構造力学ノート

２００１年4月1日

皆川　勝

1. 構造力学とは何か

1.1. 構造物と力学

1.1.1. 構造物とは何か

構造物（Structures）とは何でしょう。広辞苑によれば、構造とは，「いくつかの材料を組み立ててひとつのものにこしらえること」となっていますので，構造物は「いくつかの材料を組み立ててこしらえた物」といえます．

一般に構造物というと、橋梁，トンネル，ダム，ビル，家屋などを思い浮かべる方が多いと思います．これらは土木工学あるいは Civil Engineering で扱う代表的な構造物です．しかし，上記の定義によれば，飛行機，宇宙ロケット，ヘリコプターなどの飛行物，自動車や列車などの移動物，機器類，机や椅子などの什器，人体なども，いくつかの人工あるいは自然の材料が組み立てらてできているのですから構造物ということになります．そこで、**ある機能を持たせた部材を組み合わせて組み立てられたものを構造物を呼ぶことにします。**

このうち、土木工学で扱う構造物は、トンネルや橋梁、ダムなどですね。これらはどのような特質を持っているのでしょうか。わが国では土木工学で扱う構造物と、建築学あるいは建築工学であつかう構造物である建築物と区別します。しかし、米国流に Civil Engineering とすれば、建築物も同じ範疇に含まれます。そしてこれらの最大の特質は地球の表面あるいはその近くに自立しているということです。 すなわち

「土木工学で扱う構造物（以後，土木構造物）とは、地球の表面あるいはその近傍に自立して荷重を支え、それを地球へ伝達することにより、その機能を発揮するもの」

ですから，飛行体，什器、建築物などは土木工学では扱いません．しかし，建築物は，上記の土木構造物の定義からすれば土木構造物ですし，取り扱う荷重が異なることを除けば，まったく同等に扱うことができます．

1.1.2.　　　土木構造物の特質

　はじめに，土木構造物は公共性，属地性・一品生産，大規模，長い使用期間，

1.2. 構造物の受ける作用

荷重種類

1.3. 構造部材

線状，面状，立体

線状：梁,柱，曲梁，梁柱，ケーブル，トラス，アーチ，ラーメン

面状：板，シェル，膜

二次元構造と三次元構造

1.4. 理想化と抽象化

1.5. 構造物の設計

1.5.1.　　　設計とは何か

　構造物の設計とは,「建設しようとする構造物について，考えられる限りの条件のもとで生じる結果を予測し，そのうえで最適と考えられる形態を具体的に決定すること」（土木工学ハンドブック）です.

示方書などの基準類の規定を満たすように，使用材料，部材の寸法，構成を決定すること.

1.5.2.　　　構造物の設計要件

機能性，合目的性，安全性，耐久性，施工性，経済性，美観，環境との調和，維持管理の容易さ

1.6. 構造力学とは何か.

静力学と動力学

剛体の力学と変形体の力学

流体の力学

個別材料の力学（土質力学，複合材料の力学，岩盤力学...）

1.7. 本書で採用する仮定

図心軸が部材の形状

自重は必要なとき分布荷重として扱う

平面のみ扱う

等質等方材料

静的荷重作用（衝撃,振動は考えない）

確定論的扱い

微小変形，つり合いは変形前の状態で.

時間依存性はない.

2.　静力学から構造力学へ

2.1. 力とは何か

　力とは，ある物体が他の物体に作用して，その運動の状態を変化させようとする作用です．実際に接触して作用する場合もあるし，重力や磁力のように接触せずに作用するものもある．例えば，重力は地球という物体が他の物体を引張ることにより作用する引力の作用である．このような力を受けた物体は，その大きさに比例した加速度で運動しようとする．もし，力を受けてもなお運動を開始しないとすれば，これは作用した力に抵抗する何らかの別の力が作用していなければならない．したがって地球上で重力を受けてもなお静止している構造物は，重力以外になんらかの力を地球から受けているのです．

2.2. 力の 3 要素

　力は，その大きさ，方向および作用点によって特徴付けられます．これらを力の 3 要素と呼びます．力を視覚的に表示するためにはこれら３成分を表示すればよいことになります．力は通常１本の矢印で表します．矢印の大きさが力の大きさを表しますが，図的解法を用いる場合を除いて，適当な長さに記述し，これの近くにその大きさを示します．方向は矢印の向きが示します．作用点は矢印の始点か終点のどちらかを物体に接触させることによって示すことができます．

2.3. 運動の 3 法則

　質量のある物体は，力を受けるとある加速度で運動しますが，その運動には３つの法則があります．

ニュートンの運動の第 1 法則：質点に作用する力がゼロなら，静止状態か等速運動を続ける．（慣性の法則）

ニュートンの運動の第 2 法則：力を受けると物体は運動する．その加速度は物体の力に比

例する．その比例定数はその物体の質量である．（運動の法則）
ニュートンの運動の第 3 法則：接触する物体に働く作用及び反作用の力は同じ大きさと同じ作用線をもつが，方向は逆である．（作用反作用の法則）

構造力学では，静止した変形し得る物体の力学を用いますが，場合によっては簡単のため剛体の力学を用いることもあります．
構造物を剛体とみなせば，後述のように力とモーメントのつり合いにより構造物の静止条件を記述できます．したがって，構造力学は運動の法則のごく限られた範囲で応用しているのです．このような学問は静力学と呼ばれます．構造力学では地震や風などの時間と共に変動する荷重による構造物の振動を扱う時には構造物が動いていることを前提とする動力学を用いる．水理学なども動力学が中心となる．

2.4. 力の基本的な性質

運動の法則以外に，剛体に関して二つの基本法則があります．そしてこれに作用反作用の法則を加えてこれらを力の 3 法則と呼ぶ.

2.4.1. 力の移動則

力の移動則とは，「剛体に作用する力の作用点を移動しても，その効果は変わらない．」というものです．例えば，自動車を人間が引張るとおき，ロープの角度を同じにしておけば，A点で引張っても，B点で引張ってもその効果は変わらない．このことは実験的に立証されている事実でたの原理や法則から証明することはできません.
ここで注意しなければならないのは，あくまで剛体についての法則であるという点です.変形体では力を受けると変形します．その変形の効果は図に示すように作用点の位置によってきわめて強く影響を受けます．ですからこの移動則は物体の運動やつり合いを考える時には成立しますが，物体の変形や内部に発生する力を扱うときには用いることはできません.

2.4.2.　　　力の平行四辺形の法則

力の平行四辺形の法則とは,「ある物体の一点に二つの方向が異なる力が作用したときの効果は,そのそれらの力を隣接２辺とする平行四辺形の対角線の大きさと方向を持ち,同じ点に作用する一つの力が作用したときの効果に等しい」というものです.

力は大きさと方向を持つベクトル量であって,ベクトル量には上記のような法則が成立することがやはり実験的に確認されています.

この法則を利用すれば,一つの力をある２方向の力に分解することもできます.

また,直交座標系で表示した場合,成分ごとの和をとることで,一つの力に合成できることになります.

2.5. 力の単位

力の単位は基本単位ではないが,工学単位系では力も基本単位としています.力学で用いる基本単位は長さ,質量,時間です.〔力〕=〔質量〕〔加速度〕ですから,基本単位を質量(ｋｇ),長さ(m),時間（ｓ）とすれば,力の単位は kgm/s2 となります.この単位をN（ニュートン）と国際単位系では定義しています.１Ｎとは質量１ｋｇの物体に 1m/s2 の加速度を生じさせる効果をもつ力と定義できます.通常土木の分野では質量の大きなものを相手にするため,接頭語のついた kN（キロニュートン）や MN（メガニュートン）も用いられます.

従来,日本では力の単位と kgf が用いられてきましたが,すでに学会でも国際単位系に統一されており,ここでは換算表を示すにとどめます.

2.6. 力の分解と合成

力の平行四辺形の法則を用いると、ある１点に作用する力を合成することができるし、逆に分解することもできます。しかし,構造物に作用する力は一般に１点に集中して作用することはなく,作用点は複数となります.したがって,物体の複数の点に作用する力を合成あるいは分解することによって,図的に力のつり合いを分析することができます.図

解法は今日用いられることは少なくなっているが，直感的に力のつりあいや流れを知る上で極めて有効です．

二つ以上の力が剛体に作用している時に，この剛体の重心に同じ加速度及び重心回りに同じ角加速度を生じるような一つの力に置換することができます．これを合力といいます．また，例外として，作用線が平行で向きが逆，大きさの等しい二つの力は偶力と呼ばれる．この場合，一つの力に置換することはできません．このように，剛体に作用する二つ以上の力を等価な一つの合力または偶力に置換することを力の合成といいます．

逆に，一つの力を二つ以上の力に置換することを力の分解といい，それぞれの力を分力といいます．

2.6.1. 力の合成

剛体に作用する力を合成するには，前述の力に関する二つの法則を用います．

作用線が一点で交わる二つの力を合成する．この場合には，力の移動則を用いて各作用線上を，二つの作用線の交点まで移動します．この際それぞれの矢印の始点をこの交点に一致させます．これは二つの力の作用線がこの交点を通過しなければならないことによります．そして，力の平行四辺形の法則を用いて合成力を求めます．同じ結果は，一つの力の先端に他方の力の終端をつなげることによっても得られますが．これは力がベクトルであることによります．また，一見すると力を作用線以外のところへ平行移動しているように見えますが，あくまで自由ベクトルとして移動させたのであって，力として移動させたわけではありません．３つ以上の力を合成する場合には，二つの力の合成を繰り返してゆきます．また，作用線が一点で交わる場合にはより簡単に合成できます．この力の合成の過程は剛体の形状に影響を受けていないことに注意してください．剛体に作用する力の合成，分解，つり合いを考えるとき，剛体の形状は無関係です．また，力の合成の結果はただ一つです．

作用線が一点で交わらない，つまり平行な二つの力を合成する．この場合には，適当な位置に原点０をとり，そこからこれら二つの力の方向に座標 x をとり，それと直角方向に座標 y をとります．これらの力は x 方向成分のみを持ちますから，合力の y 方向成分はゼロとなります．また，x 方向成分は二つの力の和になります．また，0 点回りのモーメントの

和が合力の持つモーメントに等しいことから，合力の作用線は二つの力から，その力に逆比例した位置になります.「平行で同じ向きの二つの力の合力は，それらに平行で，二つの力の和に等しい大きさを持ち，作用線は二つの力から，力の大きさに逆比例した位置にくる.」なお，これと同じ結果は，図のように一旦それぞれの力を分解しておいて，別の二つの力の再合成をすることによっても得られます.

二つの力の方向が逆の場合には，一方の力を負として扱えば同様に次のように合成できます.「平行で逆向きの二つの力の合力は，それらに平行で，二つの力の差に等しい大きさを持ち，作用線は大きい方の力の外側に，二つの力の大きさに逆比例した位置にくる.」

特別な場合として，二つの力の方向が逆の場合で，力の大きさが等しい場合，どうなるでしょうか？作用線の位置は力の大きさが近づくにしたがって外側に遠ざかり，二つの力の大きさが等しいときには，作用線の位置は無限遠に遠ざかることになってしまいます.このことから，このような一組の力をただ一つの力で置換することができないことが理解できます.このような力を偶力といいます.

2.6.2. 力の分解

一つの力を二つ以上の力に分解する方法は無限になります.したがって，通常分力の作用方向が指定されたり,片方の分力が指定されたりします.

例題

2.7. 力のモーメントと偶力

力のモーメントとは，力が物体を回転させる能力であり，着目点から力の作用線におろした垂線の距離（モーメントの腕の長さといいます）に力の大きさを掛けることで得られます.力が大きいほど，腕の長さが長いほど大きな回転を生じさせる能力があるのです.

前節で偶力は一つの力に置換できないことを述べました.また，その回転方向を意識しておく必要から，符合の約束が必要になります.通常，時計回りの回転を生ずるモーメントを正のモーメントとすることが多く,本書でも特に断らない限りこの定義によることとします.

シーソー，くぎ抜き，スパナ，天秤などなど．

モーメントを計算する際には，定義通り垂線の距離から求めても良いし，力の分解をして，その分力のモーメントの和をとってもかまいません．なるべく簡便に求める工夫をするのが良いでしょう．

さて前述の偶力のもつモーメントを求めてみましょう．いくつかの点の回りで同じ偶力の持つモーメントを計算すると，すべて同じであることがわかります．つまり，偶力は物体のすべての点に関して同じ大きさのモーメントを持つのです．このような力は図のように一つの回転矢印で表示します．

偶力を加えると，一つの力を他の位置に移動することができます．一つの力は偶力と他の力に分解することができます．偶力と力に分解できたということは，偶力という回転を促す作用と，力という並進移動を促す効果の両方を力は持っているということになります．言い換えれば，物体を適切に支持してやって，回転効果と並進移動の効果の両方がうまく打ち消されれば，物体は静止の状態を保つことができるのです．

2.8. 自由度とつりあい条件

ある計画を立てるとき制約条件ががんじがらめに決まっているとき，計画を立案する人には自由度がないといいます．逆に，制約があまりないとき立案者はフリーハンドで計画を立てることができます．このような時,この人は自由度が高い状況にあるといいます．

一本の航路の上しか通過できない状況を想定すると，この船舶の位置は，基準となる港からの距離で一義的に定まります．船舶は航路にかかわらず自由に海面を進むことができるとすれば，二次元の座標によりその位置は確定します．潜水艦の場合にはさらに深度が特定されて位置が決まります．つまり三次元の空間上の位置がこの潜水艦の位置を決めることになります．これらはすべて物体を点と考えたわけで，質点の直線上,平面上，空間上での自由度が１,２,３であるということを表す例です．

力学系においても同様に，系の位置を完全に記述するために必要な座標の数を自由度といいます．ある線上のみしか移動できない空間を，一次元空間といいます．一次元空間ではその線上で物体が回転するという概念も考えません．回転という概念自体がすでに二次元空間での事象だからです．二次元空間では，二次元の座標が位置を定めますが，その平

面内で回転することができますので，自由度は３となります．船舶でいえば位置のほかに船の姿勢が変わり得るということです．さらに,三次元空間では，三次元の座標が位置を定めますが，３軸の回りに回転することができますので，自由度は６となります．潜水艦でいえば船体の上下の傾き，左右の傾きそして進む方向が決まって潜水艦の状態が完全に記述できるということです．

剛体の自由度が１の場合（一次元)，この剛体の運動は一つの座標例えばｘによって記述でき，一つの運動方程式（運動の第２法則による）が立てられます．３自由度の場合（二次元）の運動方程式の数は３，６自由度の場合（三次元）の運動方程式の数は６となります．

剛体が組み合わさった系では自由度はその数に応じて２倍，３倍となります．変形し得る連続体は無限の点からなるとみなされるので自由度は無限になります．

土木構造力学で扱う構造物はほとんどの場合地球上で静止しています．また，つり合いのみで外力の関係が得られる場合には，構造物を剛体と扱うことができます．問題を二次元，つまり平面上に存在する構造物に限定すると,自由度は３となり，以下の３つの式が運動方程式の特別の場合として得られます．これら平面構造物の力のつり合い式といいます．

2.9. 安定と不安定・静定と不静定

剛体として扱える場合に，二次元の構造物の自由度が３ならば，この自由度を何らかの方法で拘束してやれば構造物は動けなくなります．つまり３つの拘束を与えると構造物を静止した状態に保つことができるわけです．図にいくつかの例を示しました．いずれも３つの拘束をしたために，荷重を受けても静止することができます．このような構造物は，３つのつり合い条件式に対して，３つの未知外力を持つことになり,数学的に解くことができます．このように静的つり合い条件からすべての反力と，その結果としてすべての内力を求められる構造物を静定構造物といいます．これに対して，図の例で拘束が４つ以上ありこれも荷重の作用に対して静止していることができますが，つり合い条件数３に対して未知反力数が多いので数学的に解くことはできません．このような構造物を解くには他に何らかの条件を必要とします．このような構造物を外的不静定構造物と呼びます．また，図の例では支点反力数は３なのですが，部材が複雑に結合しているために，つり合い条件

のみから内力を求めることができません．このような構造物は内的不静定構造物と呼ばれます．以上の例では，いずれにしろこれらの構造物はどのような荷重パターンに対しても静止状態を保つことができます．そのような構造物を安定な構造物といいます．

これに対して，図の例では反力が３つないために，荷重が作用しなくとも構造物として自立することができません．また，図の例では，荷重が水平に作用しなければ静止していられますが，一端すこしでも水平の荷重が作用すると，水平方向の拘束がないために移動してしまいます．このように拘束条件からある荷重に対して静止状態を保つことのできない構造物を外的不安定構造物といいます．これに対して，図の例では反力は３つ以上あるために外的には安定ですが，図材の組み合わせ方法が不適格なため,荷重の作用に対してその形状を保つことができません．このような構造物を内的不安定構造物といいます．

これらの関係をまとめると図のようになります．

2.10.　　荷重のモデル化

荷重とは，構造物に作用する能動的な外力のことをいいます．荷重には構造物の自重の相当する死荷重，自動車など時間と共に移動する活荷重，風，地震，波浪，水圧など多くの種類があります．構造力学で扱う荷重には以下のような仮定を導入して問題を簡単化します．

- 荷重はすべて静的に作用するものとする．荷重の載荷する速度は無視できるほど小さく，荷重はゼロから次第に増加して最終的な値に至る．
- 荷重の大きさ，方向，作用点は確定的に定まっているものとする．荷重の確率的あるいは統計的な変動を考慮しない．
- 荷重は集中荷重，分布荷重および偶力モーメントにより表されるもののみを扱う．

物体の自重のように体積そのものに作用する荷重を例外として，荷重は何らかの形で面的に構造物に作用します．ある程度広い面積に分布して作用する荷重を分布荷重といいます．これに対して分布がある小さな面積に限定された分布荷重は，一点に作用するものとして扱っても実用上の誤差は大きくありません．このような荷重を集中荷重という．ですから，集中荷重というのは一種の理想化された荷重ということになります．例えば人間が橋梁の上に立っている状況では，人間の体重は荷重として足の底から面的に作用しますが，

この面の大きさは橋梁の寸法に比べて小さいので，これを無視するわけです．同じ足の裏でも，人間が乗ったボールの変形や力の作用を分析しようとする場合には，ボールの上に乗った人間の荷重を集中荷重で置き換えることは妥当ではないでしょう．あくまで取り扱う構造物との相対的な大小関係で決まってくる理想化です．

2.11.　　分布荷重の集中荷重による置換

分布荷重はいわば多数の集中荷重の集まりとみなすことができます．ですから構造物を剛体と見なしてよい範囲では, 2.6 及び 2.7 で述べた方法を用いれば一つの集中荷重に置換することが可能です．今，分布する荷重の強さが座標 x による変化する一般的な場合を考えます．この荷重強さを q(x)とします．この分布荷重と等価な力とは，大きさが分布力の総和に等しく，モーメント作用が同じ荷重のことをいいます．0 点回りの分布荷重のモーメントは，幅Δｘの区間に作用する力 q(x)Δｘにそこまでの距離ｘを乗じたものを積分することで求まります．

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x)xdx$$

これに対して置換する力の位置を xg とすると，これの 0 点回りのモーメントは Pxg となります．

$$P = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

ですから，結局

$$x_g = \int_{x_1}^{x_2} q(x)xdx \Big/ P = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

となります．この式は q(x)のグラフと x 軸で囲まれた面積の重心を求める式になって，次のことが言えます.「剛体のつり合いを検討する場合には，分布荷重は，分布形状をあらわす図形の重心位置に作用する，荷重の総和に等しい大きさの集中荷重がに置換することができる．」

2.12.　　荷重の反作用としての反力

土木構造物のほとんどは地球の表面近くに静止していると述べました. 地球上に静止しているということは, 構造物と地球は何らかの意味で接触しているわけですから，接触している場所で作用・反作用を生じているはずです．最も簡単には, 質量のある物体は重力加速度を地球から受けますから引張られます. その他に地震，風，自動車，列車など多様な原因によって構造物は作用を受けます．一方，その構造物は地球と接しているわけですから，作用反作用の法則により，この接している場所で地球は構造物を押し戻します．この押し戻す力を反力といいます. 反力は地球などの構造物から見れば外部から構造物になされる作用ですから外力の一種であるといえます．したがって，これらの荷重と反力がつり合うことを条件として，反力が求まることになります.

3．棒の荷重，反力，内力，応力

3.1. 軸力のみを受ける部材

構造物あるいはそれを構成する構造部材・構造部分はその目的に応じて種々の形態をとる．そのなかで，最も簡単なものは一次元の棒であろう．二次元の平らな板，曲がった板，あるいは 3 次元の物体に比べて，その挙動は単純であることは容易に想像がつく．細長い棒も実体としては 3 次元の物体であることに変わりはないが，その断面の寸法が長さに比べて十分小さいと，以下のような仮定が成り立ち，解析は容易になる．

- 棒は真直ぐである
- 断面は均一である
- 均質な材料でできている

このような棒にその軸方向のみに力が作用すると，棒 は伸びたり縮んだりするが，横から曲げられたり，あるいはねじられたりする場合に比べて，力学的挙動はさらに簡単になる．

ただし，荷重は断面の図心に作用し，圧縮荷重を受けても座屈しないものとする．この条件を満たさないと，棒の軸と平行に力が作用しても棒は曲げられることになるからである．

本章では，このような最も簡単な構造力学問題として一様でまっすぐな棒に引張あるいは圧縮力のみが作用する場合を対象として，構造物が荷重を受けた場合に把握されなければならない力学量の間の関係を説明する．これらの関係は，対象とする構造物がより複雑になった場合に対しても個別の関係式などは異なるものの一般化できるものである．

3.2. 荷重と反力

図 2-1 に示すように，棒 AB の一端が壁に固定されている状態を考えよう．実際

には棒には質量があり，重力場では重力加速度を受けるので棒はそれによって曲げられるが，ここでは質量は無視することとする．B 点には，大きさ P の荷重が作用している．この作用の下でこの棒が壊れることなく壁にくっついた状態を保つとすると，この構造物の加速度はゼロであることになる．この場合，考える加速度の方向は水平方向のみである．運動の第 2 法則より，加速度がゼロであるということは，水平方向に作用している力の総和がゼロであることを意味する．ところで，この構造物すなわち棒に作用している力は荷重 P である．しかし，もしそれだけならば，水平方向作用している力の総和がゼロにはならない．それでは，P の他にいかなる力が作用しているのだろうか．この力は，この構造物を支えている壁からこの構造物に伝わるのである．今仮に，その力を R と名付け，水平方向に作用している力の総和がゼロでなければならないという条件を式で表せば，R+P=0 となり，R=-p（左向き）となる．すなわち，荷重 P と同じ大きさで逆向きに壁から力を受けて，この構造物は静止状態を保っているのである．このように，荷重などの作用に応答する形で，構造物を支えている部分に作用する力を反力という．今,荷重 P が大きければ反力 R も大きくなり，荷重が小さければ反力もそれに応じて小さくなる．反力は構造物が構造物を支える外界から構造物に作用する力である．また，荷重とはまさに外的作用であるから，これらの荷重と反力は共に外力と呼ばれる．同じ外力であるが，荷重は能動的に作用するのに対して，反力は受動的に作用するという相違がある．

3.3. 外力と内力

棒 AB は，荷重 P という外的作用を受けて，これに対応した外的作用としての反力を受けて静止状態を保っている．棒の両端で P という大きさの力が作用していることになる．もともとの原因は荷重 P の作用であるが，これが反力 R を生じるためには, B から A にその力が伝達されていなければならないが，はたしてどのように伝達されているのかはこのままこの棒を眺めていても分からない．われわれは，物体の中に何があるのか，中で何が起きているのか知りたいときどうするでしょうか？饅頭の中身がコシあんかツブあんか知りたいとき，割って中身を見る

でしょう．部屋に何があるのか知りたいときはドアを開けてなか覗きます．それと同じことをやればこの棒の中身を知ることができでしょう．そこで，この棒を適当な断面 C で切断してみましょう．切断するとこの棒は部材 AC と部材 CB に分けられたことになります．さて，この状態ではまだ，切断した断面で何が生じているかは分かりません．ですが，この切断された各部材も静止していなければならないことは事実です．もちろん，実際にはさみかのこぎりで切断すればCB 部分は飛んでいってしまいますが，今はあくまで仮想的に切断したのであって，実際の切断とは区別しなければなりません．CB 部材が飛んでいかないためには何が必要でしょうか．先ほど反力を求める際にやったのと同じように，水平方向作用している力の総和がゼロでなければならないとすれば，断面は左向きに P の力で引張られている必要があります．また AC 部材も同様で，断面で右向きの力 P で引張られている必要があります．つまり，この断面ではお互いに P という大きさが等しく方向が逆の力を互いに及ぼしあっていなければ，それぞれの部材は静止していられないということになります．

ここで描いた図は，自由物体図と呼ばれるものです．自由物体図とは，構造物のある部分を，その他の部分から自由に切り離し，その切り離した部分に作用する可能性のある力をすべて作用させた図です．この図のつり合いから，構造物に作用する力の関係を導くことができる，きわめて重要な概念です．

さて，これらの力の原因は何でしょうか？これは部材が C 点で実際にはつながっていて，その位置で切断しないように分子間結合の力が作用していることによるのです．そしてこの分子間結合の力が断面全体について合計すると P になっているわけです．したがって，実体としては分子間結合の力が分布しているわけですけれども，取り扱いはそれを合計した力がこの断面に作用しているとしたほうが簡単そうです．このように物体の内部に作用する力を一般に内力といいますが，ある仮想断面に作用するとみなされる力を特に断面力といいます．

3.4. 断面力と応力

断面力が求まり，これによってどのような力が棒の中を伝わっていると考えら

れるかを知ることができました．さてここで，この棒の断面の大きさと，この棒に生じる現象の関係を考えてみましょう．

いま，仮に直径 1㎝ 及び 2㎝ の同じ材質の棒であるとしましょう．今までの考察から，これらの棒には大きさ P の断面力が作用していることになります．しかし実際には，断面力というものの実体はその断面に分布する力の総和なのであり，この総和が等しくとも，分布している力の大きさは断面が大きいほど小さくなるのは当然でしょう．今，この分布が断面内に均一であるとすれば，分布する力の大きさは P/A により求まることになります．この単位面積あたりの力を応力度あるいは応力といいます．いま，荷重 30kN を受ける断面積 10㎠ の棒と，荷重 40kN を受ける断面積 20㎠ の棒とではどちらがより危険かを考えてみます．荷重の大きさでいえば後者の方が大きいのですが，応力で比較すれば前者の方が大きくなります．物体の強度というものは応力で決まるので，前者の方がより危険であるといえます．したがって，断面力を求める目的は，それに対応する応力を求めることにあるといえます．この際に必要になるのが断面の特性で，今の場合には断面積がそれに相当します．

3.5. 設計方法

さて，それではある断面積を持つ棒に軸方向に荷重が作用しているときに，この棒が安全に使用されるよう設計することを考えましょう．通常，どのような材料でもそこまでの応力になら耐えられるという限界の応力があります．この限界の応力を σcr と呼ぶことにします．通常，荷重の強度，材料の性質，構造物の形状の誤差などなど，種々の不確定な要素があるため，この限界応力が作用するまで使用することはしません．設計時の応力はこの限界応力を 1 より大きい係数で除した値を設計応力とし，これを設計における限界の応力とします．

したがって，設計式は以下のようになります．

$\sigma = P/A < \sigma cr/m$

⌗ 部材寸法を決定する場合．

既知：外力，材料（すなわち設計応力），安全係数

未知：断面形状または断面積

許される荷重の大きさを決定する場合

既知：材料（すなわち設計応力），安全係数，断面形状または断面積

未知：外力

使用材料を決定する場合

既知：外力，断面形状または断面積，安全係数

未知：材料（すなわち設計応力）

3.6. まとめ

4.　静定構造の反力

本章では，二次元静定構造物の反力を求める方法を述べる．

4.1. 支点と反力

荷重とまったく同様に，反力もまた面的に作用します．しかし，この場合にも，反力の分布がある小さな面積に限定されている場合には，点で構造物を支えているものとします．このような支えを支点といいます．面によって構造物を支えると見なすべき問題もありますが，これは本書の範囲を超えています．

支点がすべて点に作用するものとすれば，点に作用する反力は，力または偶力モーメントになります．二次元構造物の場合には，力は二方向あり得ます．また偶力は二次元面内の回転のみとなります．このような反力で支えられるような構造として以下の３種類の支点があります．

- 固定支点　　二次元のどの方向にも移動せず，回転も生じないように完全固定する支点．固定すれば荷重の作用によってはその方向に反力が生じ得ます．反力としてはある方向の力とモーメント反力になります．ですが，反力は鉛直反力と水平反力に分解して方向の定まった反力として扱います．
- ヒンジ支点　　二次元のどの方向にも移動しない支点．回転は自由．反力成分は 2 方向の移動のみとなります．反力としてはある方向の力のみとなりますが，固定支点の場合と同様に，通常鉛直反力および水平反力に分解して扱います．
- ローラー支点　　1 方向にのみ移動でき，しかも回転も自由である支点．移動できる方向と直角な方向にのみ拘束され,その方向の反力が生じ得る．反力成分は自由に移動できる方向に対する鉛直反力となります．
- 中間ヒンジ　　構造部材同士を連結する方式で，回転を伝えない．伝達される力はある方向の力ですか，鉛直反力と水平反力に分解して方向の定まった伝達力として扱うこともできます．

平面構造物の場合，自由度は３であり，つり合い条件式の数は３でした．３つの式から

求まる未知数は３です．ここで未知数とは，荷重に対応して作用する反力ですから，反力の成分が全部で３となる構造にすれば，つり合い条件のみから支点反力のすべての成分を求めることができます．上記のように，固定支点は３，ヒンジ支点は２，ローラー支点は１の反力成分を持ちます．したがって，固定支点１つ，またはヒンジ支点とローラー支点の組み合わせで，構造物を形成すれば，すべての反力成分がつり合い式のみから求められます．このような構造物を静定構造物といいます．静力学的に解ける構造物という意味です．

4.2. 静定と不静定，安定と不安定

　さて，それでは図のような構造物はどうでしょうか．図の例は反力の成分数が３に達していません．この場合，構造物は自由度３を拘束することができないので，構造物として静止していることができません．また図の例では反力成分数は３あるのですが，水平方向にどこでも拘束していないため，水平方向に力を受けると加速度を生じてしまい静止することができません．このように外力が作用した状態で静止の状態を保てない構造物を不安定な構造物という．ですから，反力成分が３以上あってどの方向にも自由に移動できない構造物は安定な構造物といわれます．

　逆に，反力の数が３を超えている場合にはつり合い条件数が３しかありませんので反力をつり合い条件のみから決定することができません．しかしこの場合には構造物はその機能を保てないわけではなく，何らかの他の条件が追加されれば反力も求めることができます．このようにつり合い条件で定まる以上の反力成分をもつ構造物を不静定構造物といいます．静定構造物も不静定構造物も安定な構造物です．本書では○章までは静定構造物のみを扱い，○章以降で不静定構造物にまで対象を広げます，

4.3. 反力の求め方

　まず，符号を取り決めておく．本書では特に断らない限り，鉛直反力成分は上向きを，水平反力成分は右向きを，モーメント反力成分は時計回りを正とします．それぞれ R,H,Mr と表し，複数ある場合には支点を区別して RA,HA,MRA とかくことにします．

またつり合い式を記述する際には，以下のような記号を用いることにします．これは計算仮定での誤りをなくするための記法です．

上向きの鉛直成分の力の和がゼロ $\sum V \uparrow = 0$

右向きの水平成分の力の和がゼロ $\sum \vec{H} = 0$

点 X の時計回りのモーメントの和がゼロ $\sum M_x \cap = 0$

反力の成分が３つある基本的な構造について，反力の求め方をまとめます．

- すべての反力成分を矢印で記し，これらに記号をつける．
- 分布荷重がある場合には等価な集中荷重に置換する．
- つり合い３条件を式で表す．この際,モーメントのつり合い条件は任意の点で取ってよい．また二つの点でモーメントのつり合いをとっても良いが，独立な式はあくまで３式であって，その他は計算の確認に用いることとする．
- 反力について解いてすべての反力が求まる．

4.4. 基本的な梁の反力

固定支点１つ，またはヒンジ支点とローラー支点の組み合わせが基本的な静定構造であると述べました．前者は一端が固定支点で他端が拘束のない自由端であり，このような形式の梁を片持ち梁といいます．また一端ヒンジ支点で他端はローラー支点のはりを単純梁といいます．またこの支持形式を単純支持と呼ぶこともあります．本節では片持ち梁および単純梁およびその変形としての張り出し梁について反力の求め方を述べます．

4.4.1. 単純梁の反力

ヒンジ支点で 2 成分，ローラー支点で１成分の反力を生じます．荷重に水平成分がある場合には水平力のつり合いが必要になります．水平成分の力はどの点の回りにもモーメントを持ちませんので必須となります．鉛直反力を求めるには，鉛直方向のつりあい,A 点回

りのモーメントのつりあい，B 点回りのモーメントのつりあいのうち，ふたつを用います．A 点回りのモーメントの式には A 点の反力が，B 点回りのモーメントの式には B 点の反力が未知数として含まれませんので，鉛直反力を直接求めることができます．鉛直方向のつりあい式は計算のチェックに使うといいでしょう．

例題

4.4.2. 片持ち梁

固定支点で反力 2 成分およびモーメント反力を生じます．固定点回りのモーメントを取れば，未知数は反力モーメントのみとなります．あとは鉛直力および水平力のつり合いを取ればいいでしょう．

例題

4.4.3. 張り出し梁

単純梁の両側または片側に梁が張り出している形式です．この場合も，単純梁の場合とまったく同様にして反力が求まります．ただし，張り出し部に載荷された荷重のモーメントの向きに注意しましょう．さらに，この問題では偶力モーメントが荷重として作用しています．偶力モーメントの作用は，物体のすべての位置に対して同じ作用を持つことに注意してください．

4.4.4. その他の形状の構造

上記の例で，反力計算に用いたのは荷重の大きさと作用線の位置だけでした．静定構造物の反力を求める場合，構造物の形状は関係しないのです．もちろんこれは構造物が一つの剛体と見なせる場合のはなしです．本節では，練習もかねて基本的な梁以外の形状の構造物の反力を求めて見ます．手順にまったく差のないことがお分かりいただけると思います．

例題

5.　トラスの部材力

5.1. トラスとはどんな構造

図のように２本の棒の端部同士をつなげてＬ字型の部材を作ったとしましょう．接続個所をがっちりと固定させその角度が変化しないようにすれば，図のようにこれに錘をぶら下げることができます．このように，部材をその交差角度が変化しないようにつなげることを剛節といい，このように連結されてできた構造物を剛節構造あるいはラーメンといいます．

これに対して，剛節にする代わりに残りの端部の間にもう１本の部材を挿入して３角形を構成すると，この３角形はかたちを変えることができないので,やはり図のように荷重に耐えることができます．このように，部材をその交差角度は変化してもいいようにつなげることを滑節（ピン結合）といい，構造物を滑節構造またはトラスといいます．このような３角形を単位として図のように組み合わせると構造物を構成することができます．ただし，トラス構造では以下の仮定をします．

- 外力はすべて節点のみに作用する．
- 部材はすべて直線
- 部材の接合はピン接合

このように仮定すると，トラスの各部材には部材軸方向に引張力あるいは圧縮力のみが作用し，曲げは作用しません．曲げに抵抗しなくて良いために，各部材の断面は曲げを受ける部材に比べて細くなります．しかし，構造全体でみれば，図のように曲げに抵抗できる梁と同等の性能を持つことができます．

実際の構造物では，自重が部材自体に分布して作用します．また風は部材の表面に作用するし,地震時には慣性力が質量に分布して作用します．しかし，通常これらの荷重も節点に作用するものと見なして設計しても大きな影響のないことが確認されている．また，部材の接合についても今日では剛節とすることが多いが，これについては，二次応力の影響として必要な場合のみ検討するのが通常です．

5.2. 不安定なトラス，不静定トラス

　求めるべき未知数と得られるつり合い条件数からトラス構造の安定・不安定，静定・不静定を考えましょう.

　いま，全トラス部材数をm，節点数をｊ，反力成分数をｒとします．この場合未知数は未知反力数と未知部材力数ですからm＋ｒになります．これに対して，外力及び部材力がすべて節点に作用しますから，それらの節点で二次元なら水平鉛直の２方向のつり合い条件が立てられます．モーメントのつり合いを考えないのは，部材は曲げを伝えないので節点のつり合いには入ってきません．したがって条件数は２ｊになります．ですから，$m+r-2j=0$ならば，安定かつ静定なトラストなり得ます．図に安定かつ静定なトラスの例を示します．ただしこれは必要条件であって，この条件を満たしても図のように不安定なトラスになることがあります.

　また，$m+r-2j>0$のとき，不静定なトラスとなり得ます．ｒが３の場合には内的不静定トラスですし，$r>3$なら外的不静定トラスになります．ただし，これもやはり必要条件であって，この条件を満たしても図のように不安定なトラスになることがあります.

すなわち

$m+r-2j<0$	不安定トラス
$m+r-2j=0$	静定トラス
$m+r-2j>0$	不静定トラス
$r=3$	内的不静定トラス
$r>3$	外的不静定トラス

ただし，下の２式は必要条件です.

5.3. 部材力を求める

　４章で学習した方法で，トラスの支点反力は求まりますので，本節では，静定トラスの部材力を求める方法を学習します．これには，断面法と節点法があります.

5.3.1.断面法

断面法とは，部材力を求めたい部材を含むいくつかの部材を仮想的な切断線で切断し，それによってできる自由物体のつり合いから部材力を求める方法です．平面トラスで複数の節点に作用する力のつり合い条件数は３つです．したがって，３つ以下の未知部材力が含まれるように切断すれば解けることになります．

この方法では，上記の条件を満足すればいかなる位置の部材力も直接求めることができるので，基本トラスがたくさんある場合に特定の部材力のみを求めたい場合に用いられます．

断面法では以下に示す二つの方法を併用して部材力を求めます．

5.3.2.力分解法

切断により現れる部材力を鉛直成分と水平成分に分解する方法が力分解法です．

まず，すべての部材力を水平成分と鉛直成分に分解します．そして，水平あるいは鉛直方向のつり合いを考えるわけですが，この場合,図のようにもし鉛直成分をふくむ部材がただ一つならば，簡単にその部材力は外力とのつり合いから求まります．

斜材の部材力は梁の場合のせん断力に相当することから，トラス全体を梁とみなしたときのせん断力を斜材の水平からの斜角の正弦で除すことで求まります．また，この仮想的な梁を置換梁といいます．

$$N_d = \pm \frac{S_k}{\sin q_d}$$

N_d ：求めたい部材力

S_k ：置換梁の交点ｋにおけるせん断力

q_d ：部材ｄの水平線から斜角

右辺の符号は，斜材が右上がりの場合に負，右下がりの場合に正となります．

5.3.3. モーメント法

二つの部材力作用線の交点でモーメントのつり合いをとり，残りの部材力を求める方法をモーメント法といいます．

3 つの部材力のうち求めたい部材力以外の部材の交点を求めます．そしてこの交点の周りのモーメントをとると，求めたい部材力と外力に関するモーメントのみが残ります．そして，この外力に関するモーメントの総和は，じつは設定したモーメントの中心における置換梁の曲げモーメントに等しくなっています．ですから，結局求めたい部材力は，以下のように求まります．

$$N_c = \pm \frac{M_k}{r_{kc}}$$

N_c：求めたい部材力

M_k：置換梁の交点 k における曲げモーメント

r_{kc}：部材 1 の作用線から交点 k への垂直距離．

右辺の符号は，これの k 点回りのモーメントが正ならは負，モーメントが負ならば正となります．

例題

5.3.4. 節点法

節点法とは，部材力を求めたい部材の接合している節点に繋がる部材をすべて切断し，それによってできる自由物体図のつり合いから部材力を求める方法です．この自由物体図に含まれる力の作用線はすべて同じ節点を通りますから，つりあい条件数は２つです．モーメントに関するつり合いははじめから成立しているわけです．したがって，２つ以下の未知部材力を含むように切断する節点を選択して，順次解いてゆきます．

この方法では，部材力が未知の部材が３本以上つながる節点でのつり合いから部材力を直接求めることはできません．ワーレントラスの鉛直材と水平材が連結された節点のような場合には，この方法できわめて簡単に鉛直材の部材力が求まります．通常は２部材のみを含む節点からはじめてすべての節点に対して順次つり合い条件を利用してゆきます．で

すから，一般的には特定の部材力のみを求めるには不向きといえます．

例題