

構造力学ノート

Part2

2001年4月1日

皆川 勝

1. 梁に作用する曲げモーメントとせん断力

1.1. 梁の自由物体図

3章では、細長い棒がその軸方向に力を受ける場合について、自由物体図を描いて、軸方向力が求まることを示した。それでは、同じような棒がその軸と直角方向に力を受けると、どのような作用を棒に及ぼすでしょうか。もちろん支えがなければ運動の法則にしたがって力の方向に加速度を持って運動をすることになりますが、ここでは、4章で学んだように適当な支承によって支えられ、この結果対応する反力を受けることとなります。そのような場合、梁の一部は運動をしないように支えているわけですから、棒は曲げられることとなります。このように、その軸と直角方向に力を受けて曲げられることにより外力に抵抗する構造部材を“梁”と呼びます。

軸方向に力を受ける棒の場合には、直感的にその軸方向の内力が作用する可能性のある唯一の断面力でした。それでは、梁の断面にはどのような断面力の作用する可能性があるのでしょうか？ 今、最も単純な形式の梁として単純梁を例に、梁の断面に作用する断面力を求めてみましょう。簡単のため、荷重は図のように梁と直角方向にのみ作用する場合を考えます。反力はそれぞれの支点でやはり軸と直角方向に作用します。

まず、断面力を求める場合にやることは自由物体図を描くことです。梁の軸方向と直角な断面で仮想的に切断してみます。そうすると当然梁はふたつに分割されます。そして、その断面には何らかの断面力が作用してそれと外力がつり合うことで自由物体は静止していると考えられるわけですね。外力はすべて鉛直方向に作用していますから、まず、鉛直方向のつり合いを考えてみましょう。鉛直方向の外力は荷重と反力ですが、それらを合計してもゼロにはなりません。したがって、鉛直方向に作用する力の合計がゼロになるためには断面に鉛直方向の力が

断面力として作用していなければならないこととなります。特別の場合としてたまたまこの自由物体に作用する荷重と反力がちょうど同じ大きさを鉛直方向の断面力が作用しなくともつり合うことがあります。しかし、ここで強調したいのは数値がゼロである場合も含めてそのような力が作用する可能性があるということです。さらに、この力は左側の自由物体と右側の自由物体では、大きさが等しく逆向きの力になっています。また、モーメントのつり合いが成り立つためには、同じ断面に何らかのモーメントと同じ作用を持つ断面力が作用する可能性があります。より一般的に荷重に水平方向の成分がある場合には軸方向力も作用する可能性があります。ですから、より一般的には断面には断面に垂直な断面力、断面に平行な断面力、そしてモーメントの次元をもつ断面力が作用し得ることにあります。ですからこれらの3成分をすべて記述することにより梁の自由物体図ができあがります。

1.2. せん断力の求め方

断面に平行な方向の断面力をせん断力と呼びます。これは、断面がずれることに抵抗するために生じる断面力であり、左右の自由物体が本当はくっついており、お互いが上下にずれるのに抵抗していることによって生じている作用です。

この断面力は、左側の自由物体と右側の自由物体では、大きさが等しく逆向きの力になっていますので、正負の取り決めをしておかなければなりません。通常、断面が、右下がり・左上がりにずれるように作用するせん断力を正と定義しています。

鉛直方向の力のつり合いを考えることでせん断力の大きさを求めることができます。左右のどちらの自由物体図を用いてもせん断力を求めることができます。

断面の左側の自由物体図を用いて求める場合には、ある断面でのせん断力の大きさは、その断面より左側に作用する上向きの力の総和であるといえます。逆に、断面の右側の自由物体図を用いて求める場合には、同じ断面でのせん断力の大きさは、その断面より右側に作用する下向きの力の総和になります。どちらから求めてもまったく同じせん断力が求められますが、慣れるまでは、断面より左側に作

用する上向きの力の総和がせん断力であるとしておくのが無難でしょう。

1.3. 曲げモーメントの求め方

モーメントと同じ作用を持つ断面力は曲げモーメントと呼ばれます。これは、梁の軸を曲げることに抵抗するために生じる断面力であり、左右の自由物体が本当はくっついており、お互いが凸または凹に曲げられることに抵抗していることによって生じている作用です。

曲げモーメントもせん断力と同様に、左側の自由物体と右側の自由物体では、大きさが等しく逆向きになっていますので、正負の取り決めをしておかなければなりません。通常、梁の軸が、下方向に凸になるように作用する曲げモーメントを正と定義しています。

回転のつり合いを考えることで曲げモーメントの大きさを求めることができます。左右のどちらの自由物体図を用いてもこれを求めることができます。

断面の左側の自由物体図を用いて求める場合には、ある断面での曲げモーメントの大きさは、その断面より左側に作用する力によるその断面回りの時計回りのモーメントの総和であるといえます。また、断面の右側の自由物体図を用いて求める場合には、同じ断面での曲げモーメントの大きさは、その断面より右側に作用する力によるその断面回りの反時計回りのモーメントの総和になります。どちらから求めてもまったく同じ曲げモーメントが求まりますが、慣れるまでは、断面より左側に作用する力の時計回りのモーメントの総和が曲げモーメントであるとしておくのが無難でしょう。

1.4. 分布荷重の扱い方

分布荷重が作用するときには、どのようにせん断力や曲げモーメントを求めればよいのでしょうか？大きく分けて、分布荷重の作用している断面で求める場合と、それ以外の断面で求める場合があります。前者の場合には、自由物体図にそれ

それぞれの荷重をすべて載荷させておいて、その分布荷重を重心に作用するひとつの集中荷重に置き換えます。また、後者の場合には左右どちらかの自由物体図に分布荷重がすべて載荷されることとなりますので、それを前者の場合と同様に、重心に作用するひとつの集中荷重に置き換えます。これらによって分布荷重が作用する場合にも上記の方法でせん断力や曲げモーメントが求められます。

1.5. S.F.D.の描き方(1)

ある断面に作用するせん断力の求め方が分かりましたが、これが梁の各位置においてどのように変化するかを知ることは重要です。そのために、どのような断面でせん断力を求めればいいのでしょうか？これまでの考察から、ある断面の左側に作用する鉛直外力の総和がせん断力ですから、荷重が作用する点の左右でせん断力は変化するでしょう。また、分布荷重が作用する場合にはその始点、終点も押えておく必要があります。また、当然ですが支点では反力が生じますから支点の左右でせん断力は変化します。したがって、集中荷重作用点、分布荷重の始点と終点、支点のいずれかでは含まれた範囲で、位置の関数としてせん断力を求める必要があります。そしてその位置の関数としてせん断力の大きさを図示したものをせん断力図(Shearing Force Diagrams, 以後略してS.F.D.)といいます。伝統的に、S.F.D.は上側を正で描くように記述した教科書が多いですが、ここでは、下のB.M.D.と併せて下側を正で描くことにします。これは、後述の荷重と断面力の微分・積分関係からこれらの図を描くのに役立ちます。

1.6. B.M.D.の描き方(1)

ある断面に作用する曲げモーメントの求め方が分かりましたが、これが梁の各位置においてどのように変化するかを知ることは重要です。そのために、どのような断面で曲げモーメントを求めればいいのでしょうか？これまでの考察から、せん断力の場合とまったく同様に、集中荷重作用点、分布荷重の始点と終点、支点のいずれかでは含まれた範囲で、位置の関数として曲げモーメントを求める必

要があります。そしてその位置の関数として曲げモーメントの大きさを図示したものを曲げモーメント図 (Bending Moment Diagrams, 以後略して B.M.D.) といいます。B.M.D. は上述のように下側を正で描きます。これは、正の曲げモーメントが下に凸の曲げ変形に対応しており、その際の変形方向が、B.M.D. の方向と一致するからです。

1.7. 単純梁，片持ち梁，張り出し梁

それでは、いくつかの例題を解いてみましょう。

1.8. 断面力と外力の微分関係

曲げモーメントやせん断力は、外力としての荷重や反力を受ける梁に生じる応答であるので、それらの間には何らかの関係が存在するはずである。本節ではその関係を導きます。ここで、荷重には集中荷重、分布荷重、集中モーメントがあるが、集中荷重は一種の理想化された荷重であって、一般には力は分布して作用すること、逆に分布荷重の特殊な場合として集中荷重は扱うことができます。また、集中モーメントは、それ自身回転作用を与える外力であり、他とは区別して扱わなければなりません。そこで、本節では一般的な分布荷重が作用している状態を考え、その荷重作用によって、せん断力や曲げモーメントがどのように変化するかを分析することによって、分布荷重、せん断力、曲げモーメントの間の微分関係を導きます。

梁の位置を右向きの座標 x で表し、荷重は下向きを正とする。そして、梁の座標 x から幅 Δx の部分を取り出して、その自由物体図を描いたのが図です。左側断面には時計回りの曲げモーメント M 、上向きのせん断力 S が、右側の断面には反時計回りの曲げモーメント $M + \Delta M$ 、下向きのせん断力 $S + \Delta S$ が作用するものとします。ただし、 ΔM 、 ΔS は曲げモーメント及びせん断力の増分であり、その大きさは荷重の強さに関係するはずで

今、この自由物体図は静止しているわけですから、鉛直方向につり合っている、

言い換えれば、鉛直力の和はゼロでなければなりません。また、任意の点の回りのモーメントの和がゼロでなければなりません。そこで、左側断面上の 1 点の回りの時計回りのモーメントの和がゼロであるという条件を当てはめてみます。これらより、以下の 2 式が得られます。

を持つ量をふたつ持つ項は高次の微小項として無視し、両式を変形すると、

となります。すなわち、言葉で表せば以下のように種々に表現できます。

「曲げモーメントを座標で微分するとせん断力になり、せん断力を座標で微分して符号を変えると荷重の強さとなる。」

「荷重強度を座標で積分して符号を変えるとせん断力の変化量になり、せん断力を座標で積分すると曲げモーメントの変化量になる。」

「B.M.D.の勾配はせん断力であり、S.F.D.の勾配の符号を変えたものが荷重の強さとなる。」

この関係は、梁の種類とか、形状にかかわらず成立する一般的な関係です。

1.9. 分布荷重を受ける場合の内力

分布荷重を受ける梁のせん断力、曲げモーメントを求める場合、前節で求めた関係はきわめて便利です。以下にいくつかの代表的な分布荷重について、せん断力や曲げモーメントがどのようになるかを、上記の関係をを用いて考えてみましょう。

まず、一般的には、積分とはその関数曲線の下での面積ですから、

「荷重図のある区間での面積の符号を変えるとその区間のせん断力の変化量になり、S.F.D.のその区間での面積はその区間での曲げモーメントの変化量になる。」

と言い換えることができます。ですから分布荷重の始まる点でのせん断力や曲げモーメントが分かっているならば、面積計算で簡単に分布荷重の終点でのそれらの値が計算できることとなります。

1.9.1. 荷重を受けない区間

荷重を受けない区間での荷重の強さはゼロですから、その区間でのせん断力の勾配はゼロ、つまり一定になります。また、せん断力が一定ということは、B.M.D.の勾配が一定ということですから、B.M.D.は直線となります。

1.9.2. 等分布荷重

等分布荷重とは荷重の強さ $q = \text{一定}$ ということですから、これを積分すれば一次式になりますから、S.F.D.は直線であることが分かります。また、このせん断力を積分すれば二次式ですから B.M.D.は放物線を描くこととなります。また、放物線となる場合に、上に凸か、下に凸かは、S.F.D.から分かります。もし、せん断力の値が x と共に減少していれば、せん断力の減少とはすなわち B.M.D.の勾配の減少ですから、勾配が x と共に減少する下に凸の関数となります。逆に、せん断力の値が x と共に増加していれば、せん断力の増加とはすなわち B.M.D.の勾配の増加ですから、勾配が x と共に増加する上に凸の関数となります。

1.9.3. 等変分布荷重

等変分布荷重、すなわち三角形分布荷重とは q が一次式ということですから、これを積分すれば二次式になりますから、S.F.D.は放物線であることが分かります。また、このせん断力を積分すれば三次式ですから B.M.D.は三次曲線を描くこととなります。また、S.F.D.の放物線が、上に凸か、下に凸かは、等分布荷重の場合の B.M.D.の場合とまったくに分かります。荷重強度が x と共に減少していれば、S.F.D.の勾配が増加していることとなりますから、勾配が x と共に増加する上に凸の関数となります。逆に、荷重強度が x と共に増加していれば、S.F.D.の勾配が減少しますから、勾配が x と共に減少する下に凸の関数となります。

B.M.D.については、少々複雑ですが、いくつかの例を図に示します。読者は荷重図の値から S.F.D.の勾配が決まり、せん断力の値から B.M.D.の勾配が決まるこ

とから、それぞれの図の概略は描けることを理解して下さい。

1.10. 集中力を受ける場合の内力

集中力とは載荷面積が小さいことからある点に集中して作用すると見なせる荷重であることは 2 節で触れました。したがって、図に示すように、ある強さの分布荷重の載荷幅を次第に小さくして、その極限として集中荷重を考えれば、

せん断力と荷重の強さの関係式において、 $q dx$ を集中荷重と見なせることになります。したがって、集中荷重は、せん断力の変化量に符号をつけたものに等しいことになります。つまり、下向き（すなわち正の）集中荷重を受けるとその大きさだけせん断力は急激に減少し、上向き（すなわち負の）集中荷重を受けるとその大きさだけせん断力は急激に増加することになります。

せん断力さえ求めれば、それから B.M.D. を求めるプロセスは分布荷重の場合とまったく同じです。ただし、B.M.D. の特徴としては、集中荷重が作用する点において、せん断力が急激に変化するわけですから、B.M.D. の勾配がその分だけ急激に変化して、折れ曲がることになります。

1.11. 集中モーメントを受ける場合の内力

集中モーメント M^* を荷重として受ける場合について、図のように、それが作用する梁の一部分について自由物体図のつり合いを考えます。左側断面で曲げモーメント M を受け、そこから x だけ離れた点で曲げモーメント $M + M$ を受けているものとします。この自由物体図のモーメントのつり合いを取れば、 $M = M^*$ となります。したがって、時計回りの集中モーメントを受ける場合、その位置において曲げモーメントはその値だけ急激に増加し、逆に、反時計回りの集中モーメントを受ける場合、その位置において曲げモーメントはその値だけ急激に減少します。 M^* が鉛直方向のつりあいに影響しないことは明らかですから、集中モーメントが荷重として作用してもせん断力には別段変化現れません。

1.12. 曲げモーメントの極大値

曲げモーメントがどの位置で極値をとるかをすることは、それが場合によっては最大曲げモーメントを求めることになるために重要です。このためにも上記のせん断力と曲げモーメントの微分・積分関係が用いられます。すなわち、せん断力の値に符号をつけると曲げモーメントの勾配になることから、せん断力がゼロになる位置で、曲げモーメントは極値をとることが分かるのです。せん断力がゼロになるのは、集中荷重の作用する位置か、または分布荷重が作用している範囲になります。集中荷重が作用する位置でせん断力がゼロになる場合というのは、正確には、その位置でのせん断力が正の値と負の値を持つということであって、集中荷重によってせん断力が急激に変化することによります。この場合には、その点で曲げモーメントはピークを持つわけですから、その位置は集中荷重の位置と一致するわけです。問題は、分布荷重が作用している範囲のある位置でせん断力がゼロになる場合です。この場合には、通常、荷重図を用います。

1.13. S.F.D. と B.M.D. の描き方(2)

以上のように、荷重強度、せん断力、曲げモーメントの間の微分・積分関係はきわめて重要であり、かつ本質的にはこの微分・積分関係を解くことにより梁の断面力は求まります。それでは描き方を整理して以下に示します。ただし、外力には荷重と反力が含まれることを思い出しましょう。

〔S.F.D.の描き方〕

- まず、梁の左端から描き始めます。
- S.F.D.の次数は（荷重図の次数 + 1）です。
- 下向き（上向き）の外力が作用するとS.F.D.は減少（増加）します。
- 外力が作用していない区間ではS.F.D.は一定（つまりゼロ次）です。
- 下向き（上向き）の集中外力が作用すると、S.F.D.はその大きさだけ急激に減少（増加）します。

■ 等分布荷重（つまりゼロ次）が作用している区間では，S.F.D.は直線（つまり一次）となります．この直線の勾配は，荷重強度に符号をつけたものです．

■ 等変分布荷重（つまり一次）が作用している区間では，S.F.D.は放物線（つまり二次）となります．この放物線の勾配は各位置でのせん断力となっています．

■ あるふたつの断面の間でのせん断力の変化量は，その間の荷重の総計，つまり荷重図の面積に符号をつけたものとなります．ただし，面積を算出する際には正負を考慮しなければなりません．

■ 集中モーメントが作用しても，その作用位置でS.F.D.に別段の変化はありません．

■ 上記の各ルールを用いて，梁の左端から右端までS.F.D.を描き，最終的にはゼロに戻って完成します．

[B.M.D.の描き方]

■ まず，梁の左端から描き始めます．

■ B.M.D.の次数は（S.F.D.の次数 + 1）です．

■ 下向き（上向き）の外力が作用するとB.M.D.は下に凸（上に凸）になります．

■ 外力が作用していない区間ではB.M.D.は直線（つまり一次）です．

■ 下向き（上向き）の集中外力が作用すると，B.M.D.はその大きさだけ折れ曲がります．その折れ曲がる角度は外力の大きさと同じです．

■ 等分布荷重（つまりゼロ次）が作用している区間では，B.M.D.は放物線（つまり二次）となります．

■ 等変分布荷重（つまり一次）が作用している区間では，B.M.D.は三次曲線となります．

■ あるふたつの断面の間での曲げモーメントの変化量は，その間のせん断力の総和，つまりS.F.D.のその間の面積となります．ただし，面積を算出する際には正負を考慮しなければなりません．

■ 時計回り（反時計回り）の集中モーメントが作用すると，その作用位置でB.M.D.はその値だけ急激に増加（減少）します．

上記の各ルールを用いて，梁の左端から右端までB.M.D.を描き，最終的にはゼロに戻って完成します．

この方法は、一見すると闇雲に上記のルールを暗記して描きなさいと言われていたように感じるかもしれませんが、決してそうではありません。これらのルールはすべて荷重・せん断力・曲げモーメントの間の微分・積分関係からきわめて容易に求まるものであって、つねにこの関係を意識しながら S.F.D. および B.M.D. を描くべきであることを述べていると理解してください。5.5 および 5.6 で述べた方法によっても S.F.D. および B.M.D. を描くことはできますが、例えば荷重が作用していないときには S.F.D. は一定で B.M.D. は直線であるということを知っている人は、計算するまでもないわけですね。楽をして描くことでまた誤りを減らすこともできます。いわば一石二鳥というわけです。ただし、後の学習で出てくるように、S.F.D. あるいは B.M.D. を座標の関数として式の形で求めなければならない場合があります。その場合には、もちろん本節の方法で図を描いてから関数形を求めることもできますが、5.5 および 5.6 で述べた方法で直接関数を求めたほうが簡単かもしれません。ただし、その場合にも、本節で示したルールによって得られた関数が妥当であるかのチェックは是非するべきだと思います。

それでは、この方法を用いて実際に S.F.D. および B.M.D. を描いてみましょう。

例題

1.14. 式を直接積分して S.F.D. および B.M.D. を求める方法

前節で述べた方法は、いわば微分・積分関係を具体的に図上での関係に置き換えたほうの方法です。別法として、曲げモーメントを 2 回微分すると荷重になるという関係を直接積分しても同じ解が得られます。いくつかの例題を示しておきますが、この方法は必ずしも一般的に用いられているわけではありません。

例題

1.15. ゲルバー梁

ゲルバー梁とは Heinrich Gerber というドイツ人の考案者の名前からきた梁の名称です。通常、張り出し梁の先端に他の梁を乗せた形式の梁をさします。例えば、図に示すように、中央に両端張り出し梁を配置して、その左右に単純梁を乗せたものや、左右に片側張り出し梁を配置して、その中央に単純梁を乗せたものが代表的なゲルバー梁です。そして、これらの張り出し梁はそれ自身で安定に荷重に耐えることができることから定着桁と呼ばれます。一方、その上に乗った単純梁は定着桁に支えられていることから吊り桁と呼ばれます。

梁と梁のつなぎ目ではモーメントを伝達しない構造となっており、そのため中間ヒンジでモデル化できます。図にそれぞれの梁をモデル図で示します。しかし、つなぎ目をヒンジであらわすと、これまで学習してきた基本的な梁に比べてなにやら複雑な梁のように感じますね。そこで、これまで学習してきた基本的な梁に関する知識を利用しやすいように、基本的な梁の組み合わせとしてモデル化することもできます。図はその例です。中間ヒンジでつなぎ目を表すのではなく、梁の上に別の梁が乗っている形で表現します。つなぎ目はヒンジで表現していませんが、モーメントを伝えず力のみを伝達するので、中間ヒンジとまったく同じ構造です。このようにすると、定着桁と吊り桁の関係が容易に理解できます。

ゲルバー梁はすべて静定梁ですので、ゲルバー梁全体も静定梁です。

ゲルバー梁を解く方法を説明します。ここでは、基本的な静定梁については解けるものとします。まず、図に示したように定着桁と吊り桁に区別して、定着桁の上に吊り桁が載った構造として描き直します。中間ヒンジで仮想的に切断します。この時、自身単独で静定梁となる部分が定着桁です。また、定着桁に支えられることによって安定になる桁が吊り桁です。ですから、図のように、定着桁は一つとは限りませんし、吊り桁の上にまた吊り桁が載る構造もありえます。慣れてくればこの手順は必ずしも必要ないかもしれません。

定着桁と吊り桁がはっきり区別できたら、一番上に位置する吊り桁から解析をはじめます。吊り桁の反力をまず求めましょう。これが求まったら、この吊り桁を支えている桁に反力と逆向きで同じ大きさの力を荷重として載荷します。この

ようにしてある桁が支えているすべての吊り桁からの力が分かったら、この桁の反力を求めます。このようにして、最後には定着桁の反力が求まって、反力計算は終了します。

次に、せん断力や曲げモーメントを求めます。すべての反力が求まってしまえば、あとは基本的な静定梁の場合とまったく同様の手順でこれらを求めることができます。この際、各定着桁、吊り桁毎にS.F.D.およびB.M.D.を描いてつなげる場合には、吊り桁からそれを支える定着桁（あるいは別の吊り桁）に伝達される力は反力として作用させておかなければなりません。それに対して、中間ヒンジを用いたモデルで図示しておく場合には、中間ヒンジで求められた力は外力として作用させてはなりません。この力はあくまで桁から桁に伝わる内力であって外力ではないからです。この場合、注意すべきは中間ヒンジでは曲げモーメントはゼロであること、および中間ヒンジでのせん断力はここでの伝達力に等しいことです。なお、中間ヒンジでせん断力図には変化はありません。なぜなら、ここでは外力は何ら作用していないからです。この点を誤解する人がかなり多いので注意してください。

以上のように、基本的な静定梁の解法を知っていれば、ゲルバー梁も解くことができるが、別の方法もあります。ゲルバー梁を一つの構造のまま解く方法です。この方法では、平面構造の釣り合い3条件のほかに、中間ヒンジで曲げモーメントがゼロであるという条件を用います。ゲルバー梁では、中間ヒンジの数だけ反力の数が増えています、その分だけ条件式が増えるので、解くことができます。この場合、中間ヒンジで曲げモーメントがゼロであるという条件はより具体的には、図の場合、中間ヒンジより左側あるいは右側に作用する外力のこの点回りのモーメントの総和がゼロであるという条件を使うことになります。

例題を通して解析法を確認します。

1.16. 重ね合わせの原理

重ね合わせの原理とは、線形の系について成り立つ原理で、以下のように定義すること

ができます。

重ね合わせの原理：

二つ以上の原因が同時に作用したとき、その効果が独立に知られていれば、それらが共に作用したときの効果は、その作用順序にかかわらず加算的。

ですから、構造力学の場合に当てはめれば、複数の荷重が作用したときの反力・断面力・応力・変形・変位などの応答は、それらの荷重が別個に作用したときの量の和となります。ですからS.F.D.やB.M.D.なども重ね合わせの原理を用いると、計算が簡略になります。

例題

2. 影響線パート 1

構造物にはその自重のように位置や大きさが定まった作用する荷重だけでなく、載荷位置が変化する荷重も作用することがあります。前者を死荷重、後者を活荷重と呼びます。例えば、道路に架かった橋梁には自動車重量が荷重として作用しますがその位置は時間と共に変化します。鉄道にかかる橋梁でも同じことが言えますね。このように移動する荷重を移動荷重といいます。

移動しない荷重に対して構造物を設計する場合には、その載荷位置が決まっているわけですから、定めなければいけないのは耐え得るあるいは耐えなければならない荷重の大きさです。一方、移動荷重の場合には、その前にどの位置に荷重があるときに最も構造物は危険な状態であるかを知らなければなりません。そのためには荷重の位置を少しずつ移動して多くのパターンの計算をしなくてはなりません。また載荷する荷重の個数が限定されない場合には問題はさらに複雑です。このような場合現代ではコンピュータを利用して高速に繰り返し計算をすることが多いわけですが、簡便に載荷すべき位置を決められることは依然として大切です。コンピュータの解析結果は原理あるいは理論を提供してくれるわけではありませんから。本章で学ぶ影響線も用いることによって、きわめて簡単に移動荷重の載荷すべき位置、その載荷位置に荷重があるときの応答を求めることができます。

2.1. 影響線とは何か

影響線とは、大きさが一の荷重（単位荷重という）の移動に伴って、着目点の着目量の値を、その単位荷重の載荷位置に縦距としてプロットした図です。

図に、2 径間連続梁の中央支点反力の影響線を示します。影響線は水平線から下側に正をとって示します。たとえば左端から x の位置での縦距 $z(x)$ は x の位置に単位荷重が作用したときの中央支点反力です。影響線から、どの位置に荷重があるときに支点反力が大きくなるかが一目瞭然で分かります。また、 $z(x)$ は荷重が 1.0 の時の値ですから、荷重の大きさが P ならば $P \cdot z(x)$ で x の位置に荷重 P が作用したときの反力が得られます。

集中荷重が複数作用しているときはどうでしょうか？重ね合わせの原理が成立する場合

には、荷重 P_1, P_2, \dots, P_n が作用したときの反力は重ね合わせの原理により以下の式で求められます。

次に、分布荷重が作用したときを考えてみましょう。ある位置 x をはさんで x の範囲にある強さ q の分布荷重の総和は $q \cdot x$ ですから、これを集中荷重と見なせば、この位置での影響線の縦距が $z(x)$ と $q \cdot x$ との積がこの区間の分布荷重により生じる反力となります。分布荷重は x_1 から x_2 の区間に作用していますから、これによる反力は重ね合わせの原理により、

となります。特に等分布荷重の場合には、荷重の強度 q が一定で積分の外に出ますから、

と簡単になります。すなわち、等分布荷重の強さに、その載荷範囲の影響線下の面積（以後、影響面積）を掛けたのが反力となります。

また、これら荷重がみ合わせて作用する場合にも、やはり重ね合わせの原理を用いることができますから、最終的に、次式により反力は求められます。

ここで、着目点での着目量とは、支点での反力のみでなく、ある断面のせん断力あるいは曲げモーメント、あるいはある点での変位などにすることもできますから、一旦影響線を描くことができれば、きわめて容易に複雑な荷重下での諸応答値を算出することができます。

2.2. 基本的な梁の反力の影響線

ここでは、基本的な梁の反力を例に、影響線の描き方を説明します。

2.2.1. 単純梁および張り出し梁

単純梁の左端から部材軸方向に x をとり、 x の位置に単位荷重が作用しているとき、つり合い条件から、

$$R_A = 1 - \frac{x}{l}, \quad R_B = \frac{x}{l}$$

となります。この関数をはりの下側を正としてプロットした図が R_A および R_B の影響線です。

単純梁の場合と同様に左側支点から座標 x をとって、 x の位置を左端 (x は負となる) から右端まで移動したときについても、反力は上式とまったく同じになることは容易に確認できます。ただし、この場合の x の範囲は $-a$ から $l+b$ までになります。このように、片持ち梁の反力の影響線は、単純梁の反力の影響線を張り出し部まで延長することで描かれます。 R_A の影響線が右側張り出し部で負になっていますが、これはこの範囲に荷重が作用すると、 A 点を持ち上げようとする作用が働き、それに抵抗するように A 点には下向きの反力が作用することを示しています。

2.2.2. 片持ち梁

左端を固定された片持ち梁の反力は以下ようになります。

$$R_A = 1, \quad M_A = -x$$

ここでは固定端に正の曲げモーメントを生じる方向のモーメント反力を正と定義したので、モーメント反力の縦距は負となっていますが、定義を逆にすれば、縦距も逆に正となります。

また、右端が固定された片持ち梁の場合にも、影響線は左右逆であるだけであることを

確認しておきましょう。

2.3. 梁の断面力の影響線

次に、基本的な梁のせん断力および曲げモーメントの影響線を説明します。

2.3.1. 単純梁および張り出し梁の中央径間

単純梁のせん断力の影響線を求めます。反力の影響線を求める場合には、 x がどの位置であっても自由物体図は同様でした。しかし、ある特定の点 c におけるせん断力を求める場合、図に示すように、移動荷重が c 点の左側にあるか、右側になるかで自由物体図は異なります。

$0 \leq x \leq a$ の場合

$$S_c = R_A - 1 = -R_B, \quad M_c = R_A a - 1.0(a-x) = R_B b$$

$a \leq x \leq l$ の場合

$$S_c = R_A, \quad M_c = R_A a$$

つまり、 $0 \leq x \leq a$ の範囲では、 S_c の影響線は R_B の影響線を負にしたものになり

M_c の影響線は R_B を b 倍したものになります。また、 $a \leq x \leq l$ の範囲では S_c の影

響線は R_A の影響線と同じになり、 M_c の影響線は R_A を a 倍したものになります。こ

れらを図示すると、図のようになります。

単純梁のせん断力の影響線の描き方：左端で0，右端で-1なる直線と，左端で1，右端で0なる直線を描きます。着目点で両直線を切断する。前者の左側，「後者の右側が得られる影響線です。

せん断力の影響線で、着目点の値が二つあるのはどのような意味でしょうか？これは、

せん断力図が集中荷重が作用しているときにその作用点で急激に変化することと似ています。せん断力図の場合には、荷重作用点の直前と直後の断面での自由物体図を描くことにより、荷重集中点には二つのせん断力値があることが分かりました。影響線の場合には、着目点はあくまで一点ですので、荷重載荷位置が c 点の直前にある場合と、直後になる場合を考えればやはり同様に、二つの影響値をもつことが理解できます。

張り出し梁の中央径間におけるせん断力と曲げモーメントの影響線は単純梁の影響線から簡単に求まります。すなわち、反力の場合と同様に、単純梁の場合と同様に左側支点から座標 x をとって、 x の位置を左端 (x は負となる) から右端まで移動したときについても、反力は上式とまったく同じになり、片持ち梁の中央径間におけるせん断力と曲げモーメントの影響線は、単純梁のそれらの影響線を張り出し部まで延長することで描かれます。

2.3.2. 片持ち梁

左端を固定された片持ち梁のある点のせん断力及び曲げモーメントの影響線を求めましょう。単純梁の場合と同様、移動荷重が c 点の左側にあるか、右側になるかで自由物体図は異なります。

$0 \leq x \leq a$ の場合

$$S_c = R_A - 1 = 0, \quad M_c = R_A a + M_A - 1.0(a - x) = 0$$

$a \leq x \leq l$ の場合

$$S_c = R_A = 1, \quad M_c = R_A a + M_B = a - x$$

このような場合、座標を自由端からとると計算は若干容易になり、同じ結果を得ることができます

$0 \leq \bar{x} \leq b$ の場合、

$$S_c = R_A = 1, \quad M_c = -1.0(b - \bar{x}) = \bar{x} - b$$

$b \leq \bar{x} \leq l$ の場合、

$$S_c = 0, \quad M_c = 0$$

右端を固定された片持ち梁についても同様に図のように求められます。

$0 \leq x \leq a$ の場合

$$S_c = -1, \quad M_c = -1.0(a - x) = x - a$$

$a \leq x \leq l$ の場合

$$S_c = 0, \quad M_c = 0$$

片持ち梁のせん断力および曲げモーメントの影響線は反力及び反力モーメントと同様の形態をしているが、右端を固定された場合のせん断力のみは例外的に符号が変わっていることに注意しましょう。

2.3.3. 張り出し梁の張り出し部

左端を固定された片持ち梁で、右端から座標を取った場合、および、右端を固定された片持ち梁で、左端から座標を取ったときの上記の分析は、そのまま、張り出し梁の右側張り出し部、および左側張り出し部に着目点がある場合のそれとまったく同じ過程でせん断力と曲げモーメントの影響線が求められます。図に示すように、これらのいずれの場合にも、着目点と自由端をはさむ自由物体図から影響線が描かれ、それ以外の範囲での構造形態に影響を受けていないからです。

2.3.4. ゲルバー梁

ゲルバー梁は基本的な静定梁の組み合わせさせた構造ですが、影響線はそれらの梁の影響線を単純に組み合わせることでは求められません。その原因は、ゲルバー梁の構成する各静定梁は、その組み合わせ方によって吊り桁となったり定着桁となったりするからです。吊り桁に荷重が作用した場合、それを支える桁（定着桁あるいは吊り桁）には荷重として力が伝達されます。しかし、ある桁（定着桁あるいは吊り桁）に荷重が作用したとき、それ

が支える吊り桁に力が伝達されることはないのです。

それではゲルバー梁の影響線の描き方を示します。

■ はじめに、着目点を含む桁の着目量に関する影響線を描きます。定着桁はそれ自身自立して支えられる桁ですから、それ自身に荷重が作用している場合には、それが単独であるのとまったく同じ挙動をします。

■ 次に、この定着桁とこれが支えている吊り桁のつなぎ目の値は連続のままで、吊り桁の支点上で影響値がゼロとなるような直線を描きます。

■ 他に定着桁がある場合にはその影響値はすべてゼロとなります。例えば着目点を含まない片持ち梁の影響値はすべてゼロになります。片持ち梁はあきらかに定着桁だからです。

■ この着目している桁以外の定着桁によって支えられている吊り桁の影響値もすべてゼロになります。

このように、着目点を含む桁とそれを支えている桁には影響線が現れますが、着目点を含む桁によって支えられている桁の影響値はすべてゼロになります。また、影響線はすべて直線線となります。また、支点反力の影響線ではその着目点での影響値が1になりますが、これを例外として、それ以外の場合には支点上では影響値はすべてゼロになります。これは、支点上に荷重が作用する場合に生じる応答はその点の反力のみだからです。

このようにして描かれた影響線は、あたかも支点上で支えられ、しかも中間ヒンジにおいて折れ曲がり自由なように接続された何本かの棒を、着目点で動かしたり、曲げたり、折ったりなどして変形させたときの変形形状に似ています。このことはエネルギーや仕事の原理を用いて説明でき、これを用いるとさらに容易に影響線を描くことができます。

例題

■ 設計用単一荷重の載荷位置の同定

単一の集中荷重が作用するとき、

■ 設計用連行荷重の載荷位置の同定

- 設計用分布荷重の載荷位置の同定
- 仮想仕事の原理を使って影響線を描く

2.4. トラスの部材力の影響線

トラス部材力の影響線の多くは、置換梁の曲げモーメントあるいはせん断力の影響線から求められることは、前節の力分解法およびモーメント法の説明から明らかでしょう。手順は以下のようになります。

斜材の影響線の描き方

- 斜材の両端ではさまれる区間での置換梁のせん断力の影響線を描く。ただし、影響値はすべて $\sin \alpha$ で除し、また、右上がりの斜材の場合には正負を逆にする。
- この区間両端の位置での値を直線で結ぶ。

弦材の影響線の描き方

- 交点 k での置換梁の曲げモーメントの影響線を描く。ただし、影響値はすべて r_{kc} で除し、また、 k 点回りのモーメントが正ならば正負を逆にする。
- 弦材の両端の位置での値を直線で結ぶ。

鉛直材の部材力は節点法により求められます。ワーレントラスの鉛直材と水平材が連結された節点のような場合には同一節点に作用する外力が部材力にありますので、影響線は図のようになります。つまり単位荷重の当該節点への伝達される分が影響線の値となります。ただし、プラットトラスのように、上下の節点で斜材と連結されている場合には、斜材と同様にして求めます。

例題

3. 間接載荷を受ける梁

橋梁の床版は、通常床組みと呼ばれる構造で支持され、これが荷重を主構造である主桁やアーチ、トラスに力を伝達します。これは床版は面的な広がりをもつことでその機能を発揮するのに対して、主構造は通常それと同じ面的広がりを持たせられないからである。特にトラスの場合には、軸方向部材であり、曲げに耐えることができないので、格点以外に外力を作用しない構造とする必要がある。

このように他の部材を通して載荷される荷重を間接荷重と呼ぶ。これまで、梁に荷重が直接載荷する場合を扱ってきたが、本章では、梁の上に梁が設置され、その上部の梁に荷重が載荷される場合の下部の梁の応答（せん断力、曲げモーメント、影響線など）を求める方法を述べる。

3.1. 反力の求め方

まず梁（主桁と呼ぶ）の上に小梁（載荷桁と呼ぶ）が乗った状態で、その載荷桁のある範囲ではそれを通して間接載荷をし、それのない範囲では直接載荷をするものとします。荷重が作用すると載荷桁はこれを自立的に支持しさらにその力を支点から主桁に伝達します。主桁の方はその力が主桁から伝達されたものか直接載荷されたものかを区別することはできないから、主桁の解析にあたっては、この載荷桁からの反力は直接載荷された荷重と同様に扱ってかまいません。

しかし、反力を求めることだけが目的ならば、解析はもっと簡単になります。4章で学習したように、静定構造の反力を求めるだけなら、構造物の形状は実は関係ないのです。関係するのは、外力の作用線の位置のみですから、載荷桁に作用する荷重も直接載荷しているものとして扱ってよいこととなります。

3.2. せん断力および曲げモーメントの求め

方

せん断力および曲げモーメントを求めるならば、載荷桁から主桁に伝達する荷重を求めて、これを主桁に直接載荷することによりせん断力と曲げモーメントを求めます。

3.3. S.F.D.およびB.M.D.の描き方

上記の方法でせん断力および曲げモーメントが求めれば、それを図示する方法はこれまで何通りか学習してきました。ここでは、直接載荷した場合のS.F.D.およびB.M.D.から間接載荷の場合のS.F.D.およびB.M.D.を求める方法を説明します。間接載荷した場合の反力は、直接載荷した場合のそれと同じであることを述べました。さらに、間接載荷荷重の有無にかかわらず、直接載荷荷重の効果は同じであることは明白です。あとは、間接載荷の両端でのせん断力および曲げモーメントがどう変化するか、および間接載荷荷重の範囲でそれらがどのように変化すべきかを知れば、完全なS.F.D.およびB.M.D.を描くことができます。

第一に、間接載荷の両端でのせん断力および曲げモーメントがどう変化するかを述べます。まず、せん断力は載荷桁から伝達される集中荷重によって、急激に変化します。その変化量は伝達される力の大きさに等しくなります。曲げモーメントは、同じ伝達力によって勾配を急激に変化させますが値が不連続になることはありません。なぜなら載荷桁からモーメントが伝達され得ないからです。

次に、間接載荷荷重の範囲でそれらはどのように変化するでしょうか？この範囲では外力が一切作用しないこととなりますから、せん断力は一定、曲げモーメントは直線的に変化します。ですから、間接載荷の場合にS.F.D.は載荷桁の両端でその伝達の大きさず急激に変化させればよいのです。なお、その変化量の和はその間に載荷する荷重の総和に等しくなっています。一方、曲げモーメントの場合には両端での値が解っていて直線的に変化するわけですから、折れ線状に結ぶだけでB.M.D.は完成します。

3.4. 影響線の求め方

次に影響線の求め方を述べます．特定の間接載荷区間にある着目点の着目量の影響線を求めます．まず，その間接載荷区間とそれ以外の区間とに分けて述べましょう．

該当する間接載荷区間以外の範囲における影響線は，間接載荷区間があることによって何ら影響を受けません．まず，静定梁の影響線がすべて直線となることはすでに学習しました．さらに，この範囲にさらに間接載荷区間がある場合でもその両端での影響値は直接載荷の場合と同じです．それは直接載荷の効果がまったくない載荷位置だからです．したがって，着目点を含む関節載荷区間を除いて影響線は直接載荷の場合とまったく同じであることになります．

次に，着目点を含む関節載荷区間についてですが，まずこの範囲に荷重が作用することはないので，この間の影響線は直線となります．しかも，この区間の両端での影響値は上記のように直接載荷の場合と同じです．

以上のことから，特定の間接載荷区間にある着目点の影響線は，直接載荷の場合の影響線を描き，この間の載荷桁の両支点での影響線の値を直線で結ぶことで描くことができます．

例題

4. 棒の応力，ひずみ，変位

4.1. ひずみとフックの法則

応力とは，3章で学んだように単位面積あたりに生じる内力です．本章では，そのような応力が生じたときに構造物がどのように変形するかを学びます．

今，図に示すように3種類の棒があります．棒Ⅰは基本となるもので，断面積が A で長さが L とします．棒Ⅱは断面積は同じですが，長さが $2L$ です．棒Ⅲは長さは同じですが断面積が $2A$ とします．3章で学んだように断面積が2倍あると2倍の力に耐えられますから，棒ⅠとⅡには荷重 P を，棒Ⅲには荷重 $2P$ を作用させます．このとき，棒の伸びはそれぞれ Δ ， 2Δ ， Δ になります．棒Ⅱが 2Δ 伸びるのは長さ L で Δ 伸びるためです．棒Ⅲは断面積が大きい分荷重を大きくしているので，伸びは同じになります． k の3本の棒は応力で比較すると同じですが，伸びる量は棒の長さで変化します．しかし，棒Ⅰと棒Ⅱの比較から元の長さに対する伸び率は，いずれの場合にも $\frac{\Delta}{L}$ となっています．同じ応力を作用した3本の棒が同じ伸び率となっているわけです．この伸び率をひずみといいます．もし，棒Ⅰに荷重 $2P$ を作用させていれば，応力は2倍，ひずみも2倍になるでしょう．つまり，応力とひずみとの間には比例関係があることになります．そして比例定数をヤング率あるいは縦弾性係数といいます．多くの材料ではある限度までの応力では，応力とひずみには比例関係が成り立つことがわかっており，この関係をフックの法則といいます．また，ヤング率は材料固有の定数です．

4.2. ひずみと変位

棒Ⅰの場合を例にすると，

$$s = \frac{P}{A}, \quad e = \frac{\Delta}{L}, \quad s = Ee$$

となります。すなわち

$$\Delta = eL = \frac{S}{E}L = \frac{PL}{EA}$$

この式は、棒という特定の形状(L,A)、材料(E)の構造物に荷重(P)が作用したときの伸び量です。もし、棒の一端が固定されていれば、他端の位置の変化を示すことになります。位置の変化を一般に変位といいます。ですから、上式の意味は次のように要約できます。

- 荷重が作用したときの応力が求まる。(断面積つまり断面の特性による)
- 応力をヤング率で割ればひずみが求まる。(ヤング率つまり材料の特性による)
- ひずみに棒の長さを掛ければ変位が求まる。(棒の長さつまり骨組形状による)

4.3. 基本的材料の応力ひずみ関係

4.4. 基本的材料の材料パラメータ

5. 梁の応力と断面特性

4章では、棒部材について荷重から反力、断面力、応力と求めてゆき設計式による安全性の照査ができることを学びました。梁部材について曲げモーメント及びせん断力という基本的な断面力も求め方についてもすでに学習しました。そこで、本章では、梁部材について断面力から応力を求めて安全性を照査する方法を学びましょう。

5.1. 曲げモーメントと曲げ応力

曲げモーメントが生じて梁が変形した状態を考えます。このとき、この梁のなかの近接する二つの断面で切断して自由物体を取り出します。この自由物体は曲げられたために、上部で圧縮、下部で引張を受けて変形するはずですが、そうすると、梁の上下方向のどこかで圧縮から引張に変化する、すなわち圧縮も引張りのされない場所があるはずですが、この位置を中立面といいます。また、中立面が断面と交わる線を中立軸といいます。

まず、ひずみの分布を仮定します。通常用いられるような梁では、変形前に平面であった断面は変形後も平面を維持すると仮定できます。これを平面保持の仮定といいます。この仮定を採用すると、中立面からの距離にひずみが比例することになります。ここでいうひずみとははりの水平方向への各部位での伸縮をさします。つまりひずみの断面高さ方向の分布は直線分布になります。

次に、応力とひずみの関係が比例関係にあるとします。フックの法則です。そうすると、応力もまた中立面からの距離に比例することになります。

これらの二つの仮定を用いれば、曲げモーメントに対応する応力分布が以下のように求まります。

$$s_b = s_{\max} \frac{y}{y_{\max}}$$

また、曲げモーメントの定義は、断面に作用する曲げ応力の中立面に関するモーメントの総和です。すなわち、

$$M = \int_A \mathbf{s}_b y dA$$

この式に式を代入することにより、曲げ応力と曲げモーメントの関係が得られます。

$$M = \int_A \mathbf{s}_{\max} \frac{y}{y_{\max}} y dA = \frac{\mathbf{s}_{\max}}{y_{\max}} \int_A y^2 dA = \frac{\mathbf{s}_{\max}}{y_{\max}} I$$

$$\text{ただし, } I = \int_A y^2 dA$$

したがって、結局

$$\mathbf{s}_b = \frac{M}{I} y, \mathbf{s}_{b,\max} = \frac{M}{I} y_{\max}$$

となります。ここで、 I は断面二次モーメントと呼ばれるもので、断面形状により定まる断面特性です。

ところで、今この断面には曲げモーメント及びせん断力のみが作用し、軸方向力は作用しないとすると、次式が成り立ちます。

$$\int_A \mathbf{s}_b dA = \frac{M}{I} \int_A y dA = 0$$

M がゼロでないとするれば、 $\int_A y dA = 0$ となります。これは、 y の原点である中立面の位置が、断面の図心軸と一致していることを示しています。ですから、曲げ応力を求めるためには断面の図心軸に関する断面二次モーメントを求めなければなりません。

5.2. 断面一次モーメントと図心

ある参照される座標 y, z について、断面の断面一次モーメントは以下のように定義されます。

$$G_z = \int_A y dA \quad G_y = \int_A z dA$$

ある参照される座標 y, z を用いると、断面の図心は以下の式で求まります。

$$\bar{y} = \frac{Q_z}{A} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} \quad \bar{z} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int_A z dA}{\int_A dA}$$

つまり、図心とはその断面がすべて図心位置に集中して存在するとしたときに、断面一次モーメントが元の断面の断面一次モーメントと等しい点となります。図心を通る軸について断面一次モーメントはゼロになります。

上式を変形すると、

$$Q_z = \bar{y}A \quad Q_y = \bar{z}A$$

となります。つまり、ある軸に関する断面一次モーメントは、その軸から図心までの垂直距離に断面積を乗じて求まります。

5.3. 断面二次モーメント

ある参照される座標 y, z について、断面の断面二次モーメントは以下のように定義されます。

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A z^2 dA$$

5.3.1. 図心軸回りの断面二次モーメント

長方形、円形など対称軸のある場合、図心は対称軸の上にあるので、図心を求めるのは容

易です。したがって、図心軸回りの断面二次モーメントもまた比較的容易に求められます。ここでは、基本的な断面形状について図心軸回りの断面二次モーメントを定義式から導いてみましょう。

例題：長方形，円形，角管，管，対称 I 断面など

5.3.2. 軸移動の法則と任意の軸回りの断面二次モーメント

前節では、図心が容易にわかり、また断面を構成する基本形状の図心が断面全体の図心の一致していました。しかし、常にそのような場合ばかりとは限りません。例えば、図の T 型断面の例では水平のフランジと呼ばれる板が、ウェブと呼ばれる鉛直の板の片側だけについているため、図心の位置は計算しなければ求められませんし、フランジ及びウェブの各板の図心位置と断面全体の図心位置が異なっています。このような場合には、断面全体の図心位置を求めなければならないのは当然ですが、その他に、断面全体の図心軸に対する各板の断面二次モーメントを求めなければなりません。

そこで、まず、2本の軸に関する断面二次モーメントの関係を求めます。平行で距離が y_0 だけ離れた y 軸と Y 軸に関する断面二次モーメントの関係は以下のように求められます。すなわち

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A y^2 dA = \int_A (Y + y_0)^2 dA = \int_A Y^2 dA + 2y_0 \int_A Y dA + y_0^2 \int_A dA \\ &= I_Y + 2y_0 Q_Y + y_0^2 A \end{aligned}$$

ここで、 Y 軸を断面の図心を通る軸とすれば、 $Q_Y = 0$ となりますから、結局

$$I_y = I_Y + y_0^2 A$$

となります。つまり、図心軸以外の軸に関する断面二次モーメントは、図心軸に関する断面二次モーメントに、両軸の距離の二乗に断面積を乗じたものを加えることで求まることとなります。この関係を断面二次モーメントに関する軸移動の法則といいます。

5.3.3. 断面二次モーメントを求めるのに用いる基

本的な性質

- ✦ 曲げ応力を求めるために用いる断面二次モーメントは、図心軸まわりで求める。
- ✦ 対称軸は図心を通ることを用いると、図心は求めやすい。特に対称軸が二つある場合にはその交点が図心になる。
- ✦ 断面を基本的ないくつかの部分に分割できるとき、断面全体の断面二次モーメントは、各部分の断面二次モーメントの和になる。孔があいている場合には負の断面二次モーメント、負の断面積を考えればよい。
- ✦ 各部分断面の図心軸回りの断面二次モーメントは定義により求める。
- ✦ 全断面の図心軸周りの、各部分断面の断面二次モーメントは軸移動の法則により求める。
- ✦ 断面の断面二次モーメントのうち、図心軸回りの断面二次モーメントが最小となる。

例題

5.4. 断面係数

図心を通る z 軸回りの断面二次モーメントを I_z 、 z 軸から断面の最外縁までの距離の絶対値を y_1 および y_2 とするとき、断面係数は以下のように定義されます。

$$W_i = \frac{I_z}{y_i}$$

これを用いると、曲げ応力の最外縁における値、すなわち絶対値最大の引張応力と圧縮応力が求まります。

$$s_i = \pm \frac{M}{W_i}$$

ただし、負の符号は圧縮側の W_i に対してつきます。一軸の引張あるいは圧縮力 N を受ける棒の断面特性が断面積 A で、 N/A により応力が求まるように、曲げモーメント M を受ける梁の断面特性が断面係数 W_i で、 M/W_i により曲げ応力が求まります。

5.5. 断面二次半径

図心を通る z 軸回りの断面二次モーメントを I_z 、断面積を A とするとき、断面二次半径は以下のように定義されます。

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

細長い棒が圧縮力を受けて座屈するときの、細長さの程度は棒の長さと同断面二次半径の比で決まります。断面二次半径が大きいほど、また長さが短いほど座屈に強いといえます。詳細は 13 章で学習します。

5.6. 断面相乗モーメント，断面二次極モーメント

5.7. 核

5.8. せん断力とせん断応力

はりが曲げを受けると、曲げモーメントと同時にせん断力という断面力が断面に作用していると考えてきた。しかし、曲げモーメントの実体が実は分布する曲げ応力であったように、せん断力の実体も分布するせん断応力です。それではせん断応力はどのように分布するかを考えていきましょう。

まず、はりが曲げられた状態で、せん断力の作用がどのような効果をもっているかを調べます。そのために、はりをその長手方向にいくつかのブロックに分割して、それぞれのブロックの間はある程度すべるようにしておきましょう。その状態で横方向から外力を受けると、ブロック同士がずれてゆくはずですが、しかし実際にはこのようにずれることがないのは、ブロック同士が完全に固着しているからです。しかし、完全に固着していなければずれたのですから、固着している部分にはずれに抵抗するような作用が生じているはずですが、これがこれまで学習してきたせん断力です。しかし、このずれに抵抗する作用は断面全体で起こっているはずですが、これがせん断応力です。そしてこのせん断応力を総和したものがせん断力とみなされます。

次に、同じ梁を水平方向に何層かに切断してみましょう。その状態である程度すべるようにしておきます。その状態で横方向から外力を受けると、各層はずれてゆくはずですが、しかし実際にはこのようにずれることがないのは、各層が完全に固着しているからです。しかし、完全に固着していなければずれたのですから、固着している部分にはずれに抵抗するような作用がやはり生じているはずですが、このずれに抵抗する力もやはり層間に分布しているはずで、これもせん断応力の正体といえます。

したがって、せん断応力は図に示すように、水平方向及び鉛直方向に作用しているのです。今、図のような小部分を取り出して、モーメントのつり合いを考えれば、この水平方向のせん断応力と垂直方向のせん断応力の大きさは等しいことが分かります。ですから、せん断力に対応した鉛直方向のせん断応力を求める代わりに、水平方向のせん断応力を求めます。

5.9. せん断応力分布

曲げモーメントと曲げ応力の関係を求めるために用いた図の自由物体を、さらに水平方向に切断してその切断面にせん断応力が等分布しているものとします。この時、この自由物体には、曲げ応力とせん断応力が水平方向に作用してつり合っているはずで、このつりあい式を立てて、解くことにより、せん断応力が以下のように求まります。

〔略〕

5.10. 曲げ応力とせん断応力による設計

曲げを受ける梁には曲げ応力とせん断応力が生じます。設計においては、通常この両者について、作用応力度が許容応力度を超えないことを照査します。

曲げ応力の場合、設計式は以下ようになります。

$$s_{b,\max} = \frac{M_{\max}}{W_i} \leq s_{ba}$$

■ 部材寸法を決定する場合。

既知：最大曲げモーメント，材料（すなわち設計応力），安全係数

未知：断面形状または断面係数

■ 許される荷重の大きさを決定する場合

既知：材料（すなわち設計応力），安全係数，断面形状または断面係数

未知：最大曲げモーメント

■ 使用材料を決定する場合

既知：最大曲げモーメント，断面形状または断面積，安全係数

未知：材料（すなわち設計応力）

最大曲げモーメントは，荷重がすべて既知ならば曲げモーメント図から求められます．載荷する位置が未定の場合には影響線が用いられることになります．

せん断応力の場合にも同様ですので省略します．なお，曲げ応力とせん断応力の分布の仕方によっては，いずれかが最大のとき意外でも，材料の破壊状態が想定される場合がありますが，これは組み合わせ応力の問題で，18章で詳細に検討します．