学　川本眺万

軽構造の理論とその応用 上　　林 あつし

第2章

微分方程式より

変位 $u = u(x, y, z)$

$v = v(x, y, z)$

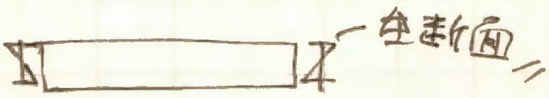
$w = w(x, y, z)$

をもとめ.

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \longrightarrow \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \longrightarrow \tau_{yz} = \end{cases}$$

よりせん断ひずみを求める〃

弾性論にしたがって考える.



単純曲げ.

$$u = -\frac{M}{2EI_y}(z^2 + \nu x^2 - \nu y^2)$$

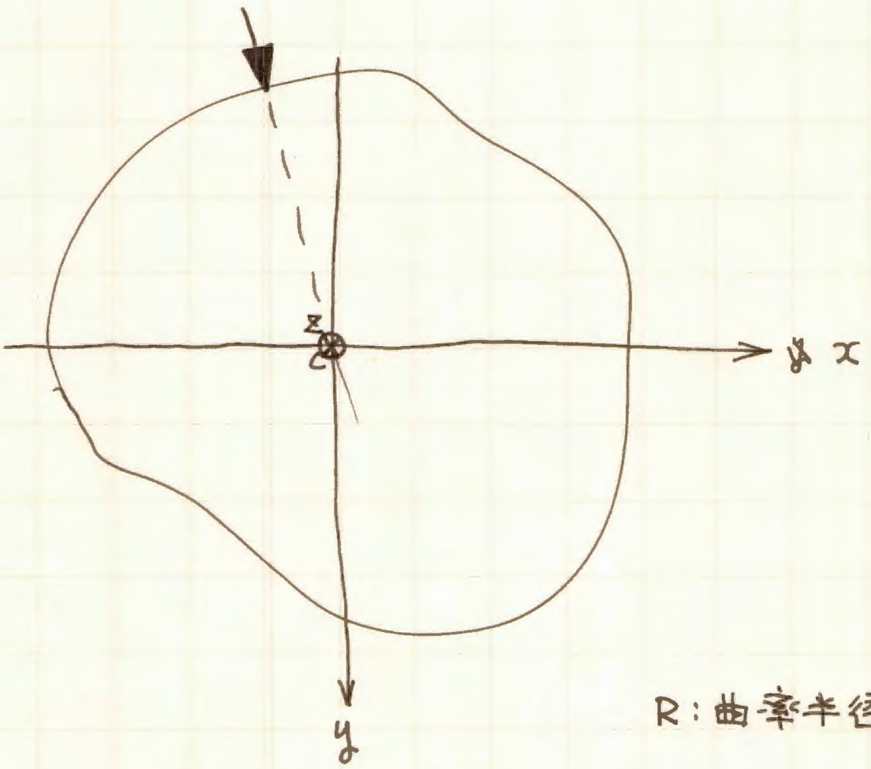
$$v = -\frac{\nu M}{EI_y} xy$$

$$w = \frac{M}{EI_y} xz$$

梁の非対称曲げ.

1. 断面の主軸.

横荷重が図心は通るが対称軸方向に作用しない場合の中立軸を求める.



R：曲率半径.

$$\sigma_z = \frac{E \cdot y}{R}$$

x軸まわりの合モーメントは M_x に等しい.

$$M_x = \int_A \sigma_z y \, dA = \frac{E}{R}\int_A y^2 dA = \frac{EI_y}{R}$$

y軸まわりの合モーメントはM_yに等しい．

$$M_y = \int_A \sigma_z x\,dA = \frac{E}{R}\int_A yx\,dA = \frac{EI_{xy}}{R}$$

$\int_A yx\,dA = I_{xy} = 0$ であれば $M_y = 0$

↓

xまわりの曲げだけが与えられたことになる．

↓

$I_{xy} = 0$ を満足するx軸まわりに曲げモーメントを加えればx軸が中立軸になる．

逆に $I_{xy} = 0$ でy軸が中立軸になるときは．

$$\sigma_z = \frac{Ex}{R}$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y\,dA = \frac{E}{R}\int_A xy\,dA = \frac{EI_{xy}}{R} = 0$$

$$M_y = \int_A \sigma_z x\,dA = \frac{E}{R}\int_A x^2\,dA = \frac{EI_x}{R} = 0$$

断面形 $\Longrightarrow$ 無数の直交軸 x, y

$\Downarrow$

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad , \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad , \quad I_{xy} = \int_A xy\, dA$$

が各々の直交軸について求まる。

$\Downarrow$

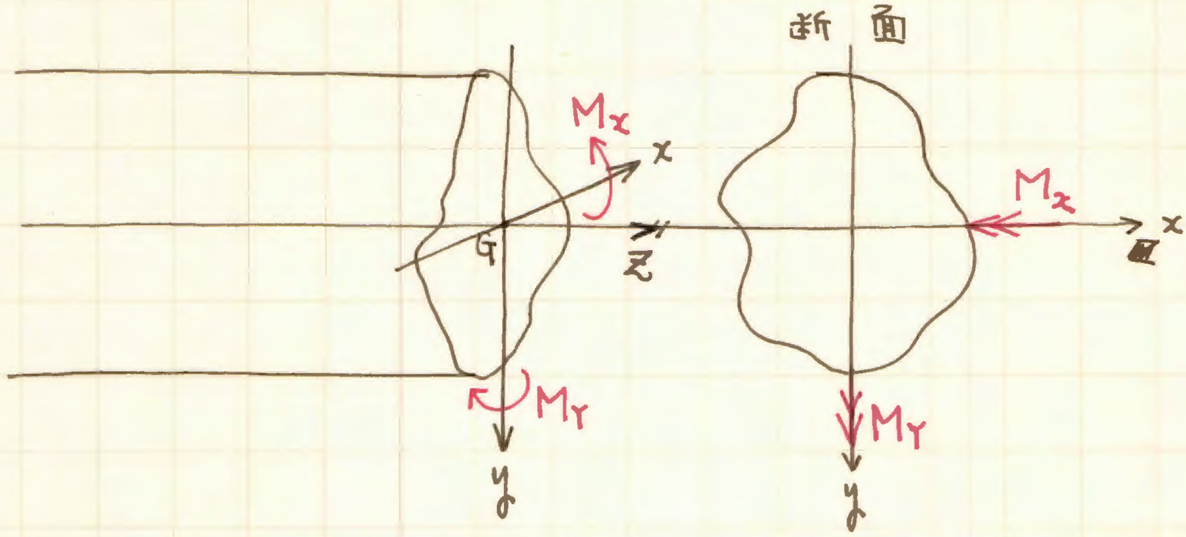
そのうち $I_{xy} = 0$ となる直交軸を主軸という。

主軸に関する I_x, I_y を主断面2次モーメントという。

一般に断面の対称軸と、それに直交する軸はすべて主軸になるが、"図心を通る"となれば限定される。

S54.11.1 皆川 勝

重心を通る任意の直交軸に関する2軸曲げによる、はりの曲げ応力及びせん断応力



M：任意の曲げモーメント

M_x：M の x 軸回り成分

M_Y：M の y 軸回り成分

① 曲げ応力

梁が yz 面内において曲率 $1/R_y$ で曲がったとすれば、それによる曲げ応力は、

$$\sigma_{z1} = \frac{E \cdot y}{R_y} \qquad (1)$$

である。ここで σ_{z1} による x, y 各軸回りの合モーメントが曲げモーメントであるから、

$$M_{x1} = \int_A \sigma_{z1}\, y\, dA = \frac{E}{R_y}\int_A y^2 dA \qquad (2)$$

$$M_{y1} = \int_A \sigma_{z1}\, x\, dA = \frac{E}{R_y}\int_A xy\, dA \qquad (3)$$

である。

次に，xz面内において梁が曲率$1/R_x$で曲っているとすれば、それによる曲げ応力は、

$$\sigma_{z2} = \frac{Ex}{R_x} \qquad (4)$$

であり，x，y軸まわりの曲げモーメントは

$$M_{x2} = \int_A \sigma_{z2}\, y\, dA = \frac{E}{R_x}\int_A xy\, dA \qquad (5)$$

$$M_{y2} = \int_A \sigma_{z2}\, x\, dA = \frac{E}{R_x}\int_A x^2 dA \qquad (6)$$

となる。

ここで

$$\int_A y^2 dA = I_x \;,\; \int_A x^2 dA = I_y \;,\; \int_A xy\, dA = I_{xy}$$

とおけば、

$$\left.\begin{aligned} M_{x1} &= \frac{EI_x}{R_y} \;,\; M_{y1} = \frac{EI_{xy}}{R_y} \\ M_{x2} &= \frac{EI_{xy}}{R_x} \;,\; M_{y2} = \frac{EI_y}{R_x} \end{aligned}\right] \qquad (7\text{-}a,b,c,d)$$

(7−a) と (7−c) を合成すれば

$$M_x = M_{x1} + M_{x2} = E\left(\frac{I_x}{R_y} + \frac{I_{xy}}{R_x}\right) \tag{8}$$

となり，(7−b) と (7−d) を合成すれば

$$M_y = M_{y1} + M_{y2} = E\left(\frac{I_{xy}}{R_y} + \frac{I_y}{R_x}\right) \tag{9}$$

となる。また曲げ応力は，(1) と (4) を合成すれば

$$\sigma_z = \sigma_{z1} + \sigma_{z2} = \frac{E}{R_x}x + \frac{E}{R_y}y \tag{10}$$

(8), (9) を連立して解くと $\frac{E}{R_x}$，$\frac{E}{R_y}$ は次のように求まる。

$$\frac{E}{R_x} = \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}, \quad \frac{E}{R_y} = \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

(11−a, b)

(11−a, b) を (10) に代入すれば，曲げ応力は次のように求まる。

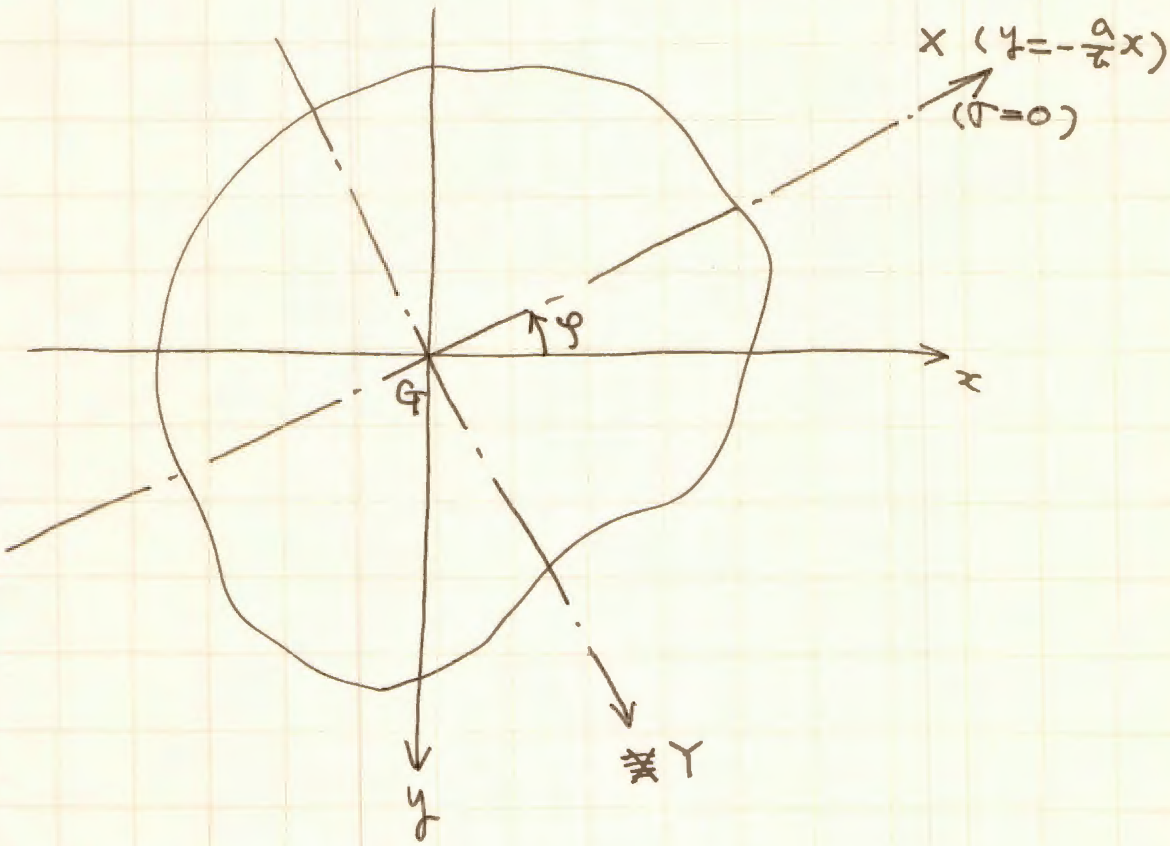
$$\sigma_z = \sigma_{z1} + \sigma_{z2} = \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}x + \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}y \tag{12}$$

②◎ 曲げ応力の最大となる位置及び最大応力

まず中立軸を求める。式(12)において $\sigma_z=0$ とおくと、

$$\frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}x + \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}y = 0$$

$$\therefore \quad y = -\frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{M_x I_y - M_y I_{xy}}x \left[= -\frac{a}{b}x \text{ とする}\right] \quad (13)$$



$$\left(\begin{aligned} a &= (M_y I_x - M_x I_{xy})/(I_x I_y - I_{xy}^2) \\ b &= (M_x I_y - M_y I_{xy})/(I_x I_y - I_{xy}^2) \end{aligned}\right)$$

図のように φ をとれば，

$$\left.\begin{aligned} \tan\varphi &= -\frac{a}{b} \\ \sin\varphi &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

とおける。ここで，

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos\varphi + Y\sin\varphi \\ y &= X\sin\varphi - Y\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

を 式(12)に代入すれば 次のようになる。

$$\sigma = ax + by$$

$$= a(X\cos\varphi + Y\sin\varphi) + b(X\sin\varphi - Y\cos\varphi)$$

$$= (a\cos\varphi + b\sin\varphi)X + (a\sin\varphi - b\cos\varphi)Y.$$

これに式(14)を代入すると．

$$\sigma = \left(a\frac{(-b)}{\sqrt{a^2+b^2}} + b\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)X + \left(a\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - b\frac{(-b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)Y$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,Y$$

となり、

$$a = \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad , \quad b = \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

を代入すれば、

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{(M_y I_x - M_x I_{xy})^2 + (M_x I_y - M_y I_{xy})^2}}{I_x I_y - I_{xy}^2} Y \qquad (16)$$

よって　$|Y|$ が最大で $|\sigma_z|$ は最大となる。

3 ⓐ せん断応力

yz面内の曲率 $1/R_y$ にともなうせん断力に対するせん断応力は

$$\tau_y = \frac{E\,Q_x}{t}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_y}\right)$$

$$= \frac{E\,Q_x}{t}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}\cdot\frac{1}{E}\right)$$

$$= \frac{Q_x}{t}\cdot\frac{1}{I_x I_y - I_{xy}^2}\left(I_y\cdot\frac{\partial M_x}{\partial z} - I_{xy}\frac{\partial M_y}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{V_y I_y - V_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}\cdot\frac{Q_x}{t} \qquad (17)$$

である。

また xz面内の曲率 $1/R_x$ にともなうせん断力に対するせん断応力はつぎのようになる

$$\tau_x = \frac{E\,Q_y}{t}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R_x}\right)$$

$$= \frac{Q_y}{t}\cdot\frac{1}{I_x I_y - I_{xy}^2}\left(I_x\frac{\partial M_y}{\partial z} - I_{xy}\frac{\partial M_x}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{V_x I_x - V_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}\cdot\frac{Q_y}{t} \qquad (18)$$

τ_1 と τ_2 は応力の方向が互いに直角であるから重ね合せることはできない。

4 主軸に関して

また，x, y 軸が主軸の場合，各応力は

以下のようになる。

すなわち　添字 x を 1 に y を 2 にし，

$$I_{12} = 0 ,$$

とすれば．　（1 は主軸 x' を 2 は主軸 y' を表わすとする）

曲げ応力

$$\sigma_z = \frac{M_1}{I_1} y' + \frac{M_2}{I_2} x' \qquad (19)$$

中立軸．

$$y' = - \frac{M_2 I_1}{M_1 I_2} x' \qquad (20)$$

$$\therefore \sigma_z = \frac{\sqrt{M_2^2 I_1^2 + M_1^2 I_2^2}}{I_1 I_2} Y'$$

$$= \sqrt{\left(\frac{M_2}{I_2}\right)^2 + \left(\frac{M_1}{I_1}\right)^2}\ Y' \qquad (21)$$

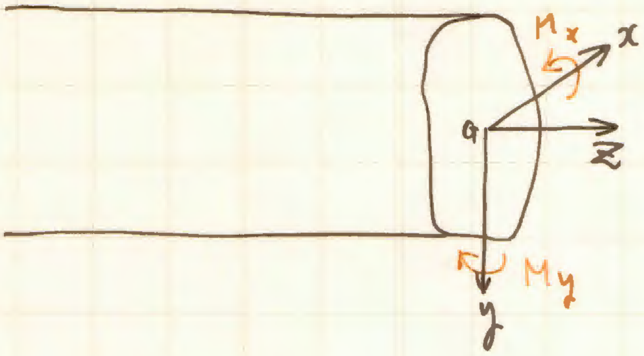
せん断応力

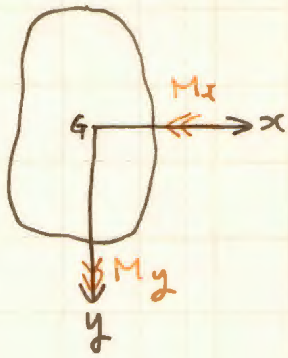
$$\tau_1 = \frac{V_1 Q_2}{I_2 t} \qquad (22)$$

$$\tau_2 = \frac{V_2 Q_1}{I_1 t} \qquad (23)$$

これについても重ね合せは成立しない。

x, y は主軸とする。





$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

他の応力成分.

$$\tau_{zx} \neq 0 \quad , \quad \tau_{yz} \neq 0$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 .$$

今、物体力を無視すれば、つり合い方程式は次のようになる：

$$\frac{\partial \overset{=0}{\sigma_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overset{=0}{\tau_{xy}}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \overset{=0}{\tau_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \overset{=0}{\sigma_y}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{S_y}{I_x} y + \frac{S_x}{I_y} x = 0$$

つり合い方程式

$$\therefore \boxed{\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\left(\frac{S_y}{I_x} y + \frac{S_x}{I_y} x\right)} \quad (\mathrm{I})$$

適合条件.（応力成分で表わされた適合条件）

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0$$

$$(1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad (1+\nu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = 0$$

$$(1+\nu)\underbrace{\nabla^2\sigma_z}_{=0} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad , \quad \Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

この場合の応力成分を入れる；

$$(1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} = -\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = -\left(\frac{S_y}{I_x}\right)$$

$$(1+\nu)\nabla^2\tau_{zx} = -\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z \partial x} = -\left(\frac{S_x}{I_y}\right)$$

$\cancel{(1+\nu)\nabla^2\sigma_z}$

適合条件。

故に.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2\tau_{yz} &= -\frac{S_y}{I_x(1+\nu)} \\ \nabla^2\tau_{zx} &= -\frac{S_x}{I_y(1+\nu)} \end{aligned}} \quad (\mathrm{I})$$

境界条件。

はりに表面力が働かないとすると.

$$\overset{=0}{\sigma_x} \cdot l + \overset{=0}{\tau_{xy}}\, m + \tau_{zx}\, \overset{=0}{n} = 0$$

$$\tau_{xy}\, \overset{=0}{l} + \overset{=0}{\sigma_y}\, m + \tau_{yz}\, \overset{=0}{n} = 0$$

$$\tau_{zx}\, l + \tau_{yz}\, m + \sigma_z\, \overset{=0}{n} = 0$$

$$\left(\underset{\cos(Nx)}{l = \frac{dy}{ds}}, \quad \underset{\cos(Ny)}{m = -\frac{dx}{ds}}, \quad \underset{\cos(Nz)}{n = \frac{dz}{ds} = 0} \right)$$

$$\tau_{zx} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m = 0$$

境界条件

$$\therefore \boxed{\tau_{zx} \cdot \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0} \qquad (\mathrm{III})$$

まとめると.

(I) つり合い方程式

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\left(\frac{S_y}{I_x} y + \frac{S_x}{I_y} x\right) \qquad (2)$$

(II) 適合条件式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tau_{yz} = -\frac{S_y}{(1+\nu) I_x} \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tau_{zx} = -\frac{S_x}{(1+\nu) I_y} \qquad (4)$$

(III) 境界条件式

$$\tau_{zx} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} = 0 \qquad (5)$$

応力関数 $\phi = \phi(x, y)$ によって

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{S_x}{2I_y} x^2 + f(y) \qquad (6)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{S_y}{2I_x} y^2 + g(x) \qquad (7)$$

と表わせば，(6), (7) 式は (1), (2) 式のつり合い方程式

を満たす.

(6), (7) 式を (3), (4) 式の適合条件式に代入する;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = -\frac{S_y}{I_x} + \frac{S_y}{(1+\nu)I_x} = -\frac{\nu S_y}{(1+\nu)I_x} + \frac{d^2 g}{dx^2} \qquad \cdots (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = \frac{S_x}{I_y} - \frac{d^2 f}{dy^2} - \frac{S_x}{(1+\nu)I_y}$$

$$= \frac{\nu S_x}{(1+\nu)I_y} - \frac{d^2 f}{dy^2} \qquad \cdots (9)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = +\frac{\nu S_x}{(1+\nu)I_y} y - \frac{df}{dy} - \frac{\nu S_y}{(1+\nu)I_x} x + \cancel{c}$$

$$= \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{S_x}{I_y} y - \frac{S_y}{I_x} x\right) - \frac{df}{dy} + \frac{dg}{dx} + \cancel{c}$$

(c は未定定数)

$$\cdots (10)$$

(6), (7)式を(5)式の境界条件式に代入すると

$$\frac{dy}{ds}\left[\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{S_x}{2I_y}x^2+f\right]+\frac{dx}{ds}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}+\overbrace{\frac{S_y}{2I_x}y^2}^{-g}\right]=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}=\left(\frac{S_x}{2I_y}x^2-f\right)\frac{dy}{ds}-\overbrace{\left(\frac{S_y}{2I_x}y^2\right)}^{-g}\frac{dx}{ds}$$

—(11)

すなわち、微分方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{S_x}{I_y}y-\frac{S_y}{I_x}x\right)-\frac{df}{dy}+\frac{dg}{dx}$$

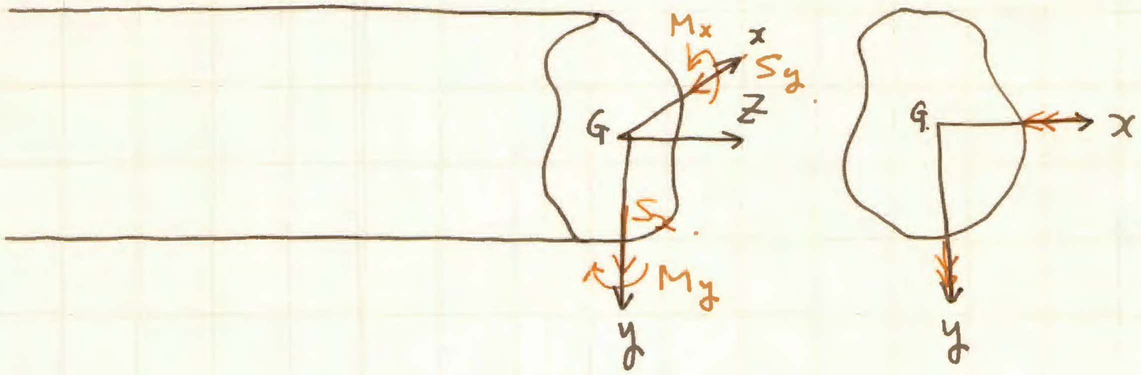
を、次の境界条件

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}=\left(\frac{S_x}{2I_y}x^2-f\right)\frac{dy}{ds}-\overbrace{\left(\frac{S_y}{2I_x}y^2\right)}^{-g}\frac{dx}{ds}$$

を満足するように解いて、応力関数ϕを求めればよい。

2軸曲げに伴なうせん断応力

[弾性論から求めてみる]



2軸曲げに伴なう，曲げ応力.

$$\sigma_z = \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} x + \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} y \qquad (1)$$

他の応力成分.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{yz} &\neq 0 \\ \tau_{zx} &\neq 0 . \end{aligned}\right\} \qquad (1)'$$

すなわち問題は，弾性論の立場から τ_{yz}, τ_{zx} を求めることである.

今，物体力を無視すれば、つり合い方程式は，
(1)，(1)' を考慮して次のようになる；

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad , \\
&\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad , \\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\left(\frac{\overset{S_x}{M_y} I_x - \overset{S_y}{M_x} I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}\, x + \frac{\overset{S_y}{M_x} I_y - \overset{S_x}{M_y} I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}\, y \right)
\end{aligned}
\right\} (2)
$$

次に，応力成分を用いて適合条件を表わす；

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{yz} = -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} \\
&\qquad\qquad = -\frac{1}{1+\nu} \left(\frac{S_y I_y - S_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right) \\
&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tau_{zx} = -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z \partial x} \\
&\qquad\qquad = -\frac{1}{1+\nu} \left(\frac{S_x I_x - S_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \right)
\end{aligned}
\right\} (3)
$$

境界条件

$$\tau_{zx}\frac{dy}{ds}-\tau_{yz}\frac{dx}{ds}=0 \qquad \cdots (4)$$

ここで、応力関数 $\phi=\phi(x,y)$ を導入して、τ_{zx}, τ_{yz} を次のように表わす;

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx}&=\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{2(I_xI_y-I_{xy}^2)}x^2+f(y)\\ \tau_{yz}&=-\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{2(I_xI_y-I_{xy}^2)}y^2+g(x)\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

(5)式は、つり合い方程式(2)を満たす。$f(y)$, $g(x)$ は境界条件によって決まる関数である。

(5)式を、(3)式に適用する;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{2(I_xI_y-I_{xy}^2)}y^2+g(x)\right)=-\frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{2(I_xI_y-I_{xy}^2)}x^2+f(y)\right)=-\frac{1}{1+\nu}\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)=-\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}+\frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)=-\frac{\nu}{1+\nu}\cdot\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}+\frac{d^2 g}{dx^2} \qquad (6\cdot1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)=\frac{\nu}{1+\nu}\cdot\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}-\frac{d^2f}{dy^2} \qquad (6.2)$$

(6.1) 及び (6.2) より,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}y-\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}x\right)-\frac{df}{dy}+\frac{dg}{dx} \qquad (7)$$

(5)式を(4)式に代入する;

$$\left\{\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{2(I_xI_y-I_{xy}^2)}x^2+f\right\}\frac{dy}{ds}+\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{2(I_xI_y-I_{xy}^2)}y^2-g\right\}\frac{dx}{ds}=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}$$

$$=\left\{\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{2(I_xI_y-I_{xy}^2)}x^2-f\right\}\frac{dy}{ds}-\left\{\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{2(I_xI_y-I_{xy}^2)}y^2-g\right\}\frac{dx}{ds} \qquad (8)$$

すなわち、問題は、微分方程式(7)を(8)の境界条件を満たすように解くことである。

5. 適合条件（断面周辺において）$\phi=0$ とする.

すなわち　$x^2+y^2=a^2$ において $\phi=0$.

ここで ϕ を次のようにおくことができる;

$$\phi = \alpha(x^2+y^2-a^2)(cx+dy)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 2(cx+dy)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 2(cx+dy)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 4(cx+dy)$$

よって　$c = -\dfrac{1+2\nu}{4(1+\nu)}\cdot\dfrac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}$

$$d = \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)}\cdot\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}$$

となる.

半径 a の 円形断面について考える；

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{9}$$

ここで、f, g を次のようにとる；

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{S_x I_x - S_y I_{xy}}{2(I_x I_y - I_{xy}^2)} x^2 = (a^2 - y^2) \\ g &= \frac{S_y I_y - S_x I_{xy}}{2(I_x I_y - I_{xy}^2)} y^2 = (a^2 - x^2) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

すると、(8)式は次のようになる；

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = 0$$

すなわち　$\phi = \text{constant}$,　(11)

(10)式を (7)式に適用する；

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{S_x I_x - S_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} y - \frac{S_y I_y - S_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} x \right)$$

$$+ \frac{S_x I_x - S_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} y - \frac{S_y I_y - S_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} x$$

$$= \frac{1+2\nu}{1+\nu} \left(\frac{S_x I_x - S_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} y - \frac{S_y I_y - S_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} x \right) \tag{12}$$

よって.

$$\phi=(x^2+y^2-a^2)\cdot\frac{1+2\nu}{4(1+\nu)}\left\{\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}y-\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}x\right\} \tag{13}$$

(10)式, (13)式を(5)式に適用して, τ_{yz}, τ_{zx} が次のようになる.

$$\tau_{zx}=\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{2(I_xI_y-I_{xy}^2)}x^2+f$$

$$=\frac{1+2\nu}{4(1+\nu)}\left\{2y\left(\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}y-\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}x\right)+(x^2+y^2-a^2)\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}\right\}$$

$$-\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{2(I_xI_y-I_{xy}^2)}x^2+\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{2(I_xI_y-I_{xy}^2)}x^2$$

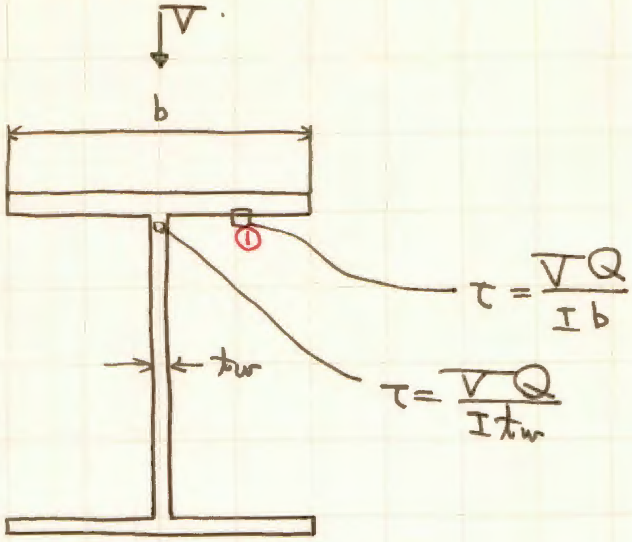
$$=\frac{1+2\nu}{4(1+\nu)}\left\{(x^2+3y^2-a^2)\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}-2xy\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}\right\}$$

$$\tau_{yz}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$=-\frac{1+2\nu}{4(1+\nu)}\left\{2x\left(\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}y-\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}x\right)-(x^2+y^2-a^2)\cdot\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}\right\}$$

$$=\frac{1+2\nu}{4(1+\nu)}\left\{(3x^2+y^2-a^2)\frac{S_yI_y-S_xI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}-2xy\frac{S_xI_x-S_yI_{xy}}{I_xI_y-I_{xy}^2}\right\}$$

//



① では実際は外力=0であるから τ=0
でなければならない → おかしい

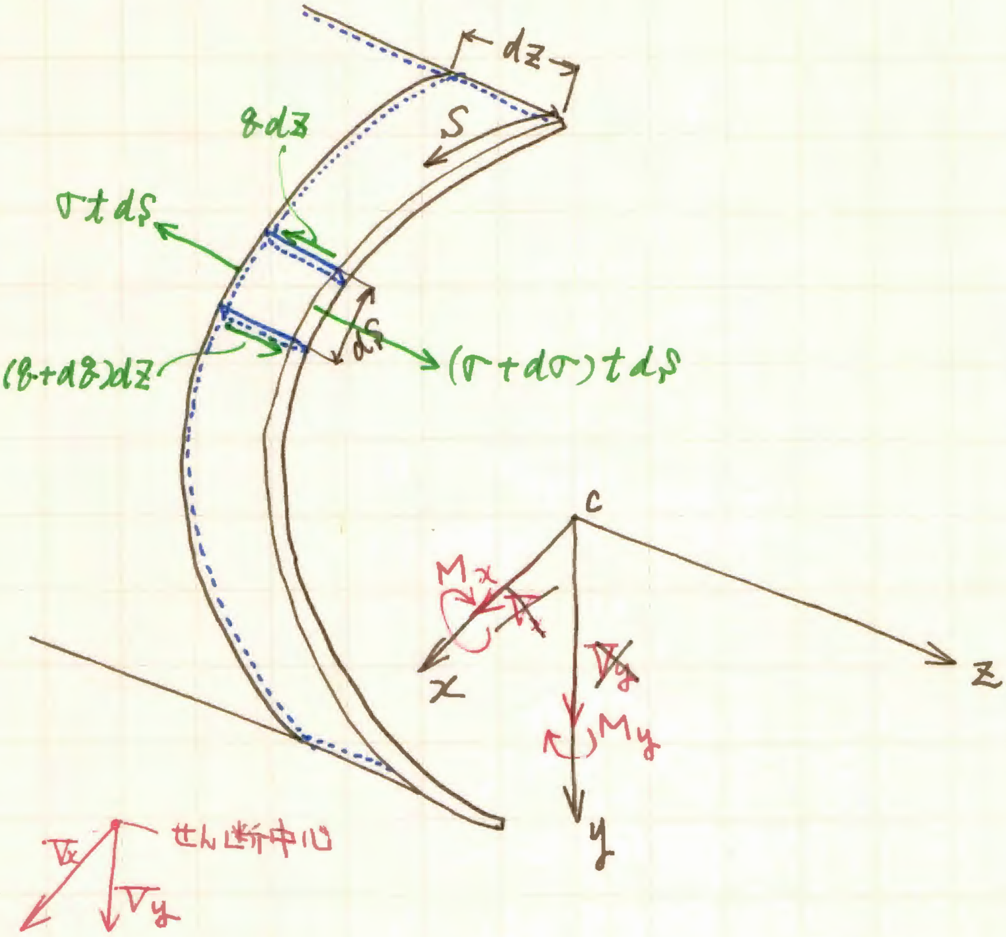
⇓

せん断流の理論
Shear Flow

曲げモーメントが変化するときにせん断応力が発生する。

$$V = \frac{dM}{dx} , \quad V = \int \tau \, dA$$

8.5 薄肉開断面梁の二軸曲げに伴うせん断応力。



微小要素のz方向のつり合いから.

$$(\sigma + d\sigma)\,t\,ds - \sigma\,t\,ds + (q + dq)\,dz - q\,dz = 0$$

$$d\sigma\,t\,ds + dq\,dz = 0$$

$$\therefore \quad t\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \qquad (8\cdot13)$$

2軸曲げによるせん断応力（最も一般的な場合）

今、yz面内で曲率 $1/R_y$ の曲げを生じたとすると、

直応力 $\sigma_1 = \dfrac{E}{R_y} \cdot y$

$$M_{x1} = \frac{EI_x}{R_y} \quad , \quad M_{y1} = \frac{EI_{xy}}{R_y}$$

同様に、xz面内の曲率に対して、

直応力 $\sigma_2 = \dfrac{E}{R_x} x$

$$M_{x2} = \frac{EI_{xy}}{R_x} \quad , \quad M_{y2} = \frac{EI_y}{R_x}$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{E}{R_y} y + \frac{E}{R_x} x$$

$$M_x = \frac{EI_x}{R_y} + \frac{EI_{xy}}{R_x}$$

$$M_y = \frac{EI_{xy}}{R_y} + \frac{EI_y}{R_x}$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} y + \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} x$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{V_y I_y - V_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}\, y + \frac{V_x I_x - V_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{V_y I_y - V_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}\, yt - \frac{V_x I_x - V_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}\, xt$$

$$\therefore \quad q = \frac{V_x I_{xy} - V_y I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \int_0^s yt\, ds + \frac{V_y I_{xy} - V_x I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \int_0^s xt\, ds \qquad (8.18)$$

x軸，y軸が主軸1,2の場合.

(添字 $x \to 1$, $y \to 2$, $I_{xy} = 0$ とする)

$$q = -\frac{V_2}{I_1} \int_0^s yt\, ds - \frac{V_1}{I_2} \int_0^s xt\, ds$$

(ただし $\dfrac{\partial M_x}{\partial z} = V_y$, $\dfrac{\partial M_y}{\partial z} = V_x$ である.)

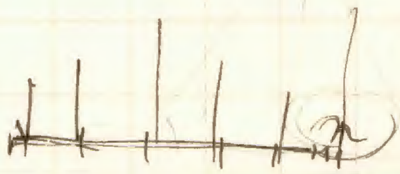
ねじり

曲げ …… normal stress $\left\{\begin{array}{l}\text{充実}\\ \text{薄肉}\end{array}\right\}$ $\sigma = \frac{M}{I} y$

shear stress $\left\{\begin{array}{l}\text{充実}\\ \text{薄肉} \text{ … shear flow}\end{array}\right.$

(工学的仮定)

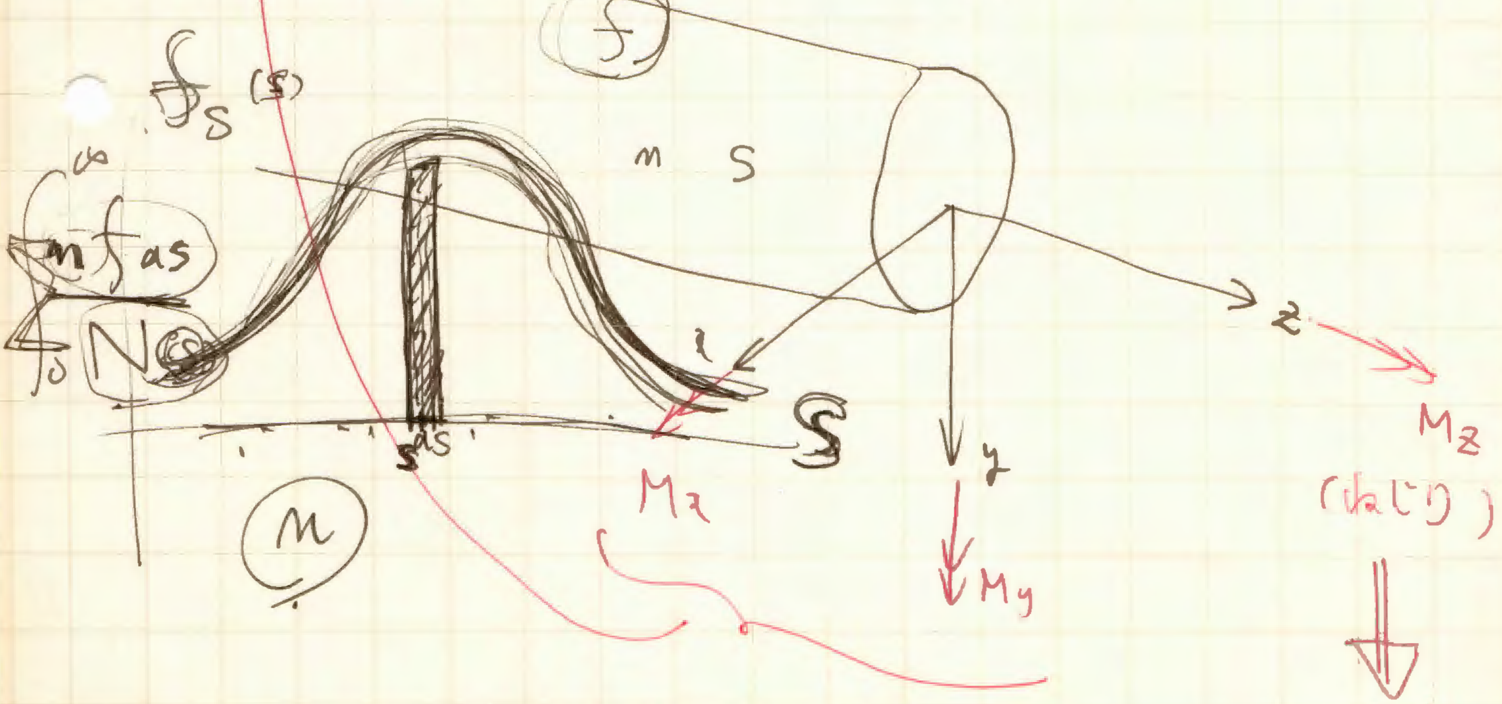
梁. $z \gg x, y$



薄肉 $\left\{\begin{array}{l} z \gg s, t \\ s \gg t \end{array}\right.$

$S = s$ の関数

$n \int a s$



(ねじり)

⇓

残る問題

ねじれ ⇒ 垂直応力 充実材.
薄肉材.
せん断応力 充実材.
薄肉材.

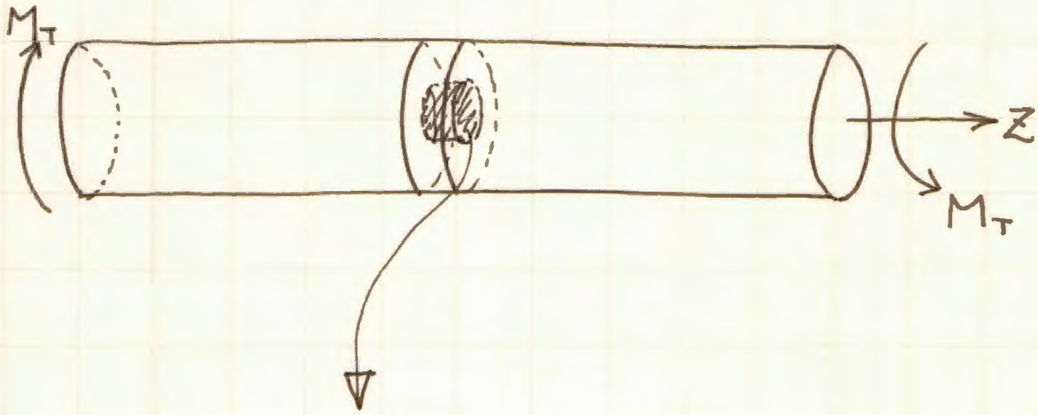
こういう考え方はなされていない.

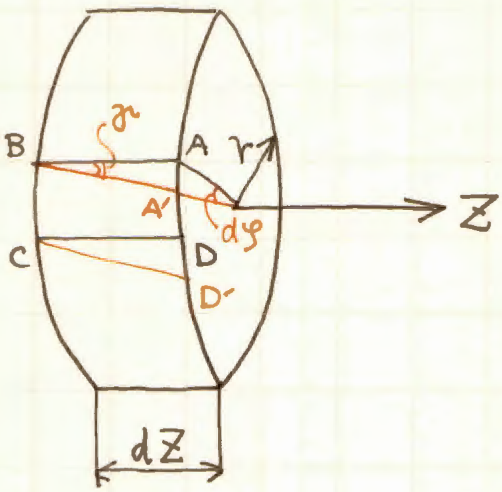
↓ why

曲げ：…平面保持則が成立する.

ねじれ：… 一般的にそり(warping)が生ずる.
特殊な場合に限り平面保持則が成立する。

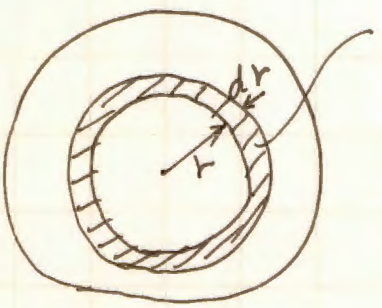
[1] Shaft のねじり.





$$\gamma = \frac{AA'}{AB} = \frac{r\,d\varphi}{dZ} = r\cdot\varphi'$$

$$\tau = G\cdot\gamma = G\cdot r\cdot\varphi'$$



$dA = 2\pi r\,dr$

$$\begin{aligned} dM_T &= \tau\cdot r\cdot dA \\ &= 2\pi\tau r^2 dr \\ &= 2\pi G r^3 \varphi' dr \end{aligned}$$

$$M_T = \int_0^R 2\pi G r^3 \varphi' dr$$

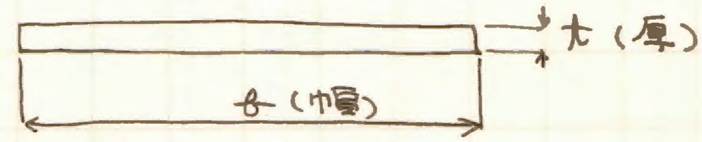
$$= \frac{\pi R^4}{2} G \varphi'$$

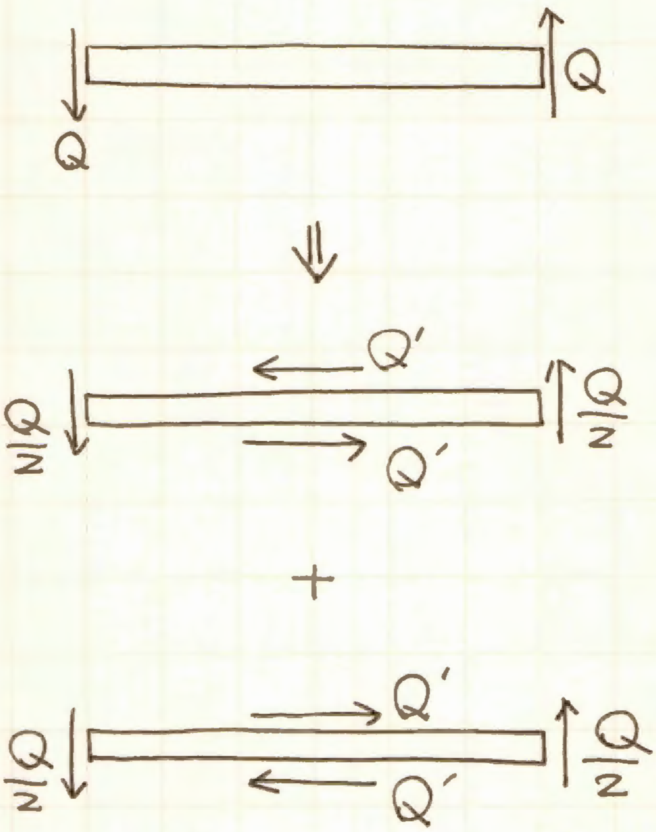
故に.

$$\boxed{M_T = G \cdot k_T \cdot \frac{d\varphi}{dz} \qquad \left(k_T = \frac{\pi R^4}{2} \right)}$$

[2] 薄板のねじり.

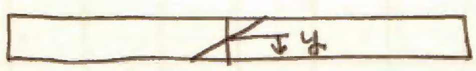
断面.





剛体回転.

[仮定] 応力分布は直線分布



$$\tau = \tau_0 \cdot y$$

$$Q' t = \frac{Q}{2} b = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_0 y \cdot y \cdot b \, dy$$

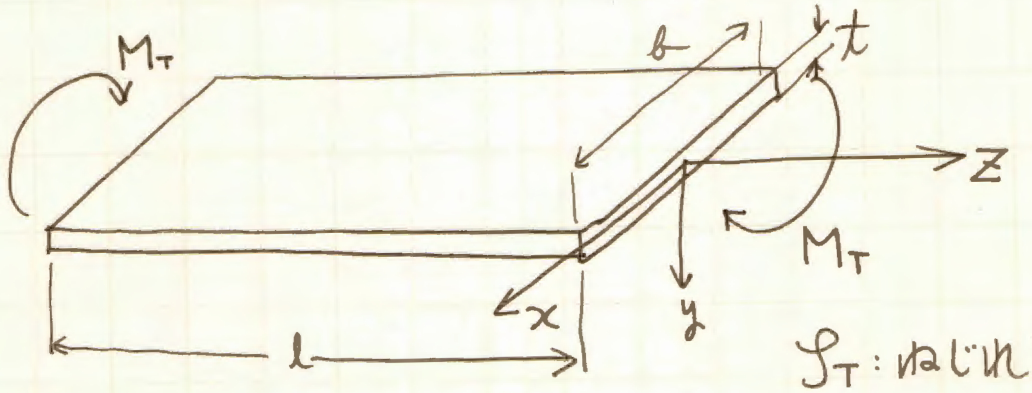
$$= \tau_0 b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}$$

$$= \tau_0 b \frac{t^3}{12}$$

$$\therefore M_z = Q \cdot b = \tau_0 b \frac{t^3}{6}$$

$$\therefore \quad \tau_0 = \frac{6 M_z}{b t^3}$$

$$\tau_{max} = \frac{6 M_z}{b t^3} \cdot \frac{t}{2} = \frac{3 M_z}{b t^2}$$



φ_T：ねじれ角

エネルギー法.

$$\frac{M_T \varphi_T}{\cancel{2}} = \int_V \frac{\tau \cdot \gamma}{2} dV = b \cdot l \cdot \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{\tau \cdot \gamma}{2} dy$$

$$= \frac{bl}{2G} \tau_0^2 \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} y^2 dy = \frac{bl}{2G} \cdot \tau_0^2 \cdot \frac{t^3}{12}$$

$$= \frac{\cancel{b} l}{\cancel{2} G} \cdot \frac{\cancel{36}^{3} M_T^{\cancel{2}}}{b^{\cancel{2}} t^{\cancel{6}\,3}} \cdot \frac{\cancel{t^3}}{\cancel{12}} \; *$$

$$\therefore \varphi_T = \frac{3\,l\,M_T}{G\,b\,t^3}$$

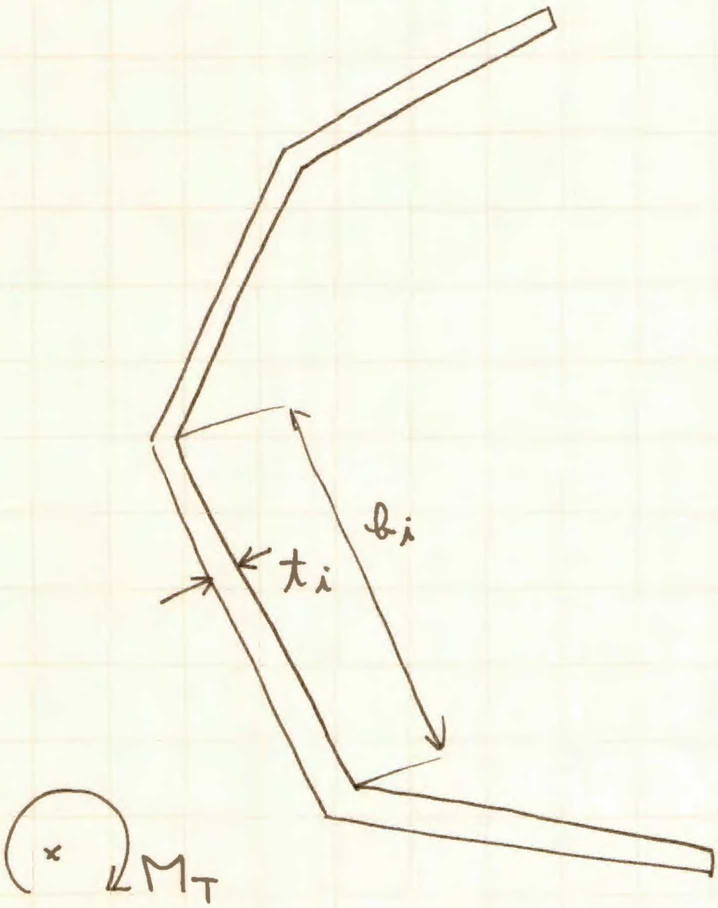
$$\varphi_T' = \frac{\varphi_T}{l} = \frac{3\,M_T}{G\,b\,t^3}$$

$$M_T = G \cdot \frac{b t^3}{3} \cdot \varphi_T'$$

$$k_T = \frac{b t^3}{3}$$ とおけば

$$M_T = G \cdot k_T \cdot \varphi_T'$$

[3] 薄板の集合体



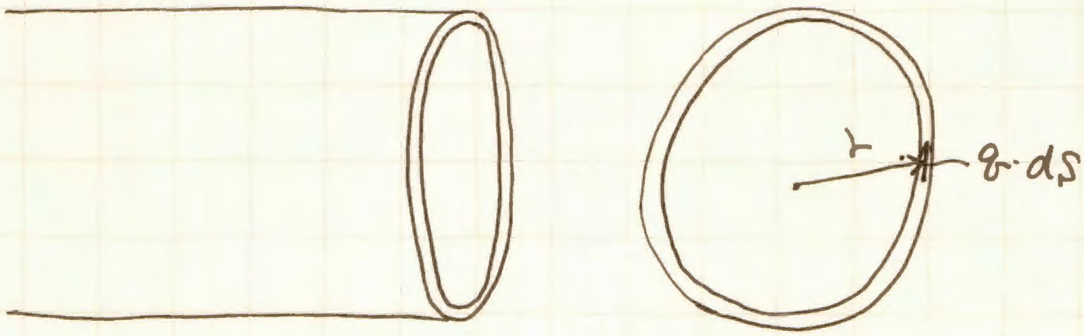
$$\boxed{\begin{aligned} M_T &= G \cdot K_T \cdot \varphi \\ K_T &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} b_i t_i^3 \end{aligned}}$$

$M_T = \sum M_{Ti}$

↑

それぞれの部材が分担する

[4] 薄肉円筒



$q = \tau \cdot t$

$$M_T = \int_s q \cdot r \cdot ds = 2\pi r^2 q$$

$$q = \frac{M_T}{2\pi r^2} = \frac{M_T}{2A} \qquad (A = \pi r^2)$$

$$\tau = \frac{q}{t}$$

変形

$$\frac{M_T \cdot \varphi}{2} = \frac{1}{2}\int_V \tau \gamma \, dV$$

$$= \frac{l}{2}\int \tau \cdot \gamma \, dx\,dy$$

$$dx \cdot dy = t \cdot r \cdot d\theta$$

$$\therefore \frac{\cancel{M_T \cdot \varphi}}{\cancel{2}} = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{G} \int \tau^2 t \, r \, d\theta$$

$$= \frac{l}{\cancel{2}G} \cdot \tau^2 t \, r \cdot \cancel{2}\pi$$

$$= \frac{\pi l \tau^2 t r}{G}$$

$$= \frac{\pi l \cancel{t} r}{G} \cdot \frac{1}{t^{\cancel{2}}} \cdot \frac{M_T^{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}} A^2}$$

$$M_T = G \cdot \frac{2A^2 t}{\pi r} \cdot \frac{\varphi}{l}$$

$$= G \cdot \frac{2A^2 t}{\pi r} \cdot \varphi'$$

$$= G \cdot (2 \cdot \pi^2 r^4 t / \pi r) \cdot \varphi'$$

$$= G \cdot 2\pi r^3 t \cdot \varphi'$$

$$\boxed{\begin{array}{l} M_T = G \cdot K_T \cdot \varphi' \\ \quad K_T = 2\pi r^3 t \\ \left(K_T = 4A^2 \Big/ \oint_s \frac{ds}{t} \;;\ \text{板厚変化} \right) \end{array}}$$

[5] サン・ブナンのねじり

サンブナンのねじりとは；

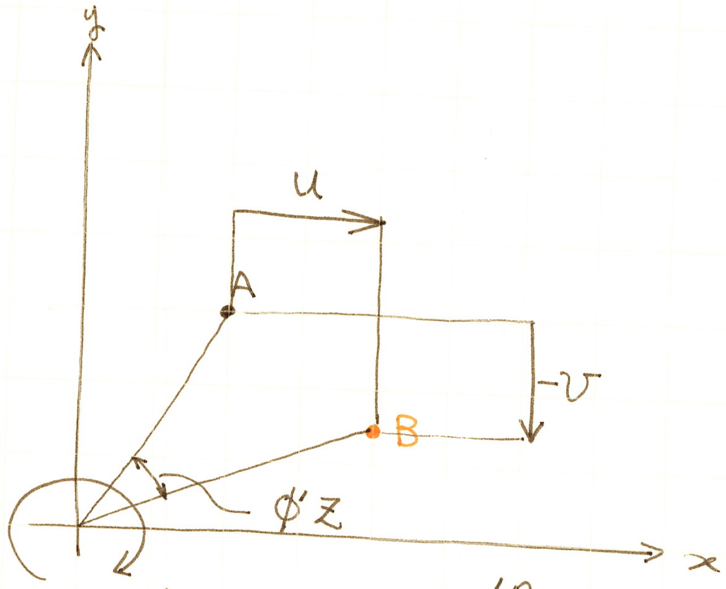
"ねじりモーメントが部材の長さ方向に一定で、部材の両端で断面のそりに対して何ら拘束をうけていないねじり"

である。

[仮定] ① 部材の変形は全長にわたって一様。
部材軸方向変位は軸にそって一様で x, y の関数である。

② 応力分布は軸に沿って一様。(x, y の関数)

③ 断面形は変化しない。
軸まわりに回転するだけである。
$(\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0)$



$\phi' = \frac{d\theta}{dz}$ ねじり率。

変位仮定。

$$u = \phi' z y$$
$$v = -\phi' z x$$
$$w = \phi' \psi(x, y) \qquad \psi(x,y)\text{；反り関数.} \qquad (1)$$

せん断ひずみ.

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$= -\phi' x + \phi' \frac{\partial \psi}{\partial y} = \phi'\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x\right)$$
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$= \phi'\left(y + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \qquad (2)$$

(2)式を応力で表わせば、

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yz} &= G\phi'\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x\right) \\ \tau_{zx} &= G\phi'\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y\right) \end{aligned}\right\} \quad (2)'$$

((1))つり合い方程式（物体力無視）

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

2の仮定

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} &+ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

応力関数 Φ 導入; $\Phi = \Phi(x, y)$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \tau_{zx} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

[(4)式は(3)を満たす。]

((2)) 適合条件.

(4)式を(2)'式に代入する;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = G\phi'\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = G\phi'\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = G\phi'\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - G\phi' - G\phi'\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - G\phi'$$

$$= -2G\phi' \tag{5}$$

((3)) 境界条件.

$$\tau_{zx}\frac{dy}{ds} - \tau_{yz}\frac{dx}{ds} = 0$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} = 0$$

$$\therefore \Phi = \text{constant} \tag{6}$$

(5), (6) から Φ を求める。→ τ_{yz}, τ_{zx} 求まる。

u, v, w も求まる ← ψ も求まる ←

$$dM_z^{st} = \{\tau_{zx}\cdot y - \tau_{yz}\cdot x\}dxdy$$

$$= \left\{G\phi'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+y\right)y - G\phi'\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-x\right)x\right\}dxdy$$

$$= G\phi'\left\{x^2+y^2+y\frac{\partial\psi}{\partial x}-x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\}dxdy$$

$$M_z^{st} = G\phi'\iint_{xy}\left(x^2+y^2+y\frac{\partial\psi}{\partial x}-x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdy.$$

$$\boxed{\begin{gathered}\therefore K_T = \int_x\int_y\left(x^2+y^2+y\frac{\partial\psi}{\partial x}-x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdy \\ M_z^{st} = G\cdot K_T\cdot\varphi'\end{gathered}}$$

サンブナンのねじり まとめ.

$$\tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \tau_{zx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

(これはつり合い条件をみたす)

適合条件

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\phi'$$

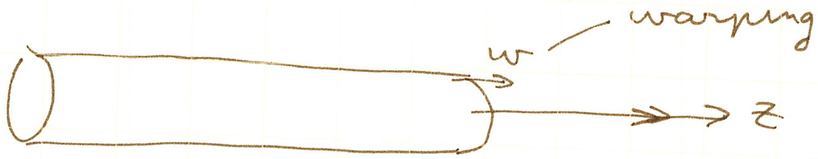
$\boxed{\Phi \text{ をだめる}}$

$$M_t = 2\iint \Phi \, dx\, dy$$

11/15.

そり変形.　(warping)

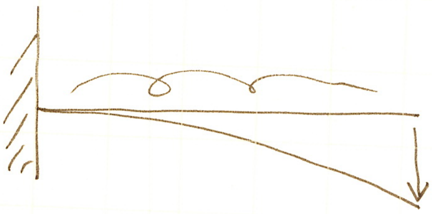
一般に、ねじりによって、部材軸方向の変位 w が生ずる。これをそりという。



丸棒.
円環
} 反りは生じない。

反りが生ずる場合 { 反り自由.
反り拘束.

} St. Venent のねじり, 単純ねじり

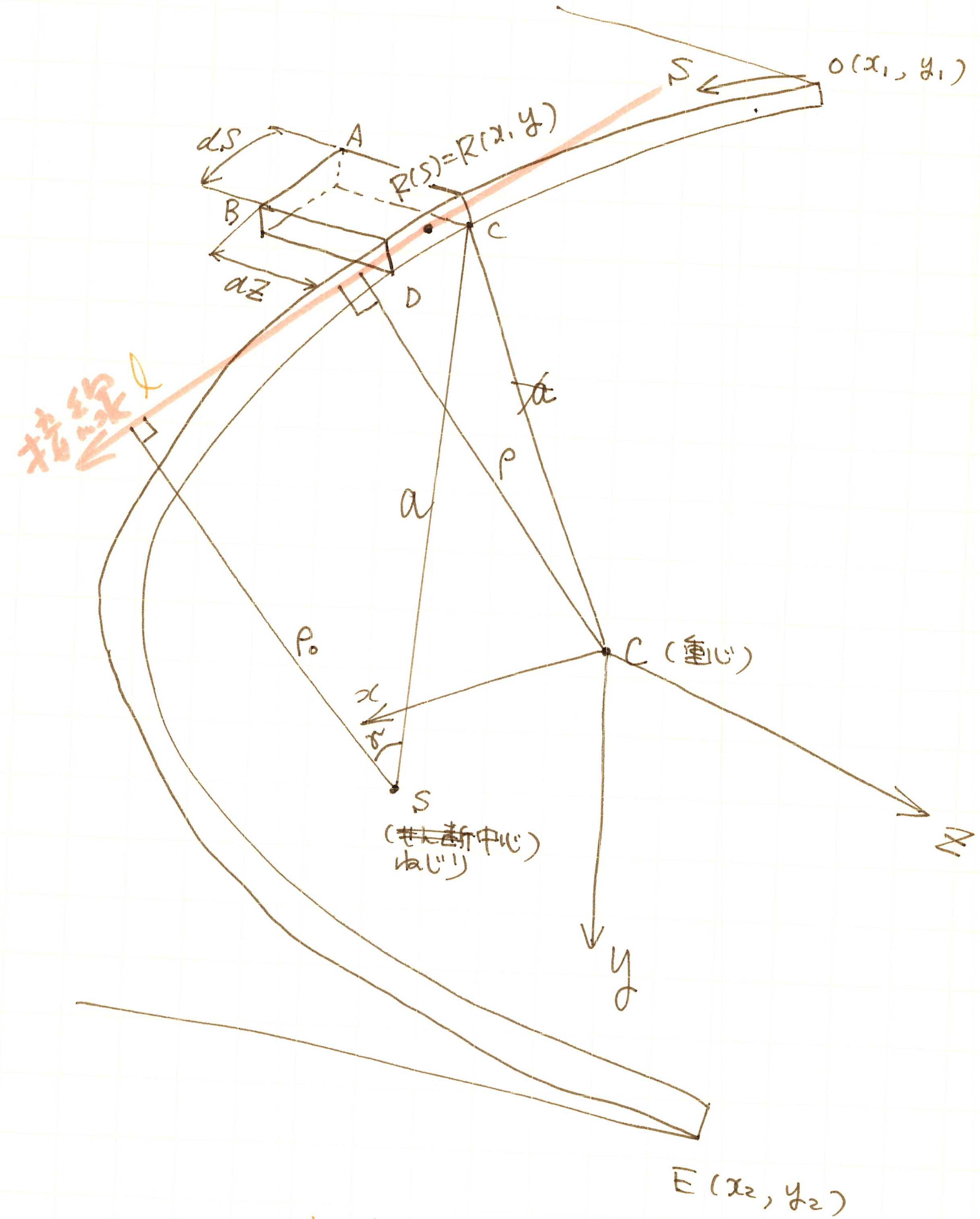


変形が求まる

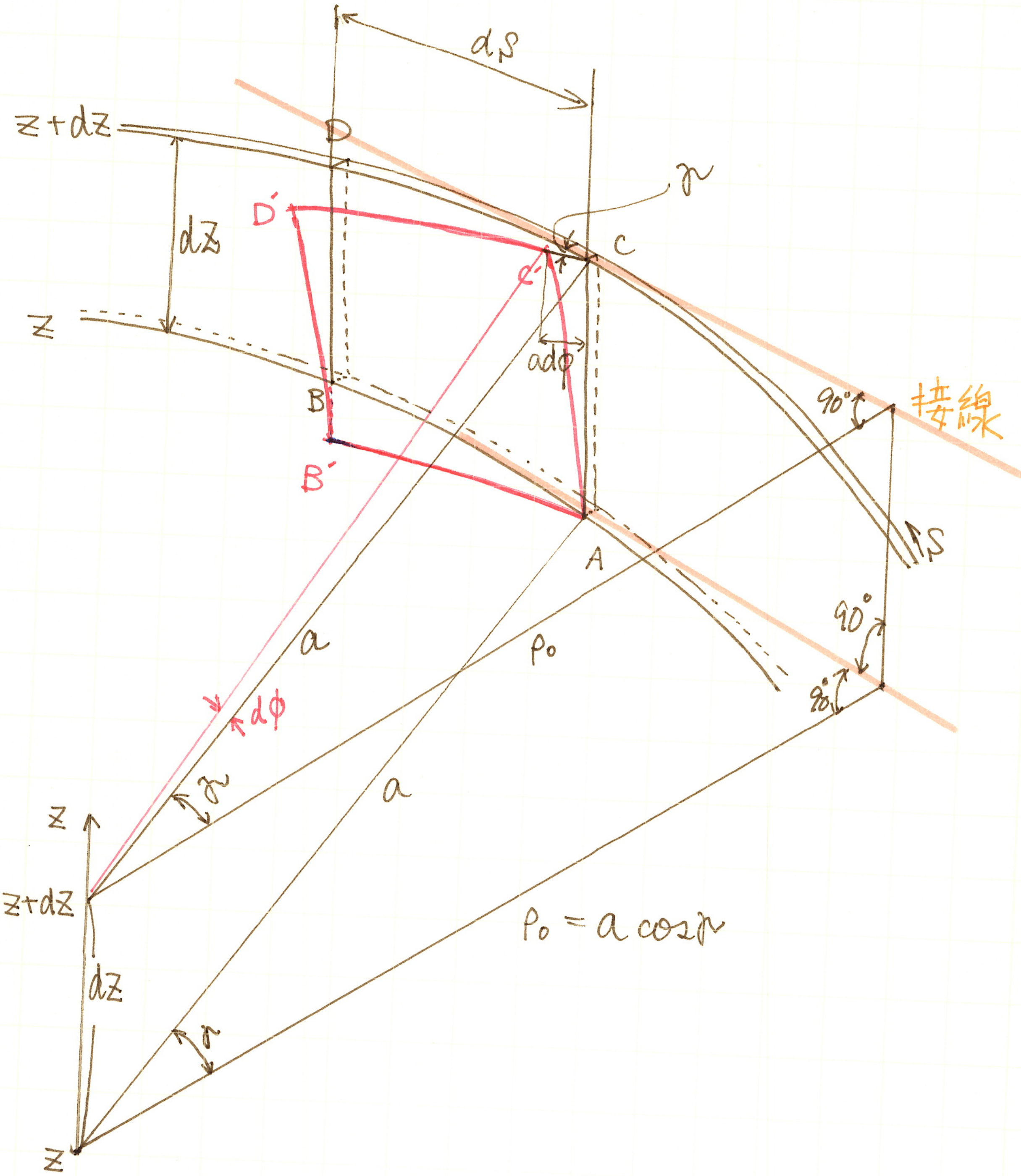
↓

変形を拘束した
場合の応答も求まる.

8.8 そり変形



ρ, ρ_0は接線lの進行方向左側にC, Sがあるときを正とする!


dS
Z+dZ
D
D'
dZ
C
C'
Z
adϕ
B
B'
A
接線
S
90°
a
ρ₀
dϕ
a
Z
Z+dZ
dZ
ρ₀ = a cosγ
Z

断面定数

$$\omega = \int_0^s \rho \, ds$$

$$I_{\omega y} = \int_0^E \omega y t \, ds$$

$$I_{\omega x} = \int_0^E \omega x t \, ds.$$

$$x_0 = \frac{I_{\omega y}}{I_x}$$

せん断中心

$$y_0 = -\frac{I_{\omega x}}{I_x}$$

$$\omega_0 = \omega + y_0 x - y_0 x_1 - x_0 y + x_0 y_1 \quad \left(= \int_0^s \rho_0 \, ds\right)$$

$$\omega_n = \frac{1}{A}\int_0^E \omega_0 t \, ds - \omega_0$$

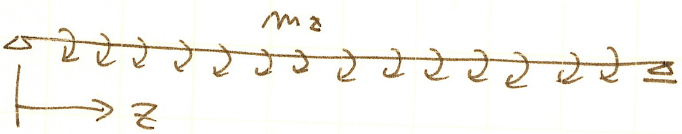
$$S_\omega = \int_0^s \omega_n t \, ds$$

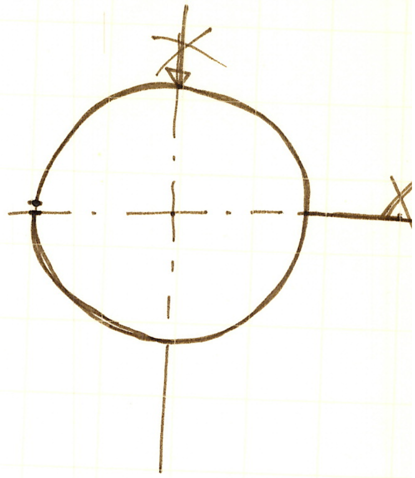
$$I_\omega = \int_0^E \omega_n^2 t \, ds$$

$$\int_0^s y t \, ds \quad , \quad \int_0^s x t \, ds.$$

$$K_T$$

① 等分布ねじりモーメント。





$\frac{L}{R} = 20$.

$\frac{R}{T} = 24$.

$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_b \text{ は関係ない。} \\ \sigma_w \text{ のみ} \end{array} \right.$

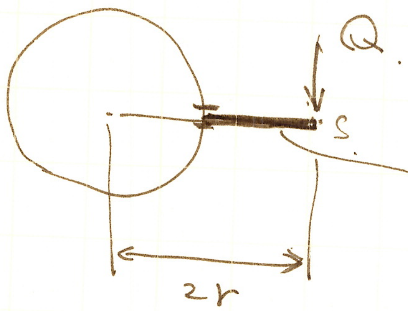
$\sigma_{ta} = \sigma_{ca} = 1400 \ kg/cm^2$

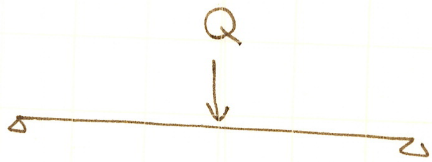
$E = 2.1 \times 10^6 \ kg/cm^2$

単位長さ当り、どの程度の m_z に耐え得るか。

(境界条件) $Z = 0, L$ 　 $\phi = \phi' = 0$, $v = v'' = 0$

②





無限の剛性
断面定数に
関係ない。

$\boxed{\text{1月まで}}$

11/29 鋼構造

4倍程度あれば，せん断の影響はほとんど問題とならない．

2.5節で図2.11の要素 $ds\,dz$ はその形を変えないと仮定した．したがって，この長方形をひずませる作用をするそりせん断応力の影響を無視したことになる．閉断面ではこの仮定を用いると大きな矛盾が生じるが(2.5)，開断面の場合には特に部材が短くなければ，この仮定によって大きな問題を生じることはない(2.19)．さらに，そりによるせん断応力は板厚方向に一様に分布すると仮定した．事実はこの仮定通りではないが，この影響も同じく小さいものである．Bleich[7] はこの影響を考慮して T 形断面，山形鋼断面の I_ω を与えている．これに対し，本書の理論では，これらの断面に対して $I_\omega=0$ となる．

変形前の部材についてつり合い式を立てるのは普通に行なわれているが，軸圧縮力を受けるはり-柱には適用できない．この仮定による理論では，同じく座屈荷重を求めることができない．このような理由から，2.8節では変形した部材についてつり合いを考えるが，この結果，簡単化に役立ってきた重ね合せの法則は適用できなくなる．

2.7 例　題

半円形はりの応力

最初の例題として，半円形薄肉断面をもつ片持はりの端部に，円弧の始点を通る鉛直力 Q が作用したとき〔図 2.18(a)〕の，片持はりの応力を計算しよう．どの断面にも曲げモーメント M_x，せん断力 V_y，ねじりモーメント $M_z=Qx_0$ が作用している．この問題では，つぎの量すなわち，$G/E=0.383$，$r/t=24$（ここに，r は中心線の作る円の半径，t は均一な厚さである），$L/r=20$ が無次元化された形で与えられているものとする．

最初に，必要な断面量を求める．図 2.18(b) を参考に，つぎの幾何学的な関係が求められる．

$$ds=r\,d\beta \qquad x_1=\frac{2r}{\pi} \qquad y_1=r$$

$$x=\frac{2r}{\pi}-r\sin\beta \qquad y=r\cos\beta$$

$$\rho=r-\frac{2r\sin\beta}{\pi}$$

断面量は，表2.2の公式によって計算することができるが，その結果をつぎに示す．

$$A=\int_0^E t\,ds=\pi rt$$

7 文献1.30の第 III 章には，そりねじりについてもさらに詳しい説明がなされている．

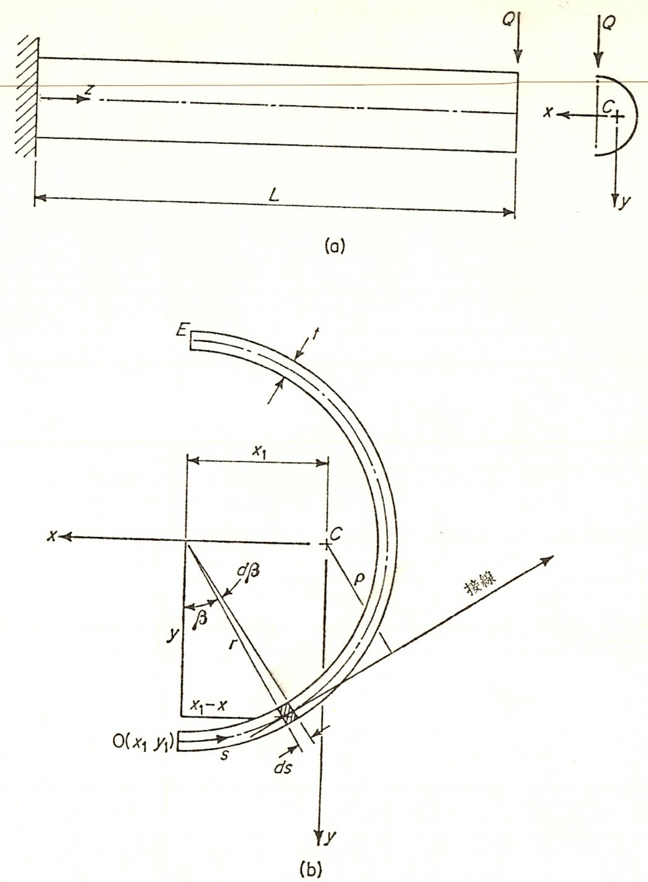


図 2.18 半円形断面の片持はり

$$I_x=\int_0^E y^2t\,ds=\frac{\pi}{2}(r^3t)$$

$$\omega=\int_0^s \rho\,ds=\int_0^\beta\left(r-\frac{2r\sin\beta}{\pi}\right)r\,d\beta=r^2\left[\beta-\frac{2}{\pi}(1-\cos\beta)\right]$$

$$I_{\omega y}=\int_0^E \omega yt\,ds=-r^4t$$

$$x_0=\frac{I_{\omega y}}{I_x}=-\frac{2r}{\pi} \qquad y_0=0$$

$$\omega_0=\omega+y_0x-y_0x_1+x_0y_1-x_0y=r^2\left[\beta-\frac{4}{\pi}(1-\cos\beta)\right]$$

$$\omega_n=\frac{1}{A}\int_0^E \omega_0 t\,ds-\omega_0=r^2\left(\frac{\pi}{2}-\beta-\frac{4\cos\beta}{\pi}\right)$$

$$S_\omega=\int_0^s \omega_n\,t ds=r^3 t\left[\frac{\beta}{2}(\pi-\beta)-\frac{4\sin\beta}{\pi}\right]$$

$$I_\omega=\int_0^E \omega^2{}_n t\,ds=tr^5\left(\frac{\pi^3}{12}-\frac{8}{\pi}\right)$$

$$\int_0^s yt\,ds=r^2 t\sin\beta$$

$$K_T=\frac{\pi r t^3}{3}$$

図 2.19 は応力を計算するときに後で必要となる量を無次元化して示し，角度 β を変数とする関数 ω_n/r^2，y/r，$10S_\omega/r^3t$，$\int_0^s yt\,ds/r^2t$ の値を描いたものである．この片持はりの

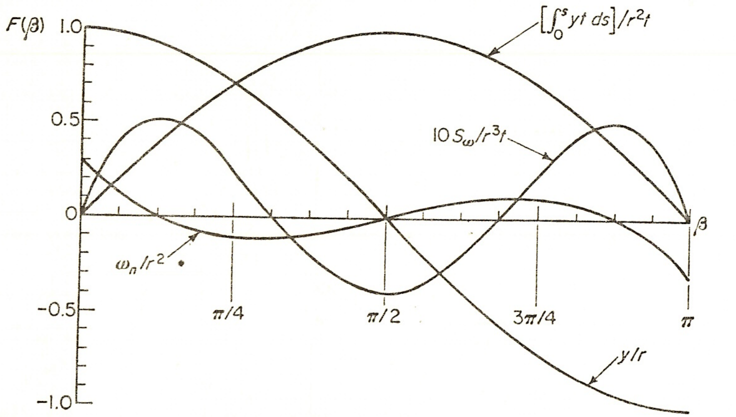


図 2.19 半円形断面内の断面量の変化

せん断力図，曲げモーメント図を，ねじり角の1次微分，2次微分，3次微分の変化とともに，図 2.20 に示す．後者の値はねじり荷重を受ける部材の変形に関する式〔式 (2.68)〕

$$\phi=C_1+C_2\cosh\lambda z+C_3\sinh\lambda z+\frac{M_z z}{\lambda^2 EI_\omega}$$

を使って求めたものである．$z=0$ での境界条件は $\phi=\phi'=0$（"固定端"，図 2.16 参照)，$z=L$ での境界条件は断面のそりは自由であり ($\sigma_W=0$)，したがって，式 (2.55) から $\phi''=0$ となる．この境界条件を使うと

$$\phi=\frac{M_z}{\lambda^3 EI_\omega}[\lambda z-\sinh\lambda z+\tanh\lambda L(\cosh\lambda z-1)]$$

となる．ϕ を微分したものは

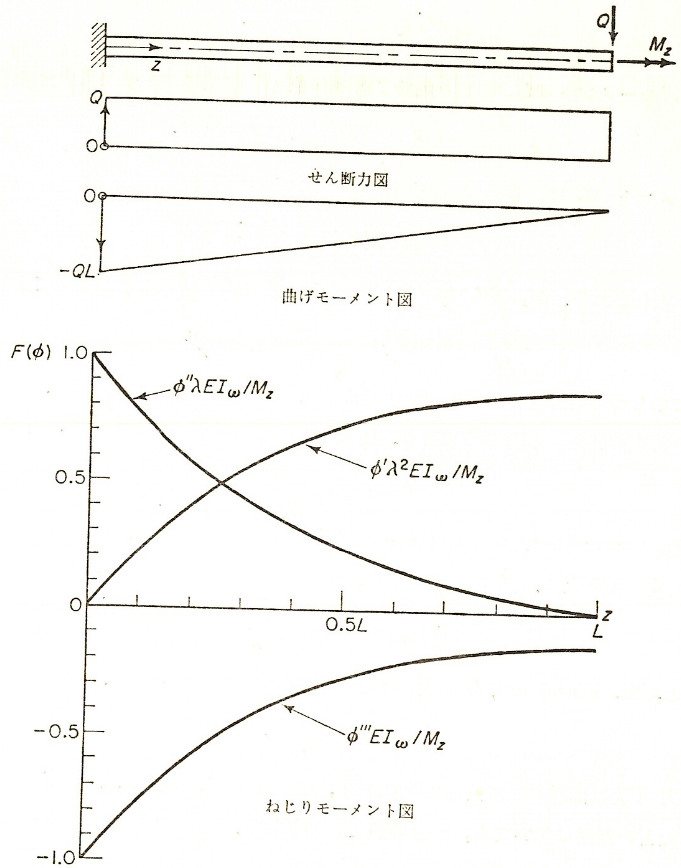


図 2.20 片持はりのせん断力図，曲げモーメント図，ねじり角 ϕ の微係数の分布図

$$\frac{\phi'\lambda^2 EI_\omega}{M_z}=1-\cosh\lambda z+\tanh\lambda L\sinh\lambda z$$

$$\frac{\phi''\lambda EI_\omega}{M_z}=-\sinh\lambda z+\tanh\lambda L\cosh\lambda z$$

$$\frac{\phi''' EI_\omega}{M_z}=-\cosh\lambda z+\tanh\lambda L\sinh\lambda z$$

これらの式を横軸に z をとった図 2.20 に曲線で示す．この問題では $\lambda L=L\sqrt{GK_T/EI_\omega}=2.730$ となる．

図2.19，図2.20の曲線から，応力を計算することができる．垂直応力は

$$\sigma_B=\frac{M_x y}{I_x} \qquad \sigma_W=E\omega_n\phi''$$

となり，曲げモーメント M_x，ねじり角の2次微係数 ϕ'' は共に固定端で最大となる．

$$(M_x)_{\max}=-QL \qquad (\phi'')_{\max}=\frac{0.992M_z}{\lambda EI_\omega}$$

ねじりモーメント M_z は，Q と Q の作用線と S との距離の積で

$$M_z=(x_1+|x_0|)Q=\frac{4Qr}{\pi}$$

のように，表わされる．M_x，ϕ''，I_x を応力を表わす式に代入することによって

$$\frac{\sigma_B r^2}{Q}=-306\frac{y}{r} \qquad \frac{\sigma_W r^2}{Q}=5,941\frac{\omega_n}{r^2}$$

となる．この2つの応力とその和の $z=0$ 断面内での分布とを図2.21に示す．応力の大部分がそり拘束の結果生じたものである．最大垂直応力は断面の外縁で生じ，その値は

$$\sigma_{\max}=1,465\frac{Q}{r^2}$$

となる．St. Venant のせん断応力は $\tau_{SV}=Gt\phi'$ であり，t が一定であるため，断面内のどの点でも同じ値となる．ϕ' の値は自由端，つまり $z=L$（図 2.20）で最大となる．

$$(\phi')_{\max}=0.870\frac{M_z}{\lambda^2 EI_\omega}$$

を用いると，St. Venant のせん断応力の最大値は，つぎのようになる．

$$(\tau_{SV})_{\max}=\frac{607\,Q}{r^2}$$

せん断力 V_y は部材の軸に沿って変化せず，したがって，曲げによるせん断応力は z 軸に沿ったどの断面においても，つぎの値で表わされる．

$$\tau_B=-\frac{V_y}{tI_x}\int_0^s yt\,ds$$

あるいは，$V_y=Q$，$I_x=\pi r^3 t/z$ を代入すると，つぎのように表わされる．

$$\frac{\tau_B r^2}{Q}=-\frac{15\int_0^s yt\,ds}{r^2 t}$$

図2.19から，$\int_0^s yt\,ds$ は，中央部で最大となることがわかる．したがって

$$(\tau_B)_{\max}=-\frac{15Q}{r^2}$$

となる．この値は $z=0$ での最大曲げ応力，$z=L$ での St. Venant のせん断応力値と比較して，無視できる程度のものである．

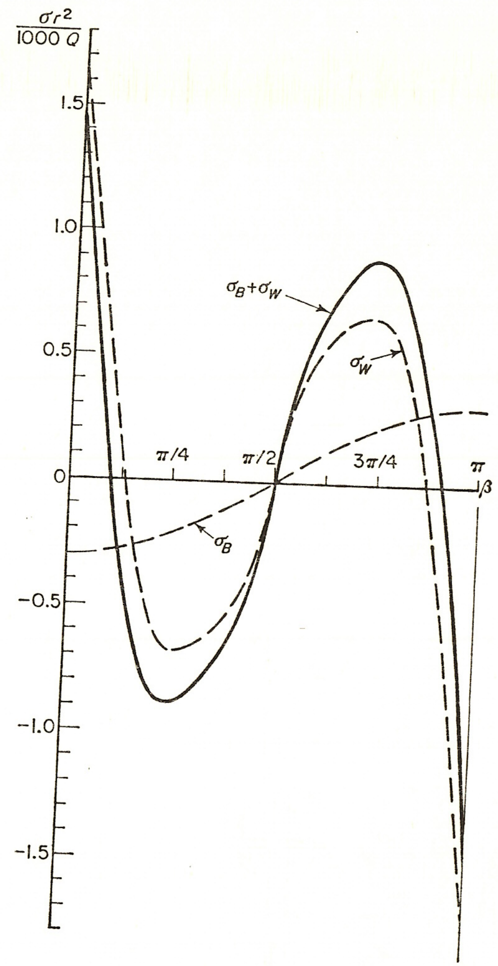


図 2.21　$z=0$ での垂直応力の分布

そりに伴うせん断応力は ϕ''' とともに変化し（図 2.20 参照），その最大値は $z=0$ で生じる．$(\phi''')_{\max}=-M_z/EI_\omega$ を用いると，

$$\frac{\tau_W r^2}{Q}=-\frac{ES_\omega\phi'''}{t}=818\frac{S_\omega}{r^3 t}$$

となる．他端（$z=L$）では，$\phi'''=-0.130\ M_z/EI_\omega$ であり，したがって

$$\frac{\tau_W r^2}{Q}=106\frac{S_\omega}{r^3 t}$$

を得る．S_ω の最大値は（図 2.19 から）$0.0524r^3t$ であり，したがって，つぎのようになる．

$$z=0 \text{ で } \quad (\tau_W)_{\max}=\frac{43Q}{r^2}, \quad \text{および}, \quad z=L \text{ で } \quad (\tau_W)_{\max}=\frac{6Q}{r^2}$$

これらの値も $z=0$ での曲げ応力，$z=L$ での St. Venant のせん断応力に比較すると小さなものである．図 2.20 を見ると，端部以外の断面を考慮する必要のないことがわかり，$z=0$ での $(\sigma)_{\max}$，あるいは $z=L$ での $(\tau_{SV})_{\max}$ が支配的な応力になっている．例えば，許容応力が $\sigma=2,100\,\mathrm{kg/cm^2}$，$\tau=1,400\,\mathrm{kg/cm^2}$ であり，$r=15.2\,\mathrm{cm}$ のとき，Qの最大許容値は 331 kg となる．この場合には $(\sigma)_{\max}$ によって許容値が決まる．許容応力が同じであっても，ねじりによる応力を無視した場合には $Q=1,600\,\mathrm{kg}$ となる．この場合には，ねじりによる応力を無視したことによって，予想より早く崩壊することになるであろう．

広幅 I 形はりの応力

つぎの例として，図 2.22 に示す両端単純支持のはりについて考えよう．中央点に作用している荷重Qは，せん断中心から e だけ偏心しており，ねじりモーメント $M_z=Qe$ を

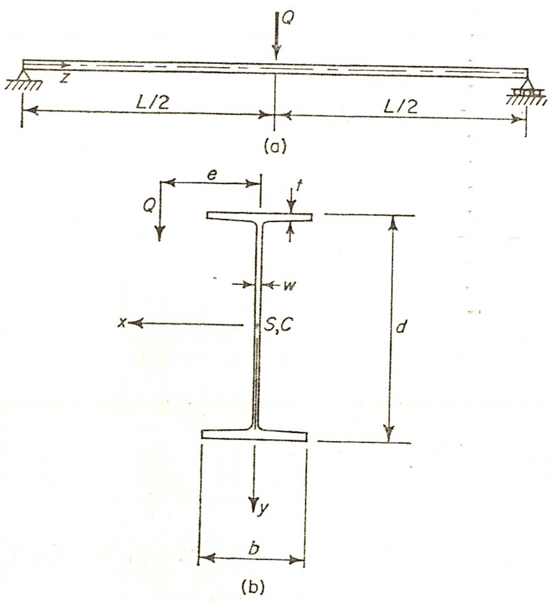


図 2.22 曲げとねじりが働くはり

生じているものとする．このねじりモーメントによって，曲げによる垂直応力 σ_B，せん断応力 τ_B の他に，付加的な応力 σ_W，τ_W が作用する．

まず，ねじりに対する断面量を計算しよう．

	$\rho=\rho_0$	b	ρb	$\omega=\omega_0$	ω_n
1			+	0	$d'b/4$
	$d'/2$	$b/2$	$d'b/4$		
2			+	$d'b/4$	0
	0	d'	0		
3			+	$d'b/4$	0
	$d'/2$	$b/2$	$d'b/4$		
4				$d'b/2$	$-d'b/4$
5				$d'b/2$	$-d'b/4$
	$-d'/2$	$b/2$	$-d'b/4$		
2			−	$d'b/4$	0
6				0	$d'b/4$
	$d'/2$	$b/2$	$d'b/4$		
3			−	$d'b/4$	0

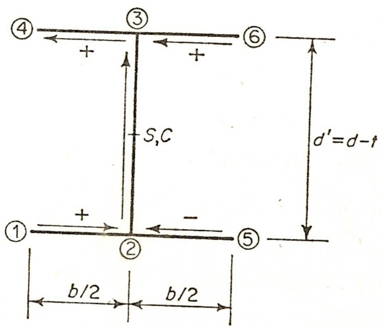


図 2.23 広幅 I 形断面の ω, ω_0, ω_n の計算

図 2.23 に単位そりに関する項 ω, ω_0 の計算を示す．この例のような 2 軸対称断面では，せん断中心Sと重心Cとは一致するので，2 つの量 ω, ω_0 は等しくなる．式 (2.11)，あるいは，表 2.3 からつぎの式の関係がわかる．

$$\omega=\int_0^s \rho\, ds=\sum_{i=0}^{i=n}\rho_{ij}b_{ij}$$

図 2.23 の矢印と正負の符号は積分の方向と ρ の符号を示す．ρ は考えている要素と C との垂直距離であり，矢印の方向を向いたとき，Cが左側にあれば ρ の符号は正である．積

のことは広幅I形鋼がねじりモーメントの影響を受けやすいことを示している．

$z=0$, $z=L/2$ の断面に分布している各種のせん断応力を図 2.29 に示す．ねじり応力は $e=2.54$ cm の偏心によって生じたものである．この図はフランジの中央部（上フランジ，下フランジでは，それぞれ，値が等しく，方向は反対となる），および，腹板中央部での応力の値とその方向とを示している．せん断応力の最大値はつぎのようになる．

$$z=0,\quad \tau_{\text{フランジ}}=(0.0046+0.0220+0.0004)Q=0.0270\,Q$$
$$z=0,\quad \tau_{\text{腹板}}=(0.0191+0.0127)Q=0.0318\,Q$$
$$z=\frac{L}{2},\quad \tau_{\text{フランジ}}=(0.0046+0.0019)Q=0.0065\,Q$$
$$z=\frac{L}{2},\quad \tau_{\text{腹板}}=0.0191\,Q$$

せん断応力の最大値をとってみても，垂直応力の最大値 $0.190Q$ に比較するとはるかに小さく，この例題では後者によって設計が決まる．

ここで取り扱ったよりもさらに詳しく解析する場合には，はりの全長にわたって垂直応力を求めなければならない．しかし，多くの場合，この例のように大きな応力が生じる場所を適当な方法で捜すのみで十分である．

2.8 2次解析の微分方程式

概　　説

つぎに取り扱う微分方程式[8]は変形後の部材についてのつり合いを考え導いたものである．変形と内力とは互いに独立ではなくなるので，それぞれの影響を分けて考えることはできず，すべての影響を同時に考慮しなければならない．考えうる荷重すべてを考慮すると，式が長く複雑になりすぎるので，ここでは，図 2.30 に示す比較的簡単な載荷状態に限定する．このモデルのみで，本書で後程取り上げる問題の載荷条件のほとんどの場合が含まれる．

図 2.30 の部材には初期曲がりがなく，断面は一定とする．両端はピン支持され，移動は拘束されているものとする．載荷過程を通じて方向一定の軸方向力 P[9]，および，曲げモーメント M_{Tx}, M_{Ty}, M_{Bx}, M_{By} が作用している．これらのモーメントの正の方向を右

8 ここでは微分方程式を Timoshenko，あるいは，Vlasov（文献 1.18 の第5章）の方法により力のつり合いから導く．同じ式は Bleich（文献 1.30 の第IV章）と同様にエネルギーの原理からも導くことができる．

9 前節までの説明では軸引張り力を正とした〔図 2.1, 2.7〕．この節以後取り扱う問題では，軸圧縮力の方が軸引張り力より問題になるので，これ以後，P が圧縮力のとき正と定義する．

手系で定義する．曲げモーメントに対をなした反力 R_x, R_y がつり合っている．

すでに説明した仮定，特に，弾性挙動と微小変形の仮定を用い，ここでは変形を考慮に入れたつり合い式を作る．断面は変化しないとする条件も引き続いて用いる．

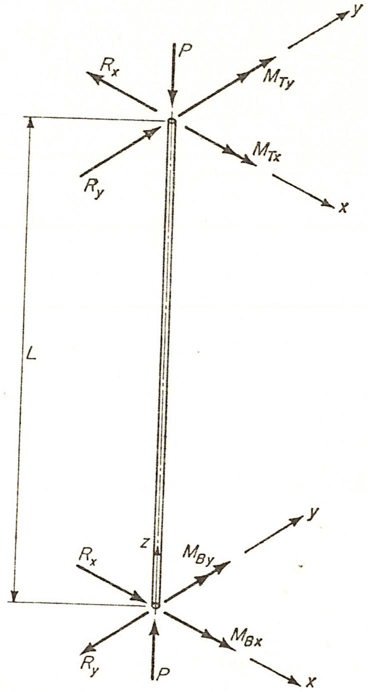


図 2.30 等断面部材の材端に作用する力

断面の変位

図 2.31 (a) に一般的な薄肉開断面の中心線を示す．x, y 座標は重心軸を通る主軸である．Qは中心線上の任意の点である．せん断中心Sの変位を u, v とし，図に正の方向を示す．この他に，断面全体がせん断中心のまわりに角ϕだけ回転する．Sが変位 u, v に伴って S' に移るのに対し〔図 2.31 (b)〕，Q は Q' をへて Q'' に移る．図 2.31 (b) に示す幾何学的な関係から，Qの x, y 方向の移動量はつぎのように表わされる．

$$u_Q=u+a\phi\sin\alpha \qquad v_Q=v-a\phi\cos\alpha$$

ここに，aはQとSの間の距離である．$\sin\alpha=(y_0-y)/a$, $\cos\alpha=(x_0-x)/a$ の関係があ

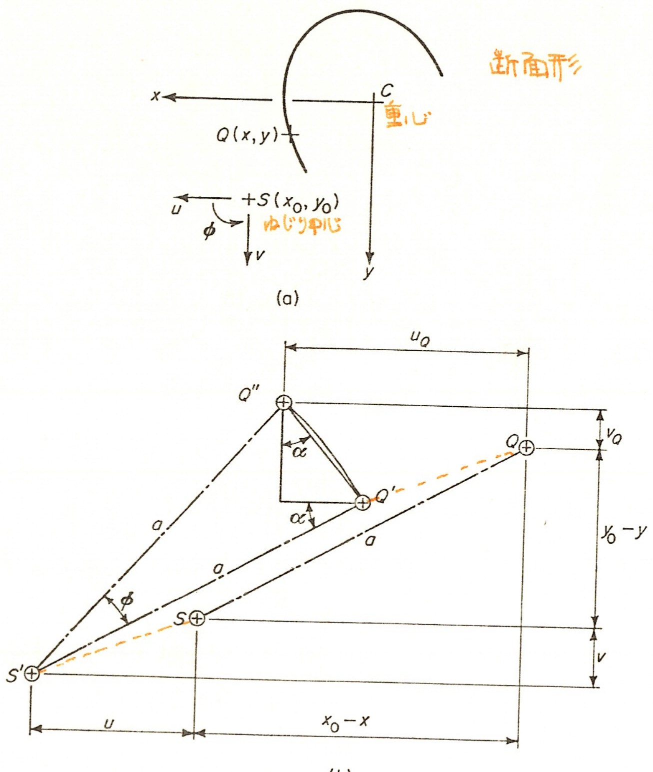


図 2.31　断面内の点Qの変位

るので，これを用いると

$$u_Q=u+\phi(y_0-y) \qquad v_Q=v-\phi(x_0-x) \tag{2.77}$$

となり，重心（$x=y=0$）の変位はつぎのように表わされる．

$$u_C=u+\phi y_0 \qquad v_C=v-\phi x_0 \tag{2.78}$$

つり合い方程式

z-x 面，z-y 面に作用している力を，それぞれ，図 2.32 (a)，(b) に示す．部材の下端から距離 z の点での抵抗モーメントはつぎのようである．

$$M_x=-M_{Bx}+R_yz+Pv_C, \qquad M_y=-M_{By}+R_xz-Pu_C$$

このモーメントの正の方向も右手系の約束に従う．式 (2.78) の v_C, u_C を代入し，つぎ

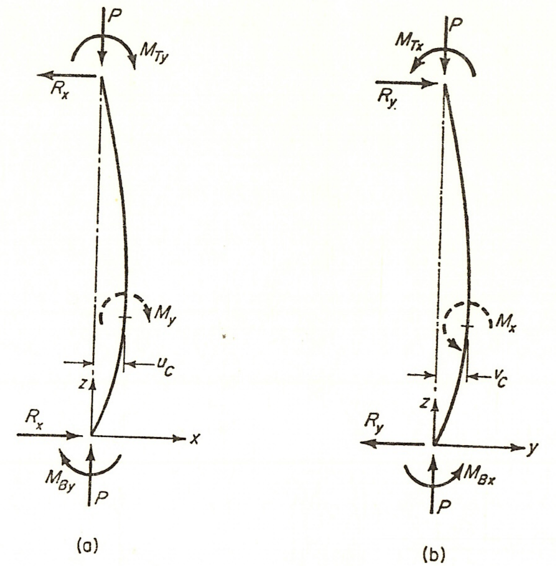


図 2.32　x-z 面，y-z 面に作用する力

の関係

$$R_x=\frac{M_{Ty}+M_{By}}{L} \qquad R_y=\frac{M_{Tx}+M_{Bx}}{L} \tag{2.79}$$

に注意すると，つぎの式が得られる．

変形前の座標系に対するモーメントのつり合い

$$\boxed{M_x=-M_{Bx}+\frac{z}{L}(M_{Tx}+M_{Bx})+P(v-\phi x_0)} \tag{2.80}$$

$$\boxed{M_y=-M_{By}+\frac{z}{L}(M_{Ty}+M_{By})-P(u+\phi y_0)} \tag{2.81}$$

外力は変形前の座標系によっている．

変形した状態では，この部材の断面はもはや変形前の x, y, z 座標系にはない．断面は図 2.33 に示すように，平行移動および，回転移動をし，断面の主軸は新しい直角座標 ξ, η で表わされる．モーメント M_x, M_y をこの新しい座標系で表わす必要がある．図 2.34 を参照し，ベクトルの和を求めると，つぎのようになる．

図2-34　　$$M_\xi=M_x+\phi M_y \qquad M_\eta=M_y-\phi M_x \tag{2.82}$$ 成分の変換

ここに，角度 ϕ が小さいことから，$\sin\phi=\phi$, $\cos\phi=1$ の関係を用いたのである．

M_x, M_y は ξ, η 軸に沿った成分の他に，断面に垂直で z 軸に対して傾斜した s 軸に沿った成分も含んでいる（図 2.35）．この力の成分によるねじりモーメント〔図 2.35 (a), (b)〕は

M_x, M_y の s 方向のモーメント成分

$$\boxed{M_{\zeta 1}=M_x\frac{du}{dz}+M_y\frac{dv}{dz}} \tag{2.83}$$ 変形の影響①

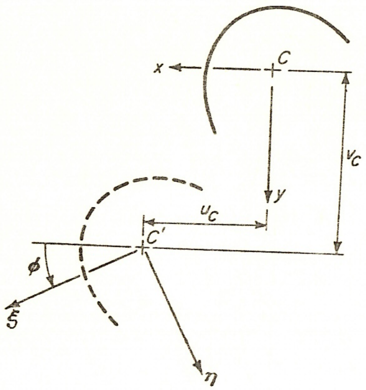


図 2.33　ξ–η 座標の定義

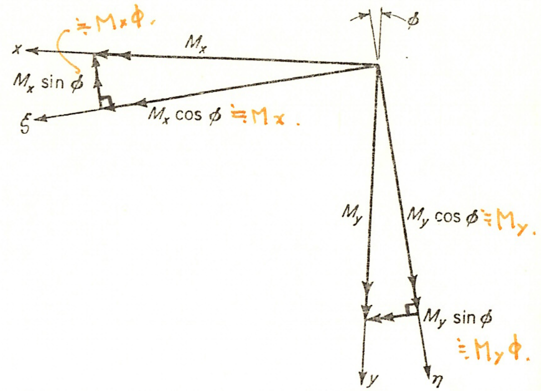


図 2.34　M_x, M_y の ξ–η 座標軸方向の成分

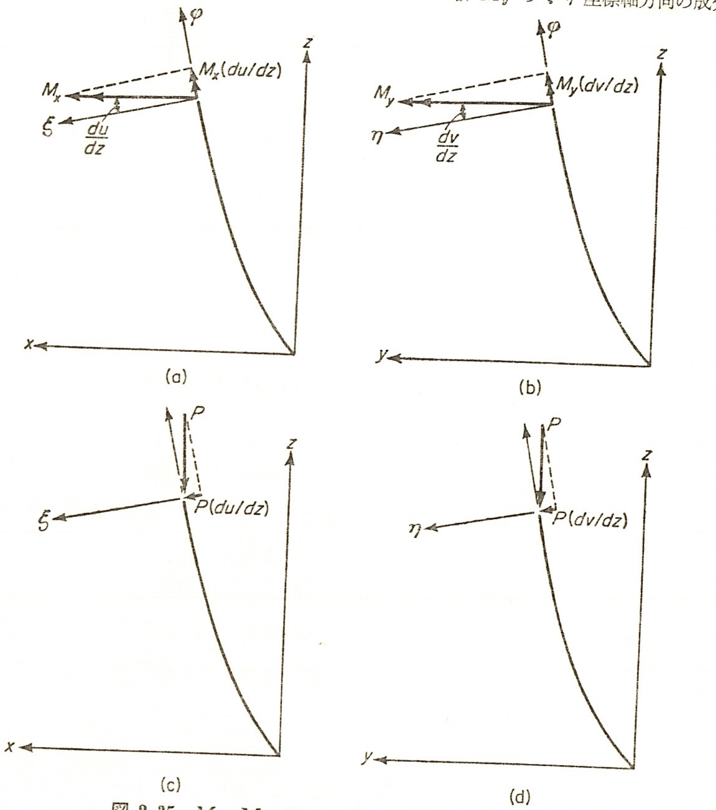


図 2.35　M_x, M_y, Pによって生じるねじり成分

となる．ここでも再び，$\sin du/dz = du/dz$, $\sin dv/dz = dv/dz$ の関係を用いている．

M_x, M_y の成分によるねじりの他にも，ねじりモーメントとして作用する力が存在する．その1つはPの作用方向が変化しないことに起因するものである．Pがz軸に平行に作用するため，z-x平面で断面に平行に $P(du/dz)$ の成分をもつ．この成分は重心に作用する〔図 2.35 (c)〕Pの z-y 面での成分と合せて〔図 2.35 (d)〕，つぎの式で表わされるねじりモーメントがせん断中心のまわりに作用している（図 2.36 参照）．

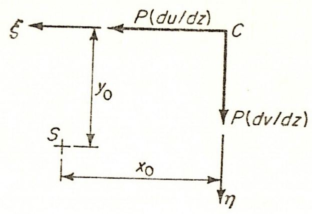


図 2.36　Pの成分によるねじり

Pのもつ ζ方向の モーメント成分.

$$\boxed{M_{\zeta 2} = P\left(y_0\frac{du}{dz} - x_0\frac{dv}{dz}\right)} \quad \text{変形の影響②} \quad (2.84)$$

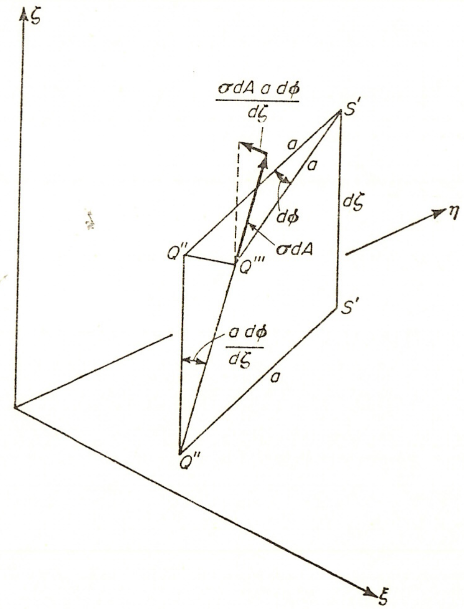


図 2.37　2つの隣接断面に生じるそりの差によるねじり

M_ζ として働く3番目のものは $d\zeta$ だけ離れた2つの断面相互の間のそり変化に差が生じ（図 2.37），この結果微小面積に作用する力 σdA（引張り力を正とする）がζ軸に角 $a(d\phi/d\zeta)$ 傾くことによって生じる．この力の成分は $\sigma dA(ad\phi/d\zeta)$ であり，この力によってせん断中心のまわりに生じるねじりモーメントは

$$dM_{\zeta 3}=-a(\sigma dA)\left(a\frac{d\phi}{d\zeta}\right)$$

となる．全断面について積分すると，つぎのようになる．

x方向の直応力のねじりへの影響

$$\boxed{M_{\zeta 3}=-\frac{d\phi}{d\zeta}\int_A \sigma a^2\, dA} \quad \text{変形の影響③} \tag{2.85}$$

ここで

$$\int_A \sigma a^2 dA=\overline{K} \tag{2.86}$$

とおき，高次の微小項を無視して $d\zeta \cong dz$ に注意すると，つぎの式が得られる．

$$M_{\zeta 3}=-\overline{K}\frac{d\phi}{dz} \tag{2.87}$$

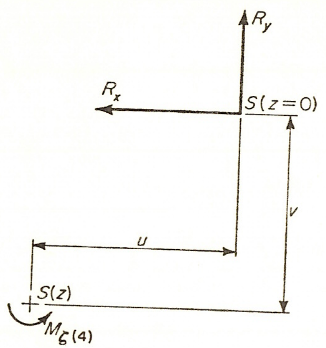


図 2.38　材端に働くせん断力によるねじり

最後の4番目のねじりモーメントとして，端部に作用するせん断力によるねじりモーメントがある（図2.38）．これは，$M_{\zeta 4}+R_y u+R_x v=0$ なる関係と式(2.79)から定められる R_x, R_y の値を用いると

$$\boxed{M_{\zeta 4}=-\frac{v}{L}(M_{Ty}+M_{By}) -\frac{u}{L}(M_{Tx}+M_{Bx})} \quad \text{変形の影響④} \tag{2.88}$$

となる．断面に作用するねじり力はこれら4つの成分〔式(2.83)，式(2.84)，式(2.87)，式(2.88)〕をたし合わせた和となり，その値はつぎのようである．

変形の影響による外力モーメント

$$\boxed{M_\zeta=M_x u'+M_y v'+P y_0 u'-P x_0 v'-\overline{K}\phi' -\frac{v}{L}(M_{Ty}+M_{By})-\frac{u}{L}(M_{Tx}+M_{Bx})} \tag{2.89}$$

以上の結果，z 軸に沿った任意の断面に作用するすべてのモーメント M_ξ, M_η, M_ζ が明らかになった．

これらの外力モーメントと部材の抵抗モーメントとを等しいとおこう．まず，式(2.27)から

$\frac{d^2v}{d\zeta^2}$ or $\frac{d^2v}{dz^2}$ のどちらでもよい。（変形は微小）

$$M_\xi=-EI_x v'' \qquad M_\eta=+EI_y u''$$

となる．さらに，式(2.65)から，ねじりモーメントについては

$$M_\zeta=GK_T\phi'-EI_\omega\phi'''$$

をうる．曲げ剛性（bending stiffness）を

$$B_x=EI_x \qquad B_y=EI_y \tag{2.90}$$

と定義し，St. Venant のねじり剛性（St. Venant torsional stiffness）を

$$C_T=GK_T \tag{2.91}$$

そり剛性（warping stiffness）を

$$C_W=EI_\omega \tag{2.92}$$

と定義するならば，これらの式を整理し，式(2.80)，式(2.81)で表わされる M_x, M_y を式(2.82)，式(2.89)に代入すると，最後につぎのように微分方程式が求められる．

$$B_x v''+Pv-\phi\left[M_{By}-\frac{z}{L}(M_{Ty}+M_{By})+Px_0\right] =M_{Bx}-\frac{z}{L}(M_{Tx}+M_{Bx}) \tag{2.93}$$

$$B_y u''+Pu-\phi\left[M_{Bx}-\frac{z}{L}(M_{Tx}+M_{Bx})-Py_0\right] =-M_{By}+\frac{z}{L}(M_{Ty}+M_{By}) \tag{2.94}$$

$$C_W\phi'''-(C_T+\overline{K})\phi'+u'\left[-M_{Bx}+\frac{z}{L}(M_{Bx}+M_{Tx})+Py_0\right] -v'\left[M_{By}-\frac{z}{L}(M_{Ty}+M_{By})+Px_0\right] -\frac{v}{L}(M_{Ty}+M_{By})-\frac{u}{L}(M_{Tx}+M_{Bx})=0 \tag{2.95}$$

これらの3つの微分方程式は，図2.30に示す部材の任意の断面でのつり合い条件を表わしている．微小変形の仮定に基づいて，u, v, ϕ^2 などを含むすべての高次の項を無視した結果，3つの変位量 u, v, ϕ，および，これらを微分したものに関して線形式になっている．この3つの式は互いに独立ではない．例えば，強軸まわりの曲げに関連した式(2.93)は2.4節では，ねじり式にのみ関連していたねじり角 ϕ をも含んでいる．この3つの式を用いて，はり，柱，はり-柱の挙動について，この章に続く3つの章で検討しよう．重ね合わせの法則を使うことによる簡単さを犠牲にした結果，これらの3つの式を使えば，前に扱った独立式によるよりも，部材の挙動をはるかに詳しく調べることができる．この式を用いて始めて弾性座屈問題を解くことができ，さらに，非弾性領域での座屈問題に対する理解を深めることもできる．

参　考　文　献

2. 1　S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2nd ed. (New York: McGraw-Hill Book Company, 1951), p. 1.

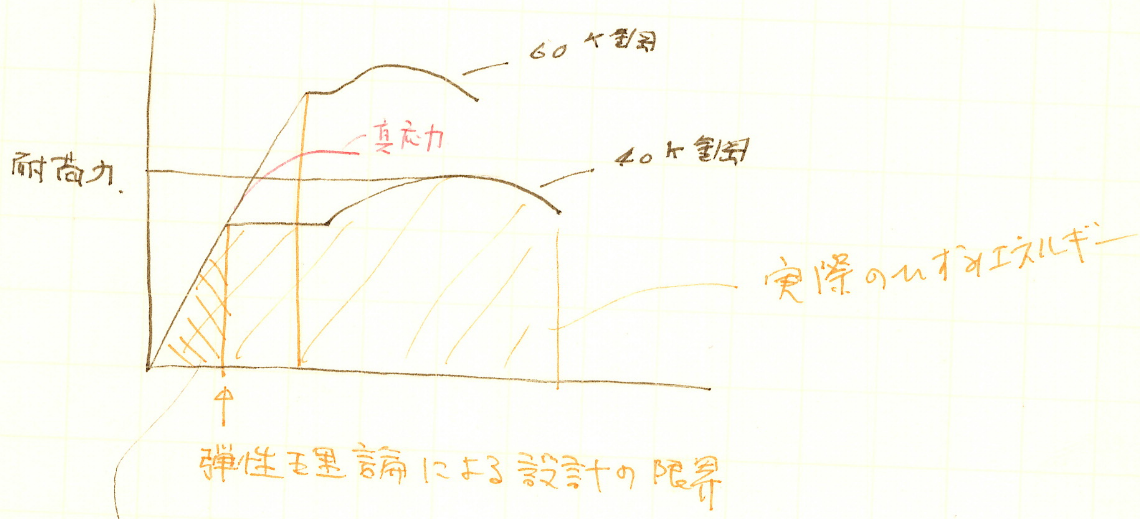
2. 2　F.B. Seely and J.O. Simth, *Advanced Mechanics of Materials* (New York:

1/17.

構成方程式　$\sigma = E \cdot \varepsilon$

実際のS-S図.

$\sigma \rightarrow = \frac{P}{A}$；全断面の平均的応力。(設計の立場)



① 実際はここまでしか使われない ⟶ もったいない

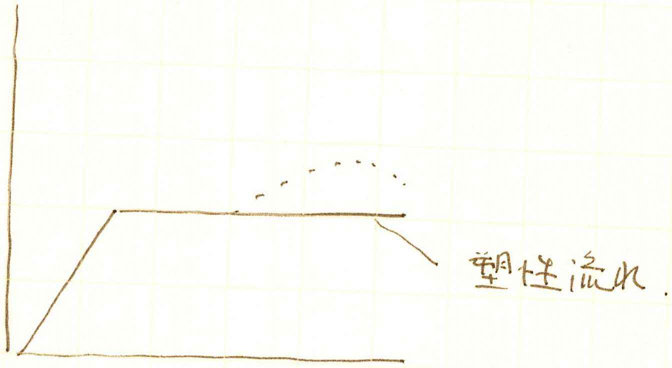
② 耐荷能力を調べたい。

↓

塑性設計法.

塑性座屈.

strain hardeness は小さいので無視.



弾塑性材料.

弾性無視.

剛塑性材料.

(塑性加工などにおいてのモデル)

複合応力下の降伏

↓

降伏条件 (Yield Condition)

$f(\sigma, \varepsilon) = 0$.

降伏までは $\sigma = E \cdot \varepsilon$

$\therefore f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = 0$ …任意の座標軸

応力、ひずみはテンソルを構成する。

↓

不偏量が存在する。

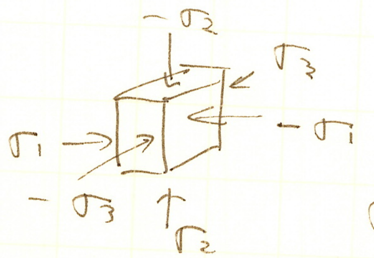
<座標軸に無関係に条件は存在する>

主応力軸に一致する座標軸で考える。

<$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$>

$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$.

たとえば



$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

で降伏したとすると、体積は0になる→ありえない。

↓

こういう状態では、降伏はおこり得ない

そこで

$$\sigma_1 = s_1 + s$$
$$\sigma_2 = s_2 + s$$
$$\sigma_3 = s_3 + s.$$

$$s = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

stress deviation（偏差応力）

$$s_1 = \sigma_1 - s$$
$$s_2 = \sigma_2 - s$$
$$s_3 = \sigma_3 - s$$

s が降伏に関係することはない。

↓

$$f(s_1, s_2, s_3) = 0$$

…… 1, 2, 3 の順序（座標の決め方）
に無関係である

↓

f は，1, 2, 3 について対称
である（数学的に）

変数が3つある対称な関数は，3つの対称な式の和で
表わされる。

×.

(参)

任意の座標軸に関する不偏量.

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\right) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_z \end{vmatrix}$$

τ_{ij} には stress deviation はない.

$$f(s_i) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3.$$

$$J_1 = s_1 + s_2 + s_3$$ ……降伏条件とはならない.

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3)$$

Mises の降伏条件.

$$J_2 - k^2 = 0$$

単純引張の場合. ※(参)

$$s = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{\sigma_x}{3}$$

$$\begin{cases} s_x = \sigma_x - s = \frac{2\sigma_x}{3} \\ s_y = \sigma_y - s = -\frac{\sigma_x}{3} \\ s_z = -\frac{\sigma_x}{3} \end{cases}$$

$$\tau_{ij} = 0.$$

$$\therefore J_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right)\sigma_x^2 = \cancel{\times}\,\frac{1}{3}\sigma_x^2$$

$$\therefore \ \frac{1}{3}\sigma_x^2 - k^2 = 0.$$

単純せん断の場合

$$\tau^2 - k^2 = 0.$$

$$k = \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{yield})}}{\tau_y}$$

$$\therefore \ \sigma_x^2 = 3\tau_y^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{3}\,k = \sqrt{3}\,\tau_y$$

$$\therefore \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{yield}}}{\sigma_y} = \sqrt{3}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{yield}}}{\tau_y}$$

$$\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)_{\text{yield}} = \sqrt{3}$$

//

……"道示"までで使われている.

Trescaの降伏条件.

$$\left\langle \begin{array}{c} \tau = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{1}{2}(s_2 - s_1) \\ \tau = \tau_y \quad \text{のときに降伏する} \end{array} \right\rangle$$

↑
yield

$$[(s_2-s_1)^2-4\tau_y^2][(s_1-s_3)^2-4\tau_y^2][(s_3-s_2)^2-4\tau_y^2]=0$$

… 1, 2, 3 軸に対称

↓

不偏量で表わす。

$\tau_y = k$ (単純せん断を考える)

$$4J_2^3-27J_3^2-36k^2J_2^2+96k^4J_2-64k^6=0$$

↓

$$\sigma_y = 2\tau_y$$

$$\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)_{yield}=2$$

J_2の物理的意味は何か?

Minagawa 1/24.

7　矩形断面をもった梁の曲げ[1)]

更に完全塑性材料の理論の基本概念を示すために，矩形断面を持った単純支持の角柱状の梁の曲げを考える。梁の座標軸と寸法を図 8 に示す。梁は z 軸の方向に働く一様分布荷重 p を受けるとする。

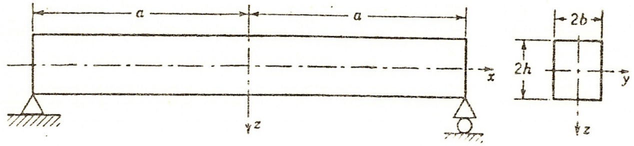


図 8　単純支持の梁

梁の理論によって

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0 \tag{7.1}$$

簡単のために

$$\sigma_x = \sigma, \quad \tau_{zx} = \tau \tag{7.2}$$

偏差応力の成分は　$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}\sigma$

$$s_x = \tfrac{2}{3}\sigma, \quad s_y = -\tfrac{1}{3}\sigma, \quad s_z = -\tfrac{1}{3}\sigma$$
$$\tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = \tau, \quad \tau_{xy} = 0 \tag{7.3}$$

Mises の降伏条件 4.5 は　$J_2 = \frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = k^2$

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = 3k^2 \tag{7.4}$$

となる。

梁の理論の普通の仮定を採用する。すなわち，剪断応力 τ は曲げ応力 σ に比べて小さく[2)]，梁の軸の撓み $w = w(x)$ は梁の断面の寸法に比べて小さく，断面は曲げの際に平面であって撓んだ梁の軸に垂直である。最初の仮定によって式 7.4 は

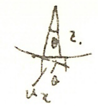
$$|\sigma| = k\sqrt{3} \tag{7.5}$$

になる。他の二つの仮定によって，梁の軸方向の歪は

1)　繰返し荷重を受ける梁の解析に対しては文献 6 参照。他の断面を持つ梁の曲げの議論には文献 7，第 11 章参照。
2)　塑性領域では τ が実際に消える（本章補遺）。

W. Prager　P.G. Hodge "塑性学" 丸善.

u_x は変位



$\varepsilon_x = \frac{du_x}{dx} = \frac{d}{dx} z \cdot \theta$

$= z\frac{d}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} = -z \cdot \frac{d^2w}{dx^2}$

$$\varepsilon_x = -z\frac{d^2w}{dx^2} \tag{7.6}$$

で与えられる。従って Hooke の法則により材料が弾性的であるすべての点で

$$\sigma = -Ez\frac{d^2w}{dx^2} \tag{7.7}$$

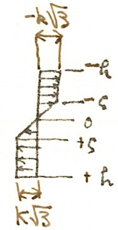
（E＝縦弾性係数）。この式は σ が z の奇函数であることを示している。従って任意の与えられた断面で，$z = \pm h$ で同時に降伏応力に達し，塑性領域は断面の上部と下部から対称的に拡がる。これらの塑性領域では

$$\sigma = \pm k\sqrt{3} \tag{7.8}$$

ここで，右辺の正号は 7.7 で与えられる σ が正である弾性領域に接している塑性領域に適用される。

$z = \pm\zeta(x)$，$(0 < \zeta \leq h)$ を弾塑性領域の境界面とする。σ は z の連続函数でなければならないので，7.7 と 7.8 から一部弾性で一部塑性の断面では

$$-h \leq z \leq -\zeta \text{ に対し } \sigma = -k\sqrt{3}$$
$$-\zeta \leq z \leq \zeta \text{ に対し } \sigma = \frac{kz\sqrt{3}}{\zeta} \tag{7.9}$$
$$\zeta \leq z \leq h \text{ に対し } \sigma = k\sqrt{3}$$



である。

任意の断面 x の応力 σ による曲げモーメントは次の式で与えられる。

$$M(x) = 4b\int_0^h \sigma(x, z)zdz \tag{7.10}$$

一般の場合 幅を b とすると　$M(x) = \int_{-h}^{h} \sigma(x,z) \cdot b \cdot z \cdot dz$

7.7，7.8 及び 7.9 を 7.10 に代入して積分すると

弾性断面では

$$M(x) = -\frac{4}{3}Ebh^3\frac{d^2w}{dx^2} \tag{7.11}$$

塑性断面では

$$M(x) = 2\sqrt{3}bkh^2 \tag{7.12}$$

弾塑性断面では

$$M(x) = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}kb(3h^2 - \zeta^2) \tag{7.13}$$

函数 ζ を決めるために，内部応力によるこの曲げモーメントは既知の外部荷重の生ずる曲

げモーメントに等しいとおきその式を ζ に対して解けばよい。問題の単純支持の梁に対しては一様分布荷重による曲げモーメントは

$$M(x)=\tfrac{1}{2}p(a^2-x^2) \tag{7.14}$$

で与えられる。荷重 p は梁の一部が塑性的になるように十分大きいと仮定する。一部分弾性的であり一部塑性的な断面に対しては，7.13 と 7.14 の右辺を等置して

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{3}kb(3h^2-\zeta^2)=\tfrac{1}{2}p(a^2-x^2) \tag{7.15}$$

を得る。

$$p_o=4\sqrt{3}kb \tag{7.16}$$

$$\rho=\frac{p}{p_o}\left(\frac{a}{h}\right)^2 \tag{7.17}$$

と置くと式 7.15 は

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\zeta}{h}\right)^2-\rho\left(\frac{x}{a}\right)^2=1-\rho \tag{7.18}$$

と書ける。弾塑性断面に対しては ζ は

$$0<\zeta<h \tag{7.19}$$

を満足しなければならないので ρ は

$$\tfrac{2}{3}<\rho<1 \tag{7.20}$$

を満足しなければならない。

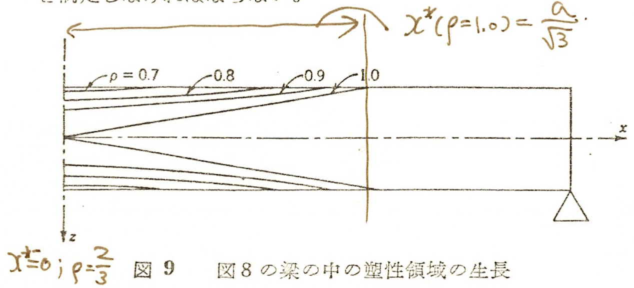


図 9　図8の梁の中の塑性領域の生長

ρ の下限は $x=0$ なる中央断面の外縁で降伏限界に達する荷重 p の値を示し，上限は梁の上下部の塑性領域が中央でつながる値を示す。図9は 7.20 を満足する ρ の種々なる値に対する函数 ζ を示している。荷重 p 従ってパラメーター ρ は 0 から単純に増すと仮定する。$\rho<\frac{2}{3}$ に対しては梁は，終始弾性的で応力と歪の分布は梁の普通の理論で定めることができる。7.20 を満足する ρ に対しては塑性的な梁の領域がある。ρ を $\frac{2}{3}$ から 1 に増すと塑性領域は梁の中で増加する。この間の任意の瞬間では

拘束された塑性変形が起っている。最後に $\rho=1$ に対して梁の上下部の塑性領域が中央で相合し無制限の塑性流れになる。梁はそれ以上の荷重を荷うことはできない。

次に梁の撓み w を決定しよう。w は x の偶函数であるから梁の $0\leqq x\leqq a$ の部分だけを考えれば十分である。7.7 と $z=\zeta$ の時に $\sigma=k\sqrt{3}$ という事実から断面が一部分塑性の処では，梁の中央部上で

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{k\sqrt{3}}{E\zeta} \tag{7.21}$$

一方梁の弾性的の端の部分では，7.11 及び 7.14 から

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{3}{8}\frac{p(a^2-x^2)}{Ebh^3} \tag{7.22}$$

7.18 を ζ に関して解きその結果を 7.21 に代入すると

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{k}{Eh}\frac{1}{\sqrt{1-\rho+\rho x^2/a^2}} \tag{7.23}$$

を得る。これを x に関して積分し，$x=0$ で $dw/dx=0$ ということを考慮して

$$\alpha=\frac{a\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}} \tag{7.24}$$

と置くと

$$\frac{dw}{dx}=\frac{-\alpha k}{Eh\sqrt{1-\rho}}\sinh^{-1}\frac{x}{\alpha} \tag{7.25}$$

で

$$w-w_o=\frac{-\alpha^2k}{Eh\sqrt{1-\rho}}\left(\frac{x}{\alpha}\sinh^{-1}\frac{x}{\alpha}-\sqrt{1+\frac{x^2}{\alpha^2}}+1\right) \tag{7.26}$$

但し w_0 は $x=0$ の未知の変位である。7.25 と 7.26 は 7.18 で計算した ζ が h の値となる断面まで成立する，すなわち

$$x=x^*=\alpha\sqrt{\frac{3\rho-2}{3(1-\rho)}}=a\sqrt{1-\frac{2}{3\rho}} \tag{7.27}$$

この断面で 7.25 と 7.26 から

$$\frac{dw}{dx}(x^*)=\frac{-\alpha k}{Eh\sqrt{1-\rho}}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{3\rho-2}{3(1-\rho)}} \tag{7.28}$$

及び

$$w(x^*) - w_0 = \frac{-\alpha^2 k}{Eh\sqrt{1-\rho}}\left[\sqrt{\frac{3\rho-2}{3(1-\rho)}}\right.$$

$$\left.\times\sinh^{-1}\sqrt{\frac{3\rho-2}{3(1-\rho)}} - \sqrt{\frac{1}{3(1-\rho)}} + 1\right]. \qquad (7.29)$$

さて式 7.22 を $x = x^*$ の初期条件 7.28, 7.29 で積分すると，梁の弾性領域 $x^* \leqq x \leqq a$ に対し

$$w = w_0 - \frac{3}{16}\frac{p}{Ebh^3}\left(\frac{\alpha^2\rho}{1-\rho}x^2 - \frac{x^4}{6}\right)$$

$$- \frac{\alpha x}{Eh\sqrt{1-\rho}}\left[k\sinh^{-1}\sqrt{\frac{3\rho-2}{3(1-\rho)}}\right.$$

$$\left.- \frac{1}{12}\frac{p\alpha^2}{bh^2}\frac{3\rho+1}{1-\rho}\sqrt{\frac{3\rho-2}{3}}\right]$$

$$+ \frac{\alpha^2 k}{Eh\sqrt{1-\rho}}\left[\frac{1}{\sqrt{3(1-\rho)}} - 1\right] - \frac{p\alpha^4}{96Ebh^3}\frac{9\rho^2-4}{(1-\rho)^2} \qquad (7.30)$$

積分常数 w_0 は 7.30 で与えられる w は $x = a$ で消えるという条件からみつかる。

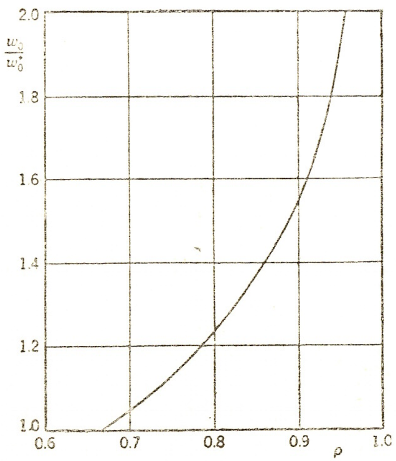


図 10　図 8 の弾塑性梁の中央の撓み

代数的計算を若干行って

$$w_0 = \frac{a^2 p_0}{Ehb}\left[\frac{1}{4\sqrt{3\rho}}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{3\rho-2}{3(1-\rho)}}\right.$$

$$+ \frac{\sqrt{1-\rho}}{4\sqrt{3}\,\rho} + \frac{2\rho^2-1}{8\rho}$$

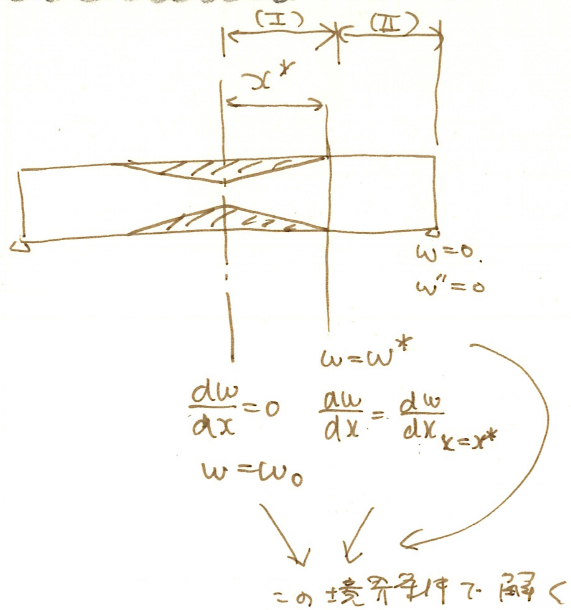
$$\left.- \frac{3\rho+1}{12\rho}\sqrt{\frac{\rho(3\rho-2)}{3}}\right] \qquad (7.31)$$

この中央の変位 w_0 を中央断面の外縁で始めて降伏応力に達する瞬間の変位

$$w_0^* = \frac{5}{48}\frac{p_0 a^2}{Ebh} \qquad (7.32)$$

に比較するのは興味がある。図 10 は w_0/w_0^* 対 ρ の関係を示している。荷重 p が中央断面全部に降伏を生ずる荷重の 95% 以下に留る

限りこの比が 2 以下であることは注目に値する。このことは拘束された塑性流れの全領域で永久歪が弾性歪と同程度の大きさであることを示している。



第2章 補　　遺

弾塑性梁の剪断応力

第7節で降伏条件において τ が省略できるという仮定をした。次に 7.1 の仮定の成立する梁の理論の枠内では，τ は梁の塑性領域では実際に 0 であることを示す。

例えば梁の下方の塑性領域で函数 $\sigma=\sigma(x, z)$, $\tau=\tau(x, z)$ を定めるためには，釣合方程式

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial z}=0 \tag{A.1}$$

と降伏条件

$$\sigma^2+3\tau^2=3k^2 \tag{A.2}$$

及び境界条件

$$\tau(x, h)=0. \tag{A.3}$$

を使う。A.2 及び A.3 から

$$\sigma(x, h)=k\sqrt{3} \tag{A.4}$$

式 A.1 から

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}(x, h)=0 \tag{A.5}$$

A.2 を z に関して微分すると

$$\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial z}+3\tau\frac{\partial\tau}{\partial z}=0 \tag{A.6}$$

この式と式 A.5 から

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z}(x, h)=0 \tag{A.7}$$

A.1 を z に関して微分し A.7 を使うと

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}(x, h)=0 \tag{A.8}$$

同様に A.6 を z に関して微分し，A.5, A.7 及び A.8 を使うと

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}(x, h)=0 \tag{A.9}$$

こういうふうに続けると σ 及び τ の高次の微分も亦 $z=h$ に沿って消える。このことは A.3, A.4 で指定されたように $z=h$ に沿ってだけでなく，梁の下方の塑性領域で

$$\sigma=k\sqrt{3}, \quad \tau=0 \tag{A.10}$$

であることを示している。

荷重の大きさ p を増すと，弾塑性断面の弾性領域の高さ 2ζ は減少し，同時にこの断面の剪断力は増加する。断面の塑性部分は剪断応力を持たないから弾性部分の剪断応力が大きくなることが期待される。任意の弾塑性断面の弾性部分の剪断応力の分布を決定するために式 7.9 の第2式と式 7.18 を x に関して微分する。得られた第2式の $\frac{d\zeta}{dx}$ を第1式に代入すると，

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=-\frac{3\sqrt{3}k}{\zeta^3}\rho\frac{h^2}{a^2}xz \tag{A.11}$$

もし，$\frac{\partial\sigma}{\partial x}$ に対するこの式を釣合方程式（式 A.1）に代入し，積分して $z=\pm\zeta$ で $\tau=0$ であることに注意し，ρ を p 及び 7.17 及び 7.16 により梁の各寸法で表わすと，

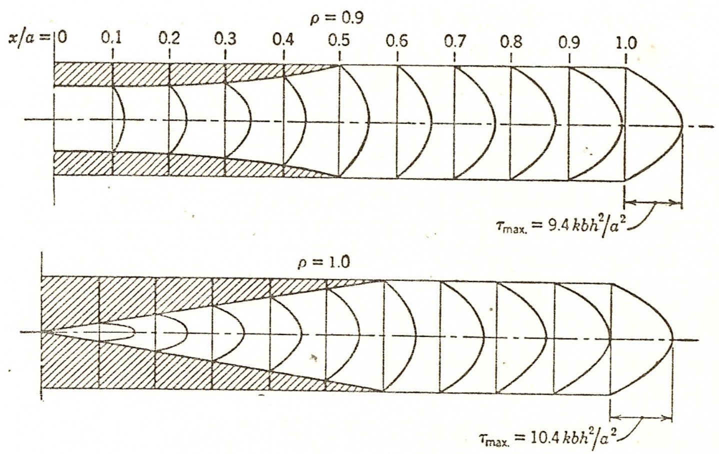


図 11　図 8 の梁の剪断応力

$$\tau(x, z) = -\frac{3}{8}\frac{px}{b\zeta}\left(1 - \frac{z^2}{\zeta^2}\right) \tag{A. 12}$$

この公式は弾塑性断面の剪断応力を与える。弾性断面では剪断応力は普通の方法で定まる(例えば文献 8, p. 122 以下参照)。ここで考えた梁に対して弾性断面では

$$\tau(x, z) = -\frac{3}{8}\frac{px}{bh}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \tag{A. 13}$$

梁の種々の断面の τ のグラフを図 11 に $\rho = 0.9$ 及び $\rho = 1.0$ に対し示してある。剪断応力の最大値は尚梁の弾性断面で起る。興味あることは，$\rho = 1$ なる極限の場合に最大剪断応力は各弾塑性断面に対して同じである。

問　題

1. 等長の円柱と共軸円筒からできている系を考えて，これが平行な剛体の板の間にはさまっていて大きさが等しく方向反対の軸方向に働く荷重 P を荷っているとする。円柱と円筒の内壁の間には十分間隙があって，円筒により円柱には横方向の力が及ばないとする。この系の挙動を第 6 節の幾何学的の言葉で論じ，これが第 6 節の種々の原理を満足することを示せ。

2. 問題 1 の系に更にもう一つの共軸円筒を加えてこの系の挙動を論ぜよ。この場合力点と歪点は三つの直角座標を持ち，釣合方程式は平面を表わし，二つの適合方程式は直線を表わす。

3. *図 6 に示すトラスが垂直荷重 P だけでなくて（トラスの平面内で）水平荷重 Q を受ける。この場合には，もはや $F_1 = F_3$ と仮定することはできない。釣合方程式は 3 次元空間の直線を定め，適合条件は平面を定める。次の場合の系の挙動を論ぜよ。

（a） 荷重 P 及び Q が $P = kQ$ で結び付けられている。

（b） P を一定にし Q を変化させる。

（c） P と Q を任意に変化させる。

［これらの観念をもっと一般のトラスに拡張できて，k 次の釣合部分空間と $(n-k)$ 次の適合部分空間を持つ n 次空間を与える］。

4. 次の型式の荷重を受ける図 8 の梁の弾塑性的挙動を論ぜよ。

（a） $x = b$, $x = -b$ で集中荷重 P。

b） $x = b$ で単一集中荷重 P。

（c） $x = b$ から $x = c$ まで拡っている一様分布荷重 P。

5. 次の型式の荷重を受ける片持梁の弾塑性的挙動を論ぜよ。

（a） 梁の全長に渉って一様分布荷重 P。

（b） $x = b$ で集中荷重 P。

6. $x = b$, $x = -b$ で単純支持の長さ $2a$ の梁がある $(o < b < a)$。次の荷重を加えた時の弾塑性的挙動を論ぜよ。

（a） 中央 $x = 0$ に集中荷重 P。

（b） $x = -a$ から $x = -b$ までと $x = b$ から $x = a$ まで一様分布荷重 P。

（c） $x = c$, $b < c < a$ に集中荷重 P。

パラメーターの比によって塑性領域は支持点又は荷重を加えた点から始まることに注意せよ。

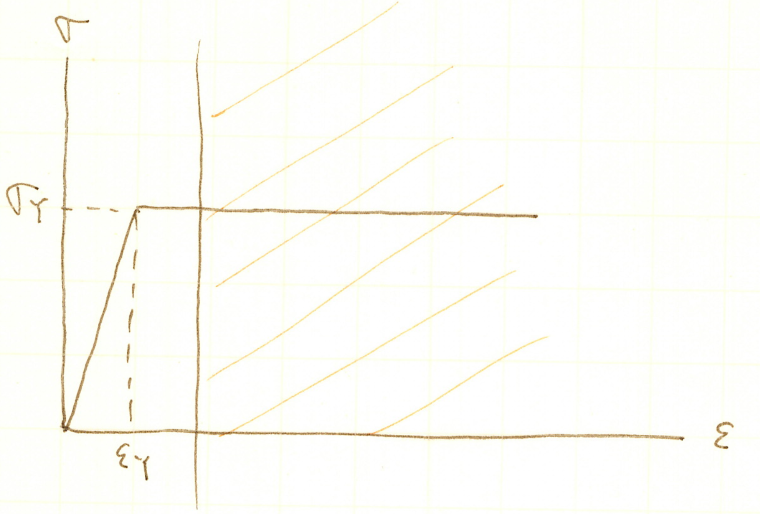
7. 問題 5 a の剪断応力の分布を求めよ。荷重 p が限界値に近づくと剪断応力は弾塑性断面の弾性部分だけで大きくなる。塑性領域が梁の中央で出来始める p の値を求めよ。

8. 問題 4, 5 b, 6 で考えた梁の剪断応力の分布を求めよ。荷重が限界荷重に近い時の剪断応力の影響を論ぜよ。

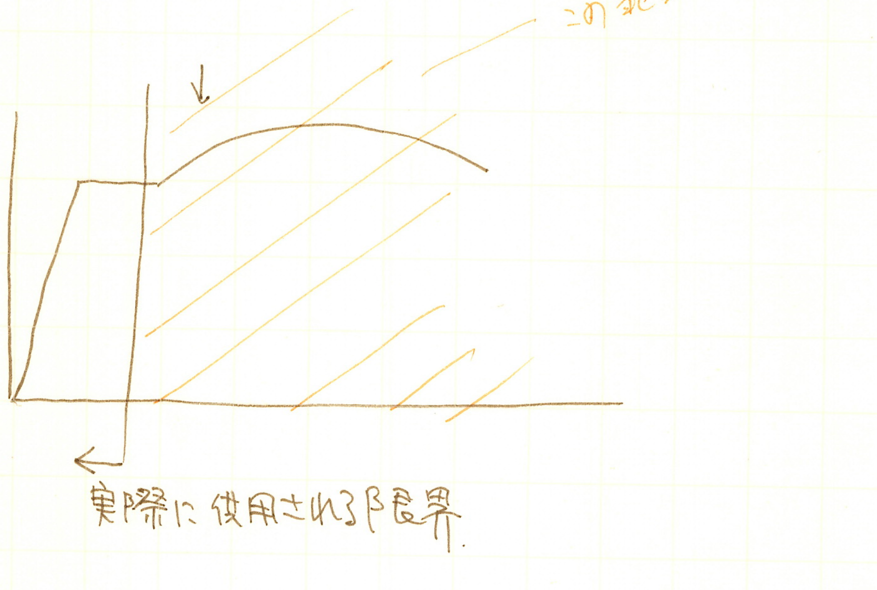
文　献

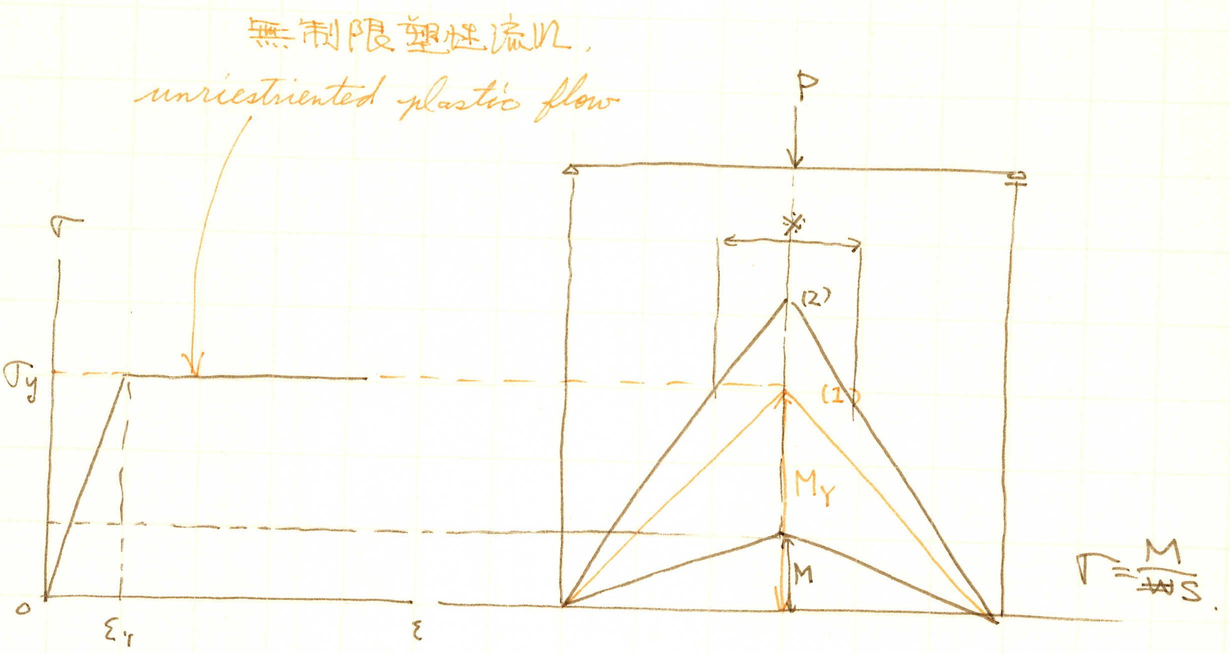
1. G. Colonnetti, De l'équilibre des systèmes élastiques dans lesquelles se produisent des déformations plastiques, *J. Math. Pur. Appl.* (9) **17**, 233—255 (1938); see also *idem*, Elastic equilibrium in the presence of permanent set, *Q. Appl. Math.* **7**, 353—362 (1950).
2. S. M. Feinberg, The principle of limiting stress (Russian), *Prikladnaia Matematika i Mekhanika* **12**, 63—68 (1948).
3. A. Haar and Th. v. Kármán, Zur Theorie der Spannungszustaende in plastischen und sandartigen Medien, *Goettinger Nachr., math.*-phys. *Kl.* **1909**, 204—218 (1909).
4. W. Prager and P. S. Symonds, Stress analysis in elastic-plastic structures, *Proc. 3rd Symposium on Appl. Math.* (Ann Arbor, Mich., June 14—16, 1949), McGraw-Hill Book Co., New York, 1950, pp. 187—197.
5. H. J. Greenberg, Complementary minimum principles for an elastic-plastic material, *Q. Appl. Math.* **7**, 85—95 (1949).
6. B. G. Neal, The behavior of framed structures under repeated loading, to appear in *Q. J. Mech. Appl. Math.*
7. V. V. Sokolovsky, *Theory of plasticity* (Russian with English chapter summaries), Moscow, 1946.
8. F. B. Seely, *Resistance of materials*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1947.

1/24.



モデル化

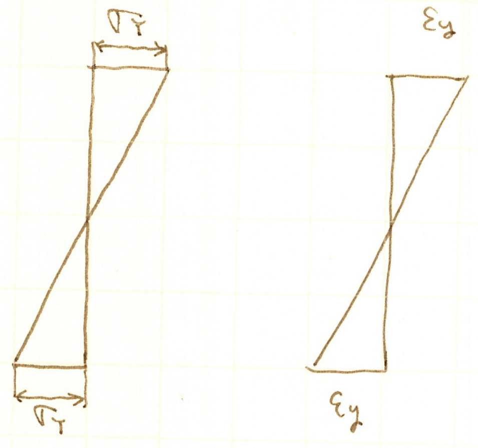




※の範囲は応力がひずみに線形に対応しなくなる。

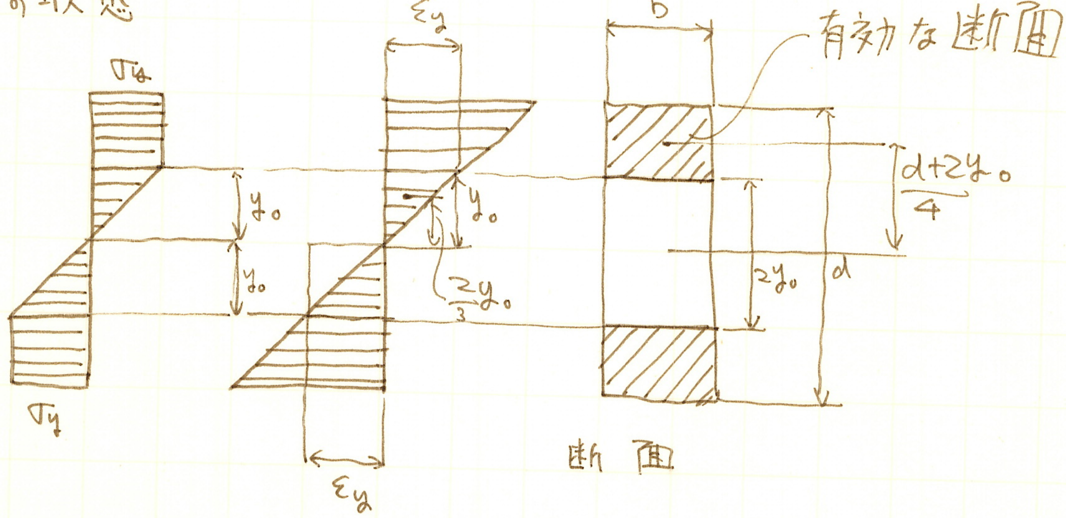
(1) の状態 $\sigma = M/S$

$$\boxed{M_Y = \sigma_Y \cdot S}$$



応力　ひずみ.

(2) の状態



断面

M_y: 降伏モーメント (yielding moment)

弾性塑性

$$\boxed{M_{yp}} = \sigma_y \cdot b(d-2y_0)\cdot\frac{d+2y_0}{4}$$

従来の設計における限界.

$$+\sigma_y \times b \times y_0 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} y_0 \times 2$$

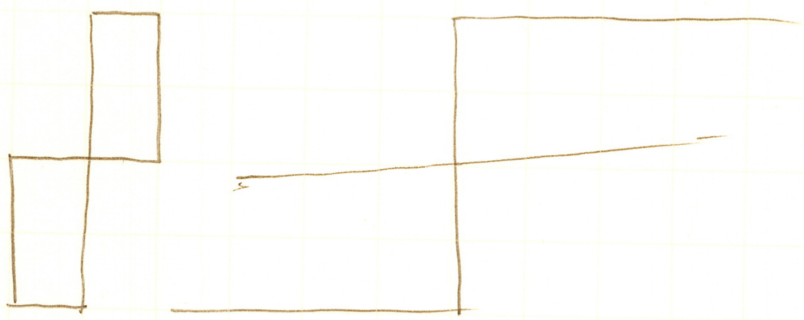
$$= \sigma_Y b \left\{ \frac{d^2-4y_0^2}{4} + \frac{2}{3} y_0^2 \right\}$$

$$= \frac{\sigma_y b}{12} \left(3(d^2-4y_0^2) + 8y_0^2 \right)$$

$$= \frac{\sigma_y b}{12} \left(3d^2 - 4y_0^2 \right)$$

$$= \sigma_Y b \left(\frac{d^2}{4} - \frac{y_0^2}{3} \right)$$

(3)



応力

ひずみ

$$\boxed{M_p = \sigma_y\, b \cdot \frac{d^2}{4} = \sigma_y \cdot Z}$$

全断面降伏

M_p : 全塑性モーメント (full plastic moment)

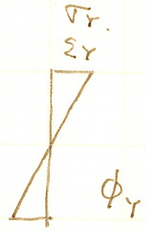
$$\frac{M_p}{M_y} = \frac{\sigma_y \cdot Z}{\sigma_y \cdot S} = \frac{Z}{S}$$

; 形状係数（断面形状だけの関数）

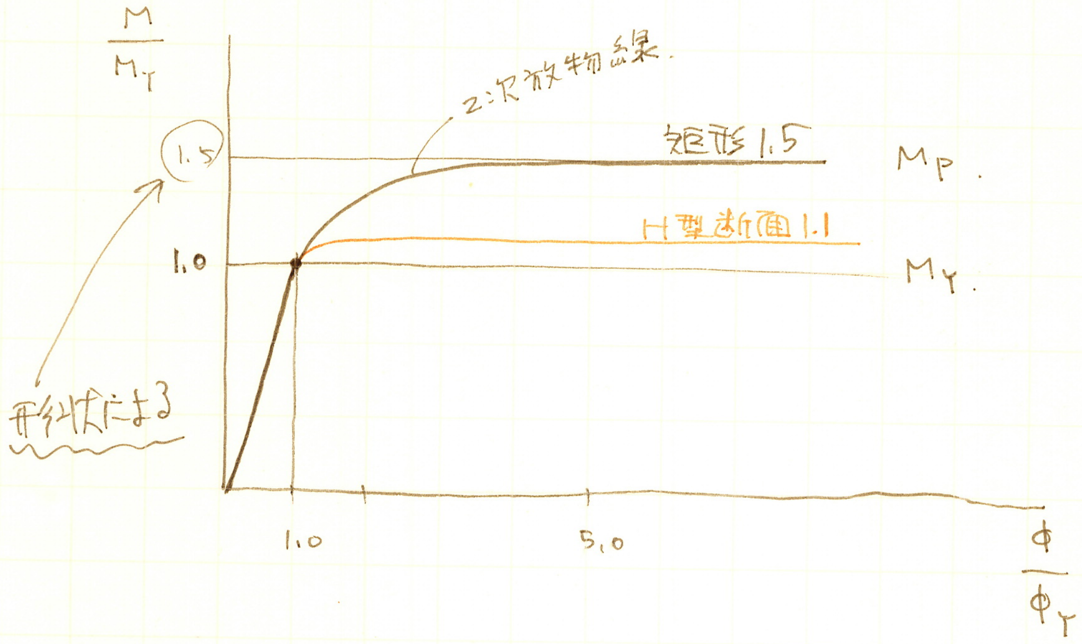
$$M_{Y,P} = \sigma_Y \left(Z - \frac{b y_0^2}{3} \right)$$

$$y_0 = \frac{\sigma_Y}{E\phi}$$

$$\frac{h}{2} = \frac{\sigma_Y}{E\phi_Y}$$



$$\frac{M}{M_Y} = \frac{3}{2}\left\{ 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\phi}{\phi_Y}\right)^2} \right\}$$



1/31.

鋼構造工学特論

レポート

9054.

橋梁研　皆川　勝

提出日　55/1/17

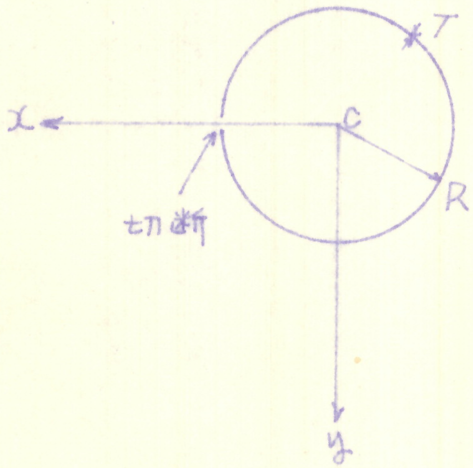
[課題 1]

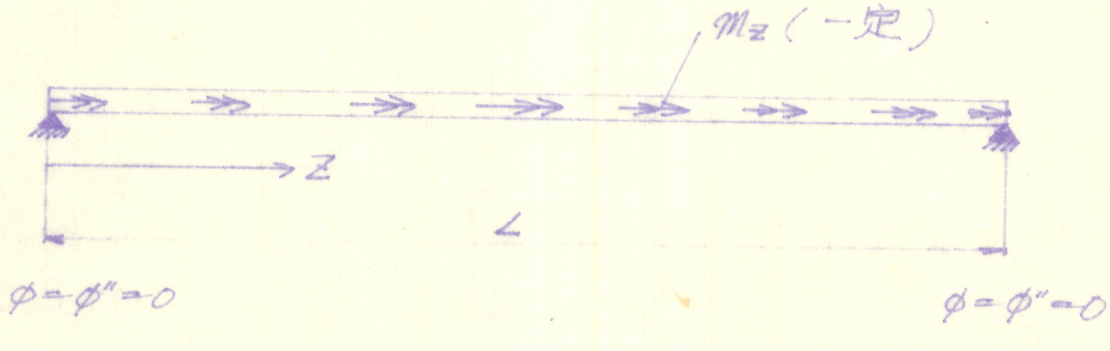
次に示す単純支持円形薄肉開断面梁に、等分布ねじりモーメント m_z が作用する場合、どの程度まで耐え得るか検討する.

$$\frac{L}{R} = 20, \quad \frac{R}{T} = 24,$$

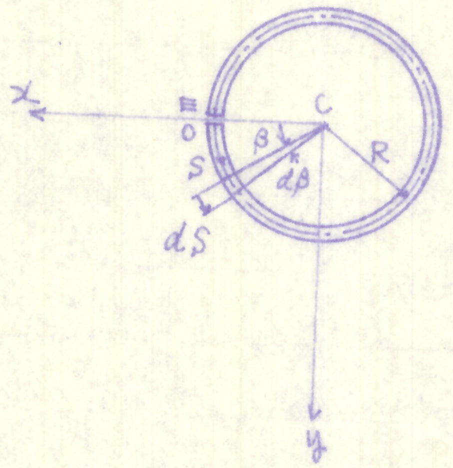
$$\sigma_{ta} = \sigma_{ca} = 1400 \ kg/cm^2$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \ kg/cm^2$$





1) 断面諸量を算出する；



上図により、幾何的関係を求める；

$$S = R \cdot \beta, \qquad dS = R\,d\beta,$$

$$x_1 = R, \qquad y_1 = 0,$$

$$x = R\cos\beta, \qquad y = R\sin\beta,$$

$$\rho = R \ (\text{一定})$$

図心に関する単位そり；

$$\omega = \int_0^S \rho\, dS = \int_0^\beta R \cdot R\, d\beta = R^2 \beta$$

x軸に関する断面2次モーメント；

$$I_x = \int_0^E y^2 t\, dS = \int_0^E (R\sin\beta)^2 \cdot t \cdot R\, d\beta$$

$$= R^3 t \left[-\frac{1}{4}\sin 2\beta + \frac{\beta}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi R^3 T$$

y軸に関するそり2次モーメント；

$$I_{\omega y} = \int_0^E \omega y T\, dS = \int_0^{2\pi} R^2\beta \cdot R\sin\beta \cdot T \cdot R\, d\beta$$

$$= R^4 T \left[\sin\beta - \beta\cos\beta \right]_0^{2\pi} = -2\pi R^4 T$$

せん断中心　；

$$x_0 = I_{\omega y} / I_x = -2R \quad , \quad y_0 = 0$$

せん断中心に関する単位そり；

$$\omega_0 = \int_0^S \rho_0\, dS = \omega + y_0 x - y_0 x_1 - x_0 y + x_0 y_1$$

$$= \omega - x_0 y = R^2\beta + 2R^2\sin\beta = R^2(2\sin\beta + \beta)$$

断面積；

$$A = \int_0^E T\,dS = 2\pi RT$$

単位そり；

$$\omega_n = \frac{1}{A}\int_0^E \omega_0 T\,dS - \omega_0$$

$$\int_0^E \omega_0 T\,dS = \int_0^{2\pi} R^2(2\sin\beta + \beta)\,T\cdot R\,d\beta$$

$$= R^3T\left[-2\cos\beta + \frac{1}{2}\beta^2\right]_0^{2\pi}$$

$$= R^3T\left[-2 + 2\pi^2 + 2\right] = 2\pi^2R^3T$$

$$\therefore \omega_n = \frac{2\pi^2R^3T}{2\pi RT} - R^2(2\sin\beta + \beta)$$

$$= R^2(\pi - 2\sin\beta - \beta)$$

そり1次モーメント；

$$S_\omega = \int_0^S \omega_n T\,dS = \int_0^\beta R^2(\pi - 2\sin\beta - \beta)\,TR\,d\beta$$

$$= R^3T\left[\pi\beta + 2\cos\beta - \frac{1}{2}\beta^2\right]_0^\beta$$

$$= R^3T\left[\pi\beta + 2\cos\beta - \frac{1}{2}\beta^2 - 2\right]$$

そり2次モーメント；

$$I_\omega = \int_0^E \omega_n^2 T\,dS = \int_0^{2\pi} R^4(\pi - 2\sin\beta - \beta)^2 T\cdot R\,d\beta$$

$$= R^5 T \int_0^{2\pi} (\pi^2 + 4\sin^2\beta + \beta^2 - 4\pi\sin\beta - 2\pi\beta + 2\beta\sin\beta)$$

$$= R^5 T \Big[\pi^2\beta + 2\beta - \sin 2\beta + \frac{\beta^3}{3} + 4\pi\cos\beta - \pi\beta^2$$

$$- 4\beta\cos\beta + 4\sin\beta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= R^5 T\left[2\pi^3 + 4\pi + \frac{8\pi^3}{3} + 4\pi - 4\pi^3 - 8\pi - 4\pi\right]$$

$$= \pi R^5 T\left[\frac{\cancel{8}\,2}{3}\pi^2 - 4\right]$$

2) 断面力

微分方程式

$$GK_T\phi'' - EI_w\phi'''' = -m_z$$

の一般解は次のようになる；

$$\phi = A + BZ + C\cosh\lambda Z + D\sinh\lambda Z - \frac{m_z}{2GK_T}Z^2$$

$$\phi' = B + C\lambda\sinh\lambda Z + D\lambda\cosh\lambda Z - \frac{m_z}{GK_T}Z$$

$$\phi'' = C\lambda^2\cosh\lambda Z + D\lambda^2\sinh\lambda Z - \frac{m_z}{GK_T}$$

境界条件.

$$Z = 0 \quad ; \quad \phi = \phi'' = 0$$

$$Z = l \quad ; \quad \phi = \phi'' = 0$$

より

i) $\phi_{z=0} = A + C = 0$

ii) $\phi_{z=l} = A + Bl + C\cosh\lambda l + D\sinh\lambda l - \frac{m_z}{2GK_T}l^2 = 0$

iii) $\phi''_{z=0} = C\lambda^2 - \frac{m_z}{GK_T} = 0$

iv) $\phi''_{z=l} = C\lambda^2\cosh\lambda l + D\lambda^2\sinh\lambda l - \frac{m_z}{GK_T} = 0$

iii) より、 $C = \dfrac{m_z}{\lambda^2 G K_T}$

これを iv) に代入することによりDが求まる；

$$D = \frac{1}{\lambda^2 \sinh\lambda l} \cdot \frac{m_z}{G K_T} (1 - \cosh\lambda l)$$

また、C を i) に代入すれば A が求まる ；

$$A = -\frac{m_z}{\lambda^2 G K_T}$$

これらを ii) に代入すれば B が求まる；

$$B = \frac{m_z \cdot l}{2 G K_T}$$

よって、

$$\phi = \frac{m_z}{\lambda^2 G K_T} \left(-1 + \frac{l \lambda^2}{2} Z + \frac{\sinh\lambda(l-Z) + \sinh\lambda Z}{\sinh\lambda l} - \frac{\lambda^2}{2} Z^2 \right)$$

$$\phi' = \frac{m_z}{\lambda^2 G K_T} \left(\frac{l \lambda^2}{2} + \frac{-\lambda\cosh\lambda(l-Z) + \lambda\cosh\lambda Z}{\sinh\lambda l} - \lambda^2 Z \right)$$

$$= \frac{m_z}{G K_T} \left(\frac{l}{2} + \frac{-\cosh\lambda(l-Z) + \cosh\lambda Z}{\lambda \sinh\lambda l} - Z \right)$$

$$\phi'' = \frac{m_z}{G K_T} \left(\frac{\sinh\lambda(l-Z) + \sinh\lambda Z}{\sinh\lambda l} - 1 \right)$$

作用断面力はねじりモーメントのみであるから，直応力σ，せん断応力τは次のようになる；

$$\sigma = E\omega_n \phi''$$
$$= ER^2(\pi - 2\sin\beta - \beta)\frac{m_z}{GK_T}\left(\frac{\sinh\lambda(l-z)+\sinh\lambda z}{\sinh\lambda l} - 1\right)$$

$$\tau = -ES_\omega \phi'''/T + GT\phi'$$

$$= -ER^3T\left(\pi\beta + 2\cos\beta - \frac{1}{2}\beta^2 - 2\right)\frac{\lambda m_z}{GK_T}\cdot\frac{-\cosh\lambda(l-z)+\cosh\lambda z}{\sinh\lambda l}$$
$$+ GT\frac{m_z}{GK_T}\left(\frac{l}{2} + \frac{-\cosh\lambda(l-z)+\cosh\lambda z}{\sinh\lambda l} - z\right)$$

ここで，各応力の最大値 σ_{max}，τ_{max} を求める．

$$\phi''_{max} = \phi''_{z=\frac{l}{2}} = \frac{m_z}{GK_T}\left(\mathrm{sech}\frac{\lambda l}{2} - 1\right)$$

$$\omega_{n\,max} = \omega_n|_{\beta=0} = \pi R^2$$

であるから，$z=\frac{l}{2}$，$\beta=0$ において $\sigma=\sigma_{max}$ であり，その値は

$$\sigma_{max} = \frac{\pi ER^2 m_z}{GK_T}\left(\mathrm{sech}\frac{\lambda l}{2} - 1\right)$$

$k_T = 2\pi R^3 T$ より

$$\tau_{max} = \pi \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{R^2 m_z}{2\pi R^3 T}\left(\mathrm{sech}\frac{\lambda l}{2} - 1\right)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{G K_T}{E I_\omega}}$$

☆ [ここで，条件にはないが，$G/E = 0.383$ として計算をすすめることにする]

$$\lambda = \sqrt{\frac{G}{E} \cdot \frac{2\pi R^3 T}{\pi R^5 T\left(\frac{2}{3}\pi^2 - 4\right)}} = \sqrt{\frac{0.383 \times 2\pi}{\pi R^2\left(\frac{2}{3}\pi^2 - 4\right)}} = 0.545 \cdot \frac{1}{R}$$

$$\mathrm{sech}\frac{\lambda l}{2} = \mathrm{sech}\frac{0.545}{2} \cdot \frac{l}{R} = \mathrm{sech}\frac{0.545 \times 20}{2} = 0.0086$$

$$|\tau|_{max} = \pi \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{m_z}{2RT}(1 - 0.0086)$$

$$= 1.294\,\frac{m_z}{RT} < 1400\ \mathrm{kg/cm^2} = \tau_{ca}$$

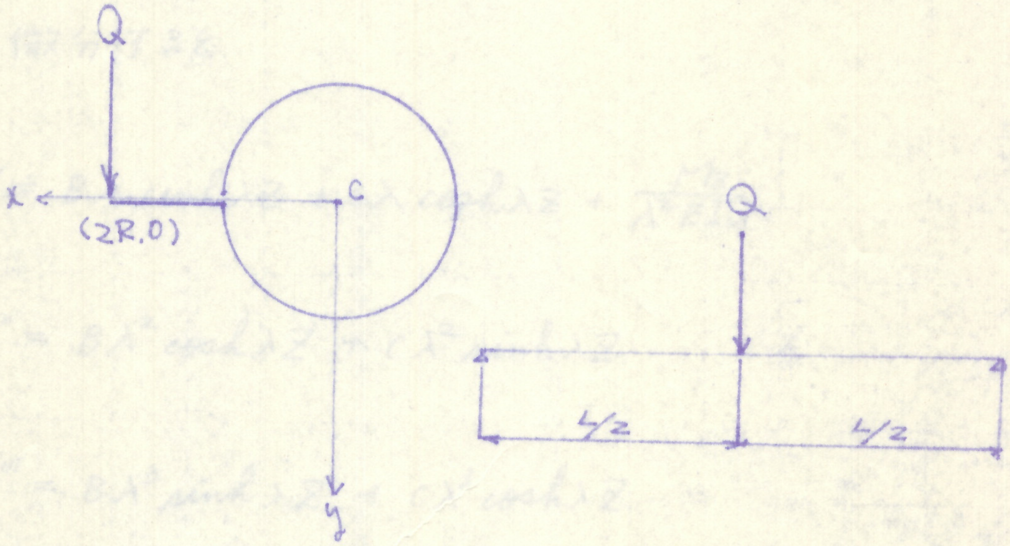
$$\therefore\ m_z < 1080\,RT\ \mathrm{kg\,cm/cm}\ \cancel{= \tau_{ca}}$$

☆ [ここで与えられた条件では，数値的に許容ねじりモーメントが出ないため，$R = \cancel{10}\ 24\ \mathrm{cm}$，$T = 1.0\ \mathrm{cm}$ として計算をする]

$$m_z < 1080 \times \cancel{10}\,24 \times 1.0 \times \frac{1}{1000} = \cancel{10.8}\ 25.9\ \mathrm{t\text{-}cm/cm}$$

[課題2]

課題1と同じ条件で，荷重が下図のように載荷されているときの応力を求める．



(ただし張出し部の断面は剛で断面定数には関係しないものとする．)

1) 断面諸量

課題1と全く同様である．

$$\therefore\ A = B = 0$$

$$C = -\frac{M_z}{\lambda^3 E I_\omega} \cdot \frac{1}{\cosh\frac{\lambda l}{2}}$$

$$\therefore\ \phi = -\frac{M_z}{\lambda^3 E I_\omega} \cdot \frac{\sinh\lambda z}{\cosh\frac{\lambda l}{2}} + \frac{M_z}{\lambda^2 E I_\omega} z$$

$$= \frac{M_z}{\lambda^3 E I_\omega}\left(-\frac{\sinh\lambda z}{\cosh\frac{\lambda l}{2}} + \lambda z\right)$$

$$\phi' = \frac{M_z}{\lambda^2 E I_\omega}\left(-\frac{\cosh\lambda z}{\cosh\frac{\lambda l}{2}} + 1\right)$$

$$\phi'' = -\frac{M_z}{\lambda E I_\omega} \cdot \frac{\sinh\lambda z}{\cosh\frac{\lambda l}{2}}$$

$$\phi''' = -\frac{M_z}{E I_\omega} \frac{\cosh\lambda z}{\cosh\frac{\lambda l}{2}}$$

よって直応力，せん断応力は次のようになる．

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + E\omega_n \phi''$$

$$\tau = \frac{Q}{t I_x}\int_0^s y t\,ds - \frac{E S_\omega}{t}\phi''' + G I \phi'$$

$\therefore \quad A = B = 0$

$$C = -\frac{M_z}{\lambda^3 E I_\omega} \cdot \frac{1}{\cosh\frac{\lambda l}{2}}$$

$$\therefore \phi = -\frac{M_z}{\lambda^3 E I_\omega} \cdot \frac{\sinh \lambda Z}{\cosh\frac{\lambda l}{2}} + \frac{M_z}{\lambda^2 E I_\omega} Z$$

$$= \frac{M_z}{\lambda^3 E I_\omega}\left(-\frac{\sinh \lambda Z}{\cosh\frac{\lambda l}{2}} + \lambda Z\right)$$

$$\phi' = \frac{M_z}{\lambda^2 E I_\omega}\left(-\frac{\cosh \lambda Z}{\cosh\frac{\lambda l}{2}} + 1\right)$$

$$\phi'' = -\frac{M_z}{\lambda E I_\omega} \cdot \frac{\sinh \lambda Z}{\cosh\frac{\lambda l}{2}}$$

$$\phi''' = -\frac{M_z}{E I_\omega} \frac{\cosh \lambda Z}{\cosh\frac{\lambda l}{2}}$$

よって 直応力, せん断応力は次のようになる.

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + E \omega_n \phi''$$

$$\tau = \frac{Q}{t I_x}\int_0^s y t\, ds \cdot \frac{E S_\omega}{t}\phi''' + G t \phi'$$

ここで、

$$\int_0^s y\, t\, dS = \int_0^\beta R\sin\beta \cdot tR\,d\beta = R^2T\left[-\cos\beta\right]_0^\beta = R^2T(1-\cos\beta)$$

$$I_x = \pi R^3 T \qquad , \quad I_\omega = \pi R^5 T\left(\frac{2}{3}\pi^2 - 4\right)$$

$$\omega_n = R^2(\pi - 2\sin\beta - \beta)$$

$$S_\omega = R^3 T\left(\pi\beta + 2\cos\beta - \frac{1}{2}\beta^2 - 2\right)$$

$$M_x = \frac{Q}{2}Z \qquad \left(0 < Z \leqq \frac{L}{2}\right)$$

$$M_z = -4RQ$$

$$\lambda = 0.545/R$$

故に

$$\sigma = \frac{Q\,Z \cdot R\sin\beta}{2\pi R^3 T} + ER^2(\pi - 2\sin\beta - \beta)\cdot\frac{R\cdot 4RQ}{0.545\,EI_\omega}\,\frac{\sinh\lambda Z}{\cosh\frac{\lambda L}{2}}$$

$$= \left(\frac{Z\sin\beta}{2\pi\cdot\frac{1}{24}R^3} + \frac{4R^4(\pi - 2\sin\beta - \beta)}{0.545\cdot\pi R^5 T\left(\frac{2}{3}\pi^2 - 4\right)}\cdot\frac{\sinh\left(0.545\frac{Z}{R}\right)}{\cosh(0.273\times 20)}\right)Q$$

$$= \left\{\frac{3.820}{R^3}Z\sin\beta + \frac{24\times 0.008\,(\pi - 2\sin\beta - \beta)\sinh\left(0.545\frac{Z}{R}\right)}{R^2\pi}\right\}Q$$

$$\tau = \frac{Q}{\pi R^3 T^2} \cdot R^2 T (1-\cos\beta) + \frac{E R^3 T}{T} \left(\pi\beta + 2\cos\beta - \frac{\beta^2}{2} - 2\right)$$

$$\times \frac{-4RQ}{E\pi R^5 T (\frac{2}{3}\pi^2 - 4)} - \frac{GT \cdot 4RQ}{\lambda^2 E\pi R^5 T(\frac{2}{3}\pi^2 - 4)} \left(1 - \frac{\cosh \lambda z}{\cosh \frac{\lambda L}{2}}\right)$$

$$= \Bigg[\frac{24}{\pi R^2}(1-\cos\beta) - \frac{24 \times 4}{\pi(\frac{2}{3}\pi^2-4) R^2}\left(\pi\beta + 2\cos\beta - \frac{\beta^2}{2} - 2\right)$$

$$+ \left(\frac{R}{0.545}\right)^2 \frac{0.383 \times 4}{\pi(\frac{2}{3}\pi^2 - 4) R^4} \left(\frac{\cosh(0.545\frac{z}{R})}{\cosh 5.46} - 1\right) \Bigg] Q$$

$$\therefore \tau = \Bigg[7.639 \times (1-\cos\beta) - 11.845 \left(\pi\beta + 2\cos\beta - \frac{1}{2}\beta^2 - 2\right)$$

$$+ 0.636 \left\{ 0.009 \cosh\left(0.545 \frac{z}{R}\right) - 1 \right\} \Bigg] \frac{Q}{R^2}$$

答　案　用　紙

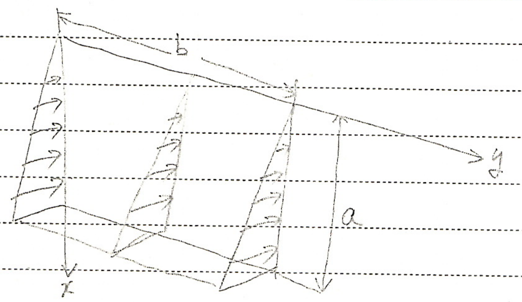
(昭和54年5月17日3時限)

教室番号	着席番号	試験科目	担当教員	学科	学年	組	学籍番号	氏名	採点
147		鋼構造特論	西脇	土	M1		9504	皆川　勝	

[問] 四辺単純支持の長方形等方性平板が

$$p = p_0 \frac{x}{a} \quad (y \text{方向に一定})$$

を受ける時の最大曲げモーメント及び最大たわみの生ずる位置と、その各々の大きさを求めよ。



境界条件

$x = 0, a \quad w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

$y = 0, b \quad w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$

[解] $$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad \text{—— ①}$$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad \text{—— ②}$$

とおく。

① より、

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \sum_m\sum_n A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \\
\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= \sum_m\sum_n A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \\
\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \sum_m\sum_n A_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}
\end{aligned}\right\} \quad ③$$

② より

$$\int_0^b\int_0^a p(x, y)\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\,dx\,dy = \sum_m\sum_n\int_0^b\int_0^a a_{ij}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{j\pi y}{b}$$

(a_{ij} は ②式の任意の項の係数)

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx = 0 \quad (m \neq i), \qquad = \frac{a}{2} \quad (m = i)$$

$$\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{j\pi y}{b}\,dy = 0 \quad (n \neq j), \qquad = \frac{b}{2} \quad (n = j)$$

より $$a_{ij} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a p(x, y)\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\,dx\,dy$$

ここで $p(x, y) = p_0\frac{x}{a}$ を代入すると

$$a_{ij} = \frac{4p_0}{a^2 b}\int_0^b\int_0^a x\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\,dx\,dy \quad ④$$

答 案 用 紙

(昭和　年　月　日　時限)　　NO2

教室番号	着席番号	試験科目	担当教員	学科	学年	組	学籍番号	氏名	採点
							9504	皆川　勝	

④において、

$$\int_0^a x\sin\frac{i\pi x}{a}dx = \int x\left(-\frac{a}{i\pi}\cos\frac{i\pi x}{a}\right)' dx$$

$$= -\frac{a}{i\pi}\left\{\left[x\cos\frac{i\pi x}{a}\right]_0^a - \int_0^a \cos\frac{i\pi x}{a}dx\right\}$$

$$= -\frac{a}{i\pi}\left\{\left[x\cos\frac{i\pi x}{a}\right]_0^a - \left[\frac{a}{i\pi}\sin\frac{i\pi x}{a}\right]_0^a\right\}$$

$$= -\frac{a}{i\pi}\cdot a\cos i\pi = -\frac{a^2}{i\pi}\cos i\pi$$

$$\int_0^b \sin\frac{j\pi y}{b}dy = -\frac{b}{j\pi}\left[\cos\frac{j\pi y}{b}\right]_0^b = -\frac{b}{j\pi}(\cos j\pi - 1)$$

$$\therefore\ a_{ij} = \frac{4p_0}{a^2 b}\cdot\frac{-a^2}{i\pi}\cos i\pi\cdot\frac{-b}{j\pi}(\cos j\pi - 1) = \frac{4p_0}{ij\pi^2}\cos i\pi(\cos j\pi - 1)$$

(☆)
- iが偶数 jが偶数 $\cos i\pi(\cos j\pi-1)=0$
- 〃 〃 jが奇数 〃 $a_{ij} = -2$
- iが奇数 jが偶数 〃 $= 0$
- 〃 〃 奇数 〃 $= 2$

偶i 偶j $1\times 0 = 0$
偶 奇 $1\times -2 = -2$
奇 偶 $-1\times 0 = 0$
奇 奇 $-1\times -2 = 2$

$$\sum_m\sum_n A_{mn}\left\{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right\}^2\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = \frac{1}{D}\sum_m\sum_n a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\therefore\ A_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D}\frac{a_{mn}}{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} = \frac{1}{\pi^4 D}\frac{1}{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2}\frac{4p_0}{mn\pi^2}\cos m\pi(\cos n\pi - 1$$

$$\therefore\ A_{mn} = \frac{4p_0}{\pi^6 D mn}\cos m\pi(\cos n\pi - 1)$$

$$A_{mn} = \frac{4p_0}{\pi^6 D mn}\cdot(-1)^{m+1}\cdot 2 \quad (m=1,2,3,4,\cdots,\ n=1,3,5,7,9,\cdots)$$

$$= \frac{8p_0\cdot(-1)^{m+1}}{\pi^6 D mn} \quad \left(\begin{matrix} m=1,2,3,4,\cdots \\ n=1,3,5,7,\cdots\end{matrix}\right)$$

$$\therefore\ w = \frac{8p_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad //$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{8p_0}{\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 +$$

(昭和　年　月　日　時限)

答　案　用　紙

NO,3

教室番号	着席番号	試験科目	担当教員	学科	学年	組	学籍番号	氏名	採点
								皆川　勝	

$$A_{mn} = \frac{4p_0}{\pi^6 D\, mn} \frac{1}{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \cancel{\cos m\pi (\cos n\pi - 1)}$$

$$\therefore A_{mn} = \frac{4p_0}{\pi^6 D} \frac{1}{mn} \frac{1}{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} (-1)^{m+1} \cdot 2$$

$$= \frac{8p_0}{\pi^6 D} \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{mn} \cdot \frac{1}{\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \quad \left(\begin{array}{l} m = 1, 2, 3, 4, \cdots \\ n = 1, 3, 5, 7, \cdots \end{array}\right)$$

$$\therefore w = \frac{8p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\left\{\begin{array}{l} M_x = \frac{8p_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\nu\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \\ M_y = \frac{8p_0}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \left\{\left(\frac{n}{a}\right)^2+\nu\left(\frac{m}{a}\right)^2\right\} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \end{array}\right.$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{8p_0}{\pi^5 a D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cdot m}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} = 0$$

$y = \frac{b}{2}$ のとき　$w = max$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{8p_0}{\pi^5 a D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cdot m}{mn\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right\}^2} \cos\frac{m\pi x}{a}$$

numerical には出ない //

- エネルギー法
- フーリエ展開