構造力学ノート

Part3

２００１年4月1日

皆川　勝

1.　梁のたわみ

　引張あるいは圧縮力のみを受ける棒の構造解析は以下のような手順であることをすでに述べました．

- 荷重が作用したときの応力が求まる．（断面積つまり断面特性による）
- 応力をヤング率で割ればひずみが求まる．（ヤング率つまり材料特性による）
- ひずみに棒の長さを掛ければ変位が求まる．（ひずみと変位の関係による）

　梁の場合には，以下のようになるでしょう．

- 荷重状態から反力を求め，すべての外力が既知となる．（静力学による）
- 外力と内力の関係から，曲げモーメント，せん断力を求める．（静力学による）
- 曲げ応力，せん断応力を求める．（断面係数などの断面特性による）
- 曲げひずみ,せん断ひずみを求める．（ヤング率などの材料特性による）
- 梁のたわみを求める．（ひずみと変位の関係による？）

　本章では，最後の項目のひずみと変位の関係を用いて，梁の変位であるたわみやたわみ角を求める方法を学習します．

1.1. たわみとたわみ角

　梁を横から曲げると，下方向に変位します．この梁の下方向への変位を特にたわみと呼びます．そしてこのたわんだ形状をたわみ曲線といいます．また，水平な梁が曲がると，梁の多くの部分は斜めになります．この角度の変化をたわみ角といいます．つまりたわみ角とはたわみ曲線の勾配です．たわみやたわみ角は変位の一種です．変位とは位置が変わることです．これに対して，変形は形が変わることを意味します．

　たわみを下向き正とし，座標 x を右向きを正とします．このとき，たわみ曲線の傾きは

$$q \approx \tan q = \frac{dy}{dx}$$

ですから，右下がりのたわみ角が正となります．

1.2. 曲げによる変形：曲率と曲げひずみ

図に，たわみ曲線の一例を示します．R はある特定の点の曲率をしめします．曲率半径の逆数は曲率といいます．これが大きいほど，あるいは曲率半径が小さいほど曲がり方が急です．曲率半径は実際の梁では，曲率はきわめて小さいのですが，ここでは誇張して示しています．

図は曲げを受けた梁の一部を幅 dx で取り出したものです．梁が曲がることにより，中立軸より上では圧縮ひずみが，下では引張ひずみが生じています．○章と同様に平面保持の仮定が成立するとしますと，ひずみ量は図心軸からの距離に比例することはすでに学びました．今，図心軸から鉛直方向に y だけ下がった位置での引張伸び量を Δy とすると，ひずみは，図の幾何学的関係から，

$$\frac{y}{\Delta_y} = \frac{r}{dx}$$

ですから，結局

$$e = \frac{\Delta_y}{dx} = \frac{y}{r}$$

となります．

一方，曲率は近似的にたわみの二回微分で表されます．

$$\frac{1}{r} = -\frac{d^2 y}{dx^2}$$

すなわち，

$$e = -y\frac{d^2 y}{dx^2}$$

1.3. たわみと曲げモーメントの関係

応力とひずみは比例関係にある場合のみを考えていますから，

$$s = Ee$$

です．曲げモーメントの定義を用いれば

$$M = \int_A s y dA = -\int_A E y \frac{d^2 y}{dx^2} y dA = -E \frac{d^2 y}{dx^2} \int_A y^2 dA = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

結局，たわみに関する以下の２階の微分方程式が得られました．

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

1.4. 積分してたわみ，たわみ角を求める

曲げモーメント，曲げ剛性 EI が x の関数として与えられていれば，式を調節積分することにより，たわみ及びたわみ角の一般解が求まります．通常の荷重を受ける均質材料等断面の真直ぐな梁の場合には，曲げ剛性が一定で，曲げモーメントは x の多項式ですから積分は簡単です．二回積分しますから積分定数は二つ現れます．

$$\frac{dy}{dx} = q = -\int \frac{M}{EI} dx + C_1$$

$$y = -\iint \frac{M}{EI} dx dx + C_1 x + C_2$$

曲げモーメントが不連続ですと積分できなくなりますから，弾性方程式は，曲げモーメントが連続な範囲にひとつ立てなければなりません．

1.5. 境界条件

一区間に一つの微分方程式があり，それぞれに二つの積分定数が現れます．したがって，区間の数の２倍の何らかの条件が積分定数を定めて解を求めるために必要になります．求まった式はたわみ及びたわみ角に関する式ですから，条件式もたわみ及びたわみ角に関するものになります．これらは，各区間の境界での条件になりますので境界条件と呼ばれます．境界条件には以下のようなものがあります．

- ピン支持，ローラー支持： $y = 0$
- 固定支持： $y = 0$　　$y' = q = 0$
- 区間の境界： $y_1 = y_2$　　$q_1 = q_2$

- 中間支点：$y_1 = y_2 = 0 \qquad q_1 = q_2$
- 中間ヒンジ：$y_1 = y_2$

区間の境界は，集中荷重作用点，支点，連続な分布荷重の両端です．

例題

1.6. 弾性荷重法

曲げモーメント,せん断力,荷重強度の間の微分積分関係と，弾性荷重・たわみ角・たわみの間の微分・積分関係のアナロジーはモールの定理と呼ばれます．また，これによりたわみ角やたわみを求める方法を弾性荷重法といいます．弾性荷重法では，元の梁の代わりに共役梁と呼ばれる別の形式の梁に対して弾性荷重を載荷さることにより，境界条件を一致させます．

1.6.1. モールの定理

曲げモーメント,せん断力,荷重強度の間の微分積分関係は以下のとおりです．

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \qquad S = \frac{dM}{dx} = -\int q dx + C_1 \qquad M = -\iint q dx + C_1 x + C_2$$

また，弾性方程式は以下のとおりです．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \qquad q = \frac{dy}{dx} = -\int \frac{M}{EI} dx + D_1 \qquad y = -\iint \frac{M}{EI} dx + D_1 x + D_2$$

分布荷重・せん断力・曲げモーメントの間の微分・積分関係が $\frac{M}{EI}$ ・たわみ角・たわみの間の微分・積分関係と類似しています．ところで，前者の関係は，今まで静力学からせん断力や曲げモーメントを求めるという形で解かれてきました．そこで，もし $\frac{M}{EI}$ を荷重とみなして載荷すると,その結果求まるせん断力 $\overline{S}$ はたわみ角 q に,曲げモーメント $\overline{M}$ はたわみ y になるはずです．そこで， $\frac{M}{EI}$ を弾性荷重と呼びます．また，これらの関係をモールの定理といいます．すなわち，

「弾性荷重を載荷した時に生ずるせん断力はたわみ角を，曲げモーメントはたわみを与える」

1.6.2. 共役梁の境界条件

ところで，微分方程式を解く過程は，積分をして境界条件を与えることにより積分定数を定めるという順序になります．前節で説明したモールの定理により積分する過程はせん断力や曲げモーメントを求める手順に変更できます．しかし，元の梁でたわみやたわみ角に関する境界条件を与えて求めるわけですから，弾性荷重を荷重の変わりに載荷するする場合には $\overline{M}$ や $\overline{S}$ に関する境界条件で与えられなければならないことになります．このような境界条件を設定した梁を共役梁といいます．すなわち

	元の梁	共役梁	
	たわみ y	曲げモーメント $\overline{M}$	
	たわみ角 q	せん断力 $\overline{S}$	
単純支持	$y=0$	$\overline{M}=0$	単純支持
固定端	$y=0$	$\overline{M}=0$	自由端
	$y'=q=0$	$\overline{S}=0$	
自由端	$y\neq 0$	$\overline{M}\neq 0$	固定端
	$q\neq 0$	$\overline{S}\neq 0$	
中間ヒンジ	$y_1=y_2$	$\overline{M}_1=\overline{M}_2$	中間支点
	$q_1\neq q_2$	$\overline{S}_1\neq\overline{S}_2$	

中間支点 $y_1 = y_2 = 0$ $\overline{M}_1 = \overline{M}_2 = 0$ 中間ヒンジ

$q_1 = q_2$ $\overline{S}_1 = \overline{S}_2$

という関係になります.

　図にいくつかの梁について共役梁を示しました.

例題

1.7. 荷重からたわみへ順番に積分してゆけば全部求まる.

曲げモーメントとたわみの関係式は次式となることをすでに説明しました.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

ここで，曲げモーメント,せん断力,分布荷重に関する微分積分関係

$$\frac{dS}{dx} = -q \qquad \frac{dM}{dx} = S$$

を用いると

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{S}{EI} \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EI}$$

となります．この式はたわみに関する 4 階の微分方程式で，荷重分布からたわみを求めるための基礎式です．この方程式を積分するたびに，せん断力，曲げモーメント，たわみ角，たわみの式が求まります．このうち，せん断力，曲げモーメントを求める過程は式を積分するのでなく, 6 章で学んだように，自由物体図のつり合いや図上で面積を加算するという方法で実現してきたわけです.

例題

2.　ラーメンの部材力

部材をその交差角度が変化しないようにつなげることを剛節といい，このように連結されてできた構造物を剛節構造あるいはラーメンといいます．剛節にすると一般に構造物は変形しにくくなり剛性が高く硬い構造物となります．本章では，基本的な静定構造物として静定ラーメンの部材力を求める方法を学びます．

2.1. 曲げモーメント・せん断力・軸力

図に示すようにＬ字型の棒を考えましょう. まず, 全体のつり合いより反力を求めます. ここまでは，すでに学習した内容でできるはずです．ここからどのようにして断面力を求めるかが問題です．このようにＬ字型に曲がっているとしても，曲げモーメントやせん断力が生じるであろうことは容易に想像できるはずです．例えば断面Ｉで切断して自由物体図を描いてみます．この断面には曲げモーメントとせん断力が作用するかもしれないので，それらを書き込みます．そして，水平方向のつり合い，鉛直方向のつり合い，A 点回りのモーメントの連つり合い式を立ててみると，水平方向につり合いが成立していないことが分かります．これは，断面に作用する軸力を考えていなかったことによります．この水平部材には，外力の水平成分とつり合うように水平方向に軸力が作用しています．

つまり，この断面 A には曲げモーメント，せん断力，軸力の３種類の断面力が作用しているわけです．一般にラーメン構造の任意の断面にはこれらの３つの断面力が作用する可能性があります．ここで，せん断力は断面に平行に作用する力，軸力は断面に垂直に作用する力と考えます．

2.2. 梁の上下！ラーメンの上下？

それでは，これら３種類の断面力の正負はどのように定義すればよいでしょうか？

梁の場合には，通常水平の位置し，曲げモーメントやせん断力の正負は梁の上下を基準に定義できました．曲げモーメントでは梁の上部に圧縮が作用する場合を正としました．

また，せん断力の場合には，右側断面で下向きの力を正としました．いずれも ” 上下 “ という概念を用いていたわけです．また，トラスの場合には，軸力が唯一の断面力ですが，この場合には引張を正とするというものでした．軸力については同じ定義が利用できますが，曲げモーメント及びせん断力については，どのようにして ” 上下 “ の概念を取り込めばよいでしょうか．

静定ラーメンの場合，部材は一筆書きで掛けるように連結されている場合がほとんどです．そこで，まず，部材軸の座標としてどちらか一端を決めます．左右のはっきりしているものは左側の端を原点とします．そして，原点から部材軸方向に鳥瞰したとき，右側を “ 下 ” と決めるのです．例えば，図のような門型ラーメンの場合には A 点を原点と見なし，内側が “ 下 ” となります．そして, “ 下 ”（すなわち内側）に引張を生じるような曲げモーメントを正と定義します．また, “ 下 ”（すなわち内側）に向かって作用するせん断力を正と定義します．軸力は引張を正としますから，断面の外側に向かって直角に作用するものとします．

なお，図の構造物のように，一筆書きで掛けないような部材構成になっている場合には，一部分は任意に “ 下 ” を決めておきます．

これで，梁及びトラスの解析で学んだ種々の基礎的な事項を利用する準備ができました．

2.3. 節点での内力の連続性

次に，ラーメンの特徴として部材と部材が剛節されていることが挙げられます．この剛節された節点では何が起きるのでしょうか？図の構造物の場合を例に説明しましょう．剛節では曲げおよび力が伝達されます．剛節点 B を挟んで短い区間の自由物体図を描いてみました．両断面とも曲げモーメント，せん断力，軸力が作用しています．この場合には，節点には集中荷重や集中モーメントが作用していません．曲げモーメントは両断面で等しくないとつり合わないことが分かります．また，左断面の軸力（せん断力）は右断面のせん断力（軸力）に，それぞれ等しくなっており，左右の断面でせん断力や軸力は連続とはなっていません．これは，部材が直角に交差していることによります．もし，この交差角度が 90 度でなければ関係はより複雑になります．すなわち

「部材軸が一本であるようなラーメンの場合，曲げモーメントは剛節点で連続になるが，せ

ん断力および軸力は連続にならない．特別な場合として，部材同士が直角に交差する節点では，せん断力は軸力に，軸力はせん断力にそれぞれ等しくなる．」

2.4. 梁が分かればラーメンも解ける！？

ラーメンにおいても，梁の場合の関係の多くが同様に成り立ちます．梁を構成する各部材を真直ぐな梁と見なして自由物体図を考えればこれは当然といえます．主な相違点は上記の節点における連続性のみでしょう．例題を通してそのことを理解してください．

2.4.1. 座標の関数として断面力を求める

各部材ごとに，座標原点を定め，集中荷重作用点，支点，連続な分布荷重の両端で挟まれる区間を一区間として，各区間ごとに任意断面での断面力を座標の関数として求めます．座標の関数として求めますので，完全な解を求めていることになりますが，基本的な断面力間の関係を用いないために計算量は多くなり，計算ミスの可能性も高まります．

例題

2.4.2. 特定点の断面力を求める

荷重が作用しない区間ではせん断力や軸力は一定で，曲げモーメント図は直線となる，剛節点では曲げモーメントは連続などの基本的な特性を用いることを前提に，最低限必要な断面での断面力のみを求める方法です．計算量は少なくなります．ただし，断面力を座標の関数として式の形で求めたい場合には，両端の値を利用して関数形を求める必要があります．

例題

2.4.3. 基本的性質を用いて断面力を求める

6.13 で梁の S.F.D.および B.M.D.を描くためのルールを説明しました．これらのルールは，

ラーメンを構成する各部材だけに限れば成立します．ただし，この場合にも，部材の“下”は常に意識しておく必要があります．

〔S.F.D.の描き方〕

- まず，梁の左端から描き始めます．
- S.F.D.の次数は（荷重図の次数＋１）です．
- 下向き（上向き）の外力が作用するとS.F.D.は減少（増加）します．
- 外力が作用していない区間ではS.F.D.は一定（つまりゼロ次）です．
- 下向き（上向き）の集中外力が作用すると，S.F.D.はその大きさだけ急激に減少（増加）します．
- 等分布荷重（つまりゼロ次）が作用している区間では，S.F.D.は直線（つまり一次）となります．この直線の勾配は，荷重強度に符号をつけたものです．
- 等変分布荷重（つまり一次）が作用している区間では，S.F.D.は放物線（つまり二次）となります．この放物線の勾配は各位置でのせん断力となっています．
- あるふたつの断面の間でのせん断力の変化量は，その間の荷重の総計，つまり荷重図の面積に符号をつけたものとなります．ただし，面積を算出する際には正負を考慮しなければなりません．
- 集中モーメントが作用しても，その作用位置でS.F.D.に別段の変化はありません．
- 上記の各ルールを用いて，梁の左端から右端までS.F.D.を描き，最終的にはゼロに戻って完成します．

〔B.M.D.の描き方〕

- まず，梁の左端から描き始めます．
- B.M.D.の次数は（S.F.D.の次数＋１）です．
- 下向き（上向き）の外力が作用するとB.M.D.は下に凸（上に凸）になります．
- 外力が作用していない区間ではB.M.D.は直線（つまり一次）です．
- 下向き（上向き）の集中外力が作用すると，B.M.D.はその大きさだけ折れ曲がります．その折れ曲がる角度は外力の大きさと同じです．
- 等分布荷重（つまりゼロ次）が作用している区間では，B.M.D.は放物線（つまり二次）となります．

⌗ 等変分布荷重（つまり一次）が作用している区間では，B.M.D.は三次曲線となります．

⌗ あるふたつの断面の間での曲げモーメントの変化量は，その間のせん断力の総和，つまり S.F.D.のその間の面積となります．ただし，面積を算出する際には正負を考慮しなければなりません．

⌗ 時計回り（反時計回り）の集中モーメントが作用すると，その作用位置で B.M.D.はその値だけ急激に増加（減少）します．

上記の各ルールを用いて，梁の左端から右端まで B.M.D.を描き，最終的にはゼロに戻って完成します．

例題

2.5. 中間ヒンジを持つラーメン

中間ヒンジを持つ静定梁はゲルバー梁と呼ばれています．中間ヒンジをもつラーメンも基本的な構造です．本節では，曲げを伝達しない部材連結方式としての中間ヒンジを持つ場合にどのように解析するかを説明します．

2.6. 3　　ヒンジ構造

中間ヒンジを持つ構造のうち最も基本的なものは図に示す両端ピン支持でその中間にヒンジを持つ構造です．

まず反力を求めましょう．これには二つの方法があります．第一の方法では，通常の平面構造のつり合い条件 3 式に加えて，ヒンジの左側あるいは右側のみについて，外力がヒンジ回りにもつモーメントの総和がゼロという条件を加えます．条件数が４になり，また未知反力数も４ですから，これによりすべての反力は求まります．

次に，３ヒンジ構造の特徴をよりよく理解できる方法で反力を求めましょう．今，荷重は中間ヒンジの右側に一つだけ作用しているものとします．中間ヒンジの左側に作用するが外力は支点反力のみです．この支点反力を水平方向と鉛直方向に分解せずある方向に作用する一つの力と考えます．また，中間ヒンジで伝達される断面力も支点反力と同様に水平

方向と鉛直方向に分解せずある方向に作用する一つの力と考えます．つまりこの自由物体には二つのある方向の力が作用してつり合っていることになります．このような場合，これらの力の作用線は二点を結ぶ方向に一致しないと，偶力が発生することになります．したがって，これらの力の向きは，中間ヒンジの左側の自由物体図のつり合いを考えることにより，支点と中間ヒンジを結ぶ方向になることが分かります．すなわち，

「二つのヒンジで挟まれ，しかもその間で外力が作用しない場合には，両端ヒンジに作用する外力または内力の作用線は，両点を結ぶ方向に一致する」

　これにより一方の反力の作用線が決定しました．作用線の方向が決まったということは，水平成分と鉛直成分の比が決まったことを意味します．次に，この作用線と荷重の作用線の交点を 0 とします．この構造物には３つの外力が作用しています．この状態でつり合うためには，他方の反力の作用線が 0 点を通る必要があります．もし通らなければ，反力は 0 点回りのモーメントを持ってしまうからです．このことにより，二つ目の反力の作用線が決定しました．

　最後に，荷重とこれら二つの反力がつり合うように，水平成分と鉛直成分に分けるなどして，反力の大きさを計算します．

例題

3.　柱の座屈

竹ひごの両端を持って少し押してみます．あるいは下敷きの短い方の２辺を持って少し押してみます．注意深く真直ぐに押しても，あるところで竹ひごや下敷きは，急に曲がってしまいます．これは，これらの構造物が細長い，あるいは薄っぺらいために起こる現象です．このようにある方向の寸法が他の方向の寸法に比べて極端に小さい構造物を薄肉構造物といいます．薄肉構造物が圧縮力を受けると，力が完全に真直ぐ作用しない，形状が完全でないなどの理由で，ある限界荷重が作用した時点で動的に曲がります．この現象は座屈といい，薄肉構造物特有の現象です．本章では，座屈が生じる最も簡単な構造部材として柱を取り上げ，その座屈強度を評価する方法を学びます．

3.1. 安定と不安定

いま，おわんの中にボールを置いた状態を考えます．このボールをちょっと押すと，ボールは振動し始めます．しかし，しばらくすると徐々にその振動は小さくなりやがてもとの状態に戻ります．このように，一種の乱れをうけてもしばらくすると元の状態に戻れる状態を安定な状態といいます．次に，丸い器を逆向きにしてその頂上にボールを置いてみます．このボールはちょっと押されただけでも転がりだし，遠くへ行ったきり戻らないでしょう．このように，一種の乱れをうけると，まったく異なる状態に移ってしまう状態を不安定な状態といいます．これは，収入がある程度見込まれ多少出費がかさんでも生活状態を変更しなくて良い状態を安定した生活，少しでも不意の出費が合っただけで生活が立ち行かなくなることを不安定な生活というのとまったく同じです．竹ひごや下敷きがちょっとした外乱で元とまったく違い形状に変わってしまったのも不安定現象といえます．

3.2. 屈服，飛び移り，座屈

構造物に生じる不安定現象にはいろいろなものがありますが，おおむね次の３つに分類されます．

⌗ 屈服：パイプを曲げるときに見られ現象．たわみに対して荷重は増加するが，あるところで最高点に到達して，その後荷重は次第に減少し破壊．

⌗ 飛び移り：アーチなどで見られる現象．変位に対して荷重が極大点に達した後，変位が急に増大して飛び移る現象．

⌗ 座屈：細長い柱に見られる現象．ある限界荷重に達すると，それまでのまったく異なる形状に変わってしまう．

これらの問題を弾性安定問題といい，変位や変形が大きい領域を取り扱うため，つり合いを変形後の形状で考えなければならない．

3.3. 長柱の座屈，オイラーの座屈荷重

弾性安定問題のうち，最も基本的な問題は細長い柱が圧縮荷重を受ける問題です．ここでは，この問題の完全な荷重―変位関係を求めることはせず，柱の曲げの微分方程式から座屈荷重を求める．より詳細な検討は構造力学の範囲を越えているので本書では扱わない．

今，図のように柱が圧縮力を受けて座屈した後の状態を考える．たわんだことにより，圧縮力は曲げモーメントを生じさせる．梁に関してすでに学習した曲げの微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = -\frac{M}{EI}$$

ですから，この M も代わりに荷重 P により発生する曲げモーメント Py を用いれば，以下の微分方程式が得られる．

$$y'' = -\frac{P}{EI}y$$

この微分方程式を与えられた境界条件について解けばよい．

いま $\frac{P}{EI} = w^2$ とすると，

$$y'' + w^2 y = 0$$

特性方程式 $a^2 + w^2 = 0$ より，$a = \pm iw$

したがって，一般解は

$$y = C_1 e^{iwx} + C_2 e^{-iwx} + C_3 x + C_4 = D_1 \sin wx + D_2 \cos wx + D_3 x + D_4$$

$$y' = wD_1 \cos wx - wD_2 \sin wx + D_3$$
$$y'' = -w^2 D_1 \sin wx - w^2 D_2 \cos wx = -w^2 \left(D_1 \sin wx + D_2 \cos wx\right)$$
$$y''' = -w^3 D_1 \cos wx + w^3 D_2 \sin wx = -w^3 \left(D_1 \cos wx - D_2 \sin wx\right)$$

境界条件は,

$y = 0; x = 0, L$ $\qquad D_2 + D_4 = 0$

$\qquad D_1 \sin wL + D_2 \cos wL + D_3 L + D_4 = 0$

$y'' = 0; x = 0, L$ $\qquad D_2 = 0$

$\qquad D_1 \sin wL + D_2 \cos wL = 0$

$$D_1 \sin wwL = 0$$

いま, $D_1 = 0$ は明らかな解であるので，それ以外の解を求めるとすれば

$\sin wwL = 0$ すなわち $wL = np$

結局

$$P_{cr,n} = EIw^2 = EI\left(\frac{np}{L}\right)^2 = \frac{n^2 p^2 EI}{L^2}$$

n=1 のとき P_{cr} は最小になるので，これを座屈荷重とする．すなわち

$$P_{cr} = \frac{p^2 EI}{L^2}$$

これを，オイラーの座屈荷重という．断面積を A とすると，座屈応力が以下のように求まります.

$$s_{cr} = \frac{p^2 EI}{L^2 A} = p^2 E \frac{I/A}{L^2} = p^2 E \left(\frac{1}{L/r}\right)^2 = \frac{p^2 E}{l^2}$$

ここで， $l = L/r$ を柱の細長比といいます．すなわちオイラーの座屈応力は細長比の二乗に反比例することになります.

3.4. 境界条件の影響

　前節では両端が単純支持の場合の座屈荷重を求めました．解析手順を見れば明らかなように，両端の支持条件が境界条件ですから，これがことなれば座屈荷重，座屈応力も変化します．いくつかの代表的な境界条件について座屈荷重，座屈応力を求めます．

3.4.1.　　　一端固定，他端自由

境界条件は,

$$
\begin{aligned}
&y = 0; x = 0 && D_2 + D_4 = 0 \\
&y' = 0; x = 0 && wD_1 + D_3 = 0 \\
&y'' = 0; x = L && D_1 \sin wL + D_2 \cos wL = 0 \\
&y''' = -Py'; x = L && D_3 = 0
\end{aligned}
$$

$$\cos wL = 0 \qquad \text{すなわち} \qquad wL = \left(n - \frac{1}{2}\right)p$$

結局

$$P_{cr,n} = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 p^2 EI}{L^2}$$

n=1 のとき P_{cr} は最小になるので，これを座屈荷重とします．すなわち

$$P_{cr} = \frac{p^2 EI}{4L^2} = \frac{p^2 EI}{(2L)^2} = \frac{p^2 EI}{L_e^{\ 2}}$$

3.4.2.　　　一端固定，他端単純

境界条件は,

$$
\begin{aligned}
&y = 0; x = 0 && D_2 + D_4 = 0
\end{aligned}
$$

$y' = 0; x = 0 \qquad wD_1 + D_3 = 0$

$y = 0; x = L \qquad D_1 \sin wL + D_2 \cos wL + D_3 L + D_4 = 0$

$y'' = 0; x = L \qquad D_1 \sin wL + D_2 \cos wL = 0$

より,

$$\tan wL = wL$$

すなわち　$wL = 4.493$

結局

$$P_{cr,n} = \frac{p^2 EI}{(0.7L)^2} = \frac{p^2 EI}{L_e^2}$$

3.4.3.　両端固定

境界条件は,

$y = 0; x = 0 \qquad D_2 + D_4 = 0$

$y' = 0; x = 0 \qquad wD_1 + D_3 = 0$

$y = 0; x = L \qquad D_1 \sin wL + D_2 \cos wL + D_3 L + D_4 = 0$

$y' = 0; x = L \qquad wD_1 \cos wL - wD_2 \sin wL + D_3 = 0$

より,

$$wL = 2np$$

したがって座屈荷重は

$$P_{cr} = \frac{4p^2 EI}{L^2} = \frac{p^2 EI}{(0.5L)^2} = \frac{p^2 EI}{L_e^2}$$

このように有効座屈長を部材長の変わりに用いれば，これにより統一的に座屈荷重を評価でき，座屈応力も次式のように有効細長比で表すことができます.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^{\,2} A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_e^{\,2}}$$

図に境界条件と座屈波形を整理して示します．有効座屈長が正弦波の半波の長さになっていることが分かると思います．

3.5. 実際の柱の挙動

座屈荷重が有効座屈長の二乗に反比例し，座屈応力が有効細長比の二乗に比例します．これまでの検討では柱は弾性範囲で座屈するとしてきましたが，実際には細長比を小さくすると,座屈する前に材料が弾性範囲を越えてしまいます．そこで，座屈応力がちょう降伏応力になるときの有効細長比を λ_{cr} とし，これで有効細長比を無次元化し，応力も降伏応力で無次元化します．そして，柱の使用限界を降伏に達するか座屈が生じるときとすれば,図に示す柱の耐荷力曲線を描くことができます．つまり，この曲線の下側にある限り柱は降伏も座屈も生じないということになります．これはいわば理想状態での耐荷力を表しています．しかし，部材の持つ形状の不整，溶接などにより生じる予応力，後降伏強度などの影響で，実際に用いられる柱の耐荷力は図中に示すようになります．

4．エネルギーによる解法１

4.1. 仕事とは何か

力 F を受ける質点が，u だけ変位するとき，この力 F は W=Fu だけ仕事をします．これを質点の仕事といいます．構造物の場合にはどうでしょうか．構造物に外力 P が作用している状態で，その作用点で作用方向に u だけ変位が生じるとき，この外力は W=Pu だけ仕事をします．これを外力の仕事といいます．それでは構造物に同じく外力 P が作用したとき，この外力の作用によって変位 u が生じた場合にはどうでしょうか．前者の場合には，外力 P がずっと作用した状態で変位 u が生じたのに対して，後者の場合には，外力がゼロから増えるにしたがって徐々に変位が増えて，外力が P になったとき変位も u になります．この場合の仕事は Pu とはなりません．実は仕事は下記のように定義できるのです．

$$W = \int F du$$

図で表せば，図―のように，力とその方向の変位を縦軸，横軸とする力―変位線図の，ある変位の範囲での面積になるのです．ですから，力が一定の時は図(a)のように長方形の面積 Pu になり，力が徐々に増える場合には三角形の面積 Pu/2 になります．

より一般には力と変位の関係は直線関係にはなりませんので，上式の定義により仕事を求めることになります．

次に，仕事と相補的な量である補仕事を定義します．力 P によりその作用点でその方向に変位 u が生じる時，補仕事 Wc とは仕事と下記の関係にある量です．

$$W_c = \int u dF$$

$$W + W_c = Pu$$

つまり図で表せば，力―変位線図の，ある力の範囲での面積に相当します．力―変位関係が直線の場合には，W=Wc となります．

4.2. 仕事をされるとエネルギーがたまる

それでは仕事とは何でしょうか？例えば，高いところから物を落とす時のことを考えてみましょう．その物体には重力の作用により，その質量に比例する重力が地球に向かって下向きに作用しています．山の麓から物体を山の頂上まで運びます．物体は負の仕事をしたことになりますが，その結果，この物体には仕事をできる能力が備わったことになります．この外部に対して仕事のできる能力をエネルギーと呼びます．ですから，この状態で下に落ちれば，仕事をすることになります．例えば，岩が山から転げ落ちれば，人家や構造物を破壊したり，木をなぎ倒したりなどの仕事をすることになります．そのような仕事をできるエネルギーを持っていて，それを放出して仕事をしたといえるでしょう．また，高いところから水を落とせば水力発電になりますね．

構造物の場合にも同様に，外力が仕事をすればエネルギーは減少し，外力が負の仕事をすればそればエネルギーとなります．このように外力のエネルギーはその作用点の位置のみの関する量なので外力のポテンシャルエネルギーと呼びます．外力のポテンシャルエネルギーは外力のなす仕事量に負の符号をつけたものになります．

なお，仕事に相補的な補仕事があるように，ポテンシャルエネルギーにも補ポテンシャルエネルギーが定義できます．

4.3. ひずみエネルギー

変形する構造物に外力が作用すると，構造物は変形します．この時,外力は仕事をすることとなりますが，仕事をすればポテンシャルエネルギーは減少します．エネルギー保存則によればこのエネルギーはかたちを変えて存在するはずです．実はこのエネルギーは構造物の内部に蓄えられるのです．これをひずみエネルギーと呼びます．もし外力を取り除けば，無理に変形させせられた状態から解き放たれますので，弓が矢を飛ばすように仕事をすることができます．

4.3.1.　　　軸方向変形によるひずみエネルギー

　トラス部材のように，引張力や圧縮力を受けて軸方向に変形する部材の内部に蓄えられるひずみエネルギーを求める．軸方向力 N を受ける，ヤング率 E，断面積 A，長さ dx の棒要素の伸びは，以下のようになります．

$$d\Delta_x = e_x dx = \frac{s_x}{E} dx = \frac{N/A}{E} dx = \frac{N}{EA} dx$$

ですから，棒の長さが L ならば棒全体に蓄えられるひずみエネルギーは

$$U_N = \frac{1}{2}\int_0^L N d\Delta_x = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{N^2}{EA} dx$$

となります．棒の長さにわたって軸方向力，断面積，材料が同一ならば，以下のように簡単になります．

$$U_N = \frac{N^2 L}{2EA}$$

4.3.2.　　　曲げ変形によるひずみエネルギー

　曲げモーメントは回転を生じさせる作用であり，それに対応する曲げ変形は二つの断面間の相対回転角です．曲げモーメント M を受ける，曲げ剛性 EI，長さ dx の梁要素の相対回転角 dq は以下のようになります．

$$dq = \frac{dx}{r} = \frac{Mdx}{EI}$$

ですから，棒の長さが L ならば棒全体に蓄えられるひずみエネルギーは

$$U_M = \frac{1}{2}\int_0^L M dq = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI} dx$$

となります．棒の長さにわたって軸方向力，断面積，材料が同一ならば，以下のように簡単になります．

$$U_M = \frac{M^2 L}{2EI}$$

4.3.3.　　　せん断変形によるひずみエネルギー

4.3.4.　　　ねじり変形によるひずみエネルギー

4.4. 仕事による解法

4.4.1.　　　仕事量から変位を求める

弾性体では，外力のなす仕事量は，すべてひずみエネルギーとして内部に蓄えられます．この場合には，外力の作用点での作用方向の変位が容易に求まる場合があります．

例題

このように，実仕事量を用いると，特定の変位成分を求めることができます．それでは，他の場合にはどうでしょうか．例えば，外力が二つ以上作用しているとき，外力の作用点の変位は求まるでしょうか？また，外力が作用していない点での変位は求まるでしょう

か？答えは否です．これについては実仕事量から求めることはできません．そこで，次節以降で述べる仮想仕事がパワーを発揮します．

4.5. 仮想仕事と補仮想仕事

実仕事を用いてできることが限定されていることを述べました．そこで，二つの新たな量を導入します．

仮想仕事：仮想的な変位（仮想変位）に対して実際の力がなす仕事.

補仮想仕事：実際の変位に対して仮想的な力（仮想力）がなす仕事.

4.6. 剛体についての仮想仕事の原理

剛体の力学における仮想仕事の原理は変形体に関する原理の基本で，以下のように定義できます.

「剛体が力を受けてつりあっているとき，境界条件を満たす任意の仮想変位に対して，力のなす仮想仕事の総和はゼロである．」

この原理を用いると，静定構造物の荷重・反力・断面力のつり合いから反力や断面力求めることができる．しかし，これ以上の応用はできません.

例題

4.7. 変形体についての仮想仕事の原理

そこで，剛体に対する仮想仕事の原理を，変形体へと拡張します．変形体に関する仮想仕事の原理は，以下のように定義できます.

「変形体が外力を受けてつりあっているとき，幾何学的境界条件を満たす任意の仮想変位を受けるとき，外力の仮想変位に対してなす外部仮想仕事の総和は，内力仮想変形に対してなす内部仮想仕事の総和に等しい．」

この原理は，剛体に関する原理の拡張であって，この正当性の証明はできないが，エネルギーや仕事に関する諸原理・定理の基礎となるものです．

4.8. 変形体についての補仮想仕事の原理

変形体についての仮想仕事の原理と相補的な，変形体に関する補仮想仕事の原理は，以下のように定義できます．

「変形体が，力学的境界条件を満たす一連の仮想外力を受けたとき，仮想外力が実変位に対してなす外部補仮想仕事の総和は，仮想内力が実変形に対してなす内部補仮想仕事の総和に等しい．

4.9. 弾性体の内部仮想仕事

4.9.1. 軸方向変形による内部仮想仕事

トラス部材のように，引張力や圧縮力を受けて軸方向に変形する部材の仮想仕事を求める．軸方向力 N を受ける，ヤング率 E，断面積 A，長さ dx の棒要素に仮想内力として仮想軸力nが生じたとする．この時，実際の伸びは，以下のようになります．

$$d\Delta_x = e_x dx = \frac{s_x}{E} dx = \frac{N/A}{E} dx = \frac{N}{EA} dx$$

ですから，棒の長さが L ならば棒全体の仮想仕事は

$$dW_N = \int_0^L n d\Delta_x = \int_0^L \frac{Nn}{EA} dx$$

となります．棒の長さにわたって軸方向力，断面積，材料が同一ならば，以下のように簡単になります．

$$dU_N = \frac{NnL}{EA}$$

4.9.2. 曲げ変形による内部仮想仕事

曲げモーメントは回転を生じさせる作用であり，それに対応する曲げ変形は二つの断面間の相対回転角です．曲げモーメント M を受ける，曲げ剛性 EI，長さ dx の梁要素に，仮想外力により仮想内力として仮想曲げモーメントが作用したとする．実際の相対回転角 dq は以下のようになります．

$$dq = \frac{dx}{r} = \frac{Mdx}{EI}$$

ですから，棒の長さが L ならば棒全体の内部仮想仕事は

$$dU_M = \int_0^L mdq = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx$$

となります．棒の長さにわたって軸方向力，断面積，材料が同一ならば，以下のように簡単になります．

$$dU_M = \frac{MmL}{EI}$$

4.9.3. せん断変形による内部仮想仕事

4.9.4. ねじり変形による内部仮想仕事

4.10. 単位荷重法

4.11. 積分公式

5.　不静定構造の解析

　すでに学んだように，不静定構造とは，つり合い条件のみから反力および内力を求められない構造物です．不静定構造物の解法には，静定基本形による解法，たわみ角法，三連モーメントの方法，マトリックス法など多くあるが，ここでは，前章で学んだ仕事及びエネルギーの諸原理を用いる最も基本的な方法として静定基本形による方法を学びます．たわみ角法についてはマトリックス法の基礎として位置付け両者の関連と，これまで学習してきた事項との関係を整理します．また，三連モーメントの方法については曲げの伝達機構の理解という観点から言及します．

5.1.不静定構造の利点

　静定構造の場合に，つり合い条件のみですべての反力および内力・応力が求まるのに対して，不静定構造の場合には変形の適合条件を用いることになります．したがって，どちらの解析が容易かは言うまでもないことです．現在ではコンピュータの進歩により静定・不静定の区別をせずに統一的に解析をする手段もあります．しかし，この場合にも解の妥当性を判断するためには，不静定構造物の特性を理解することは必要です．解析あるいは特性の理解がより困難な構造として不静定構造を利用する理由は，その構造物の冗長性にあります．冗長性とは広辞苑によればくだくだと長たらしいこととなっていますが，構造物の場合には，必ずしも最低限必要でない部材を多く持っていることとなります．静定構造物は安定して外力に耐えるだけの最低限必要な形状をしているのに対して，不静定構造物はさらに部材や支点を増やしていることにより，冗長な構造となっています．このことが解析を困難にするわけですが，それと同時にこの冗長性により，構造物は変形しにくく，剛性を増します．さらに，一部の部材や支点が，破損などによりその機能を消失しても，構造物としては安定にその機能を維持することができます．したがって，計算機が発達する以前は，解析が複雑になると解が求まらないという自体を避ける必要があったのですが，今日ではその必要性は薄れ，不静定構造物が多用されています．

5.2. 不静定次数

二次元の場合について，トラス部材とその他の骨組部材に分けて，不静定次数を求める方法を述べます．基本は，利用できるつり合い条件の数と，求めなければならない支点反力，内力の数です．

5.2.1. トラス部材の不静定次数

トラス部材は一様な部材力を持っています．したがって，部材がm個あればm個の未知内力を持つことになります．また，トラス構造ではすべての外力は節点に作用しますので，節点でつり合い条件が二つ立てられますから，節点数がｊならば２ｊ個のつり合い条件が立てられます．ですから支点反力の数をｒとそれば，以下の式で不静定次数が求まります．

$$m + r - 2j$$

例題

5.2.2. 骨組部材の不静定次数

二次元の骨組部材の場合には，軸方向力，せん断力及び曲げモーメントの３成分の内力をすべての断面でもち得ます．もしこのような部材が閉じた部材を構成した場合，その内力を求めることはできません．したがって，まずやるべきことは，閉じた区間がないように仮想的に切断します．切断個所が通常の断面の場合にはその断面で両側の３成分の内力が未知数となります．また，ヒンジで切断した場合には曲げを伝えませんから２成分の内力が未知数となります．また，切断により独立な自由物体がm個になったとすると，それぞれに３つのつり合い条件式が立てられますから，3m の条件式があることになります．ヒンジが一つあると，そこで曲げが伝達されないという条件が付加されます．以上のことから，支点反力数ｒ，通常断面切断数ｋ，ヒンジ切断数ｊ，自由物体数m，内部ヒンジ数ｈとすると，不静定次数は以下のようになります．

$$3k + 2j + r - (3m + h)$$

なお，仮想的な切断は，最低限閉じた区間がないようにしさえすれば，余分に切断しても一向に差し支えない．例えば例の場合に一箇所余計に切断すると，未知数が３つ増える代わりに，自由物体が一つ増えてつり合い条件の式も３つ増えます．結局，不静定次数に変化はありません．

例題

5.3. 静定基本形

　不静定構造物の不静定次数に等しい数の反力や部材力を作用しない構造とすると，静定構造物を作ることができます．これを静定基本形とよびます．各種不静定構造物について静定基本形の例を図に示します．このように一つの不静定構造物に対して静定基本系は複数作ることができます．この時，選択された反力あるいは部材力を不静定反力，不静定部材力といいます．また，これらをまとめて不静定力と呼ぶこともあります．

　元の不静定構造物と，静定基本系に不静定力を荷重として作用させた状態はまったく等価です．ただし，この場合の不静定力の大きさは元の不静定構造物に作用したものと同じでなくてはなりません．ところで，例えば不静定力が反力の場合，静定基本形と元の不静定構造物では支点条件が違っていることになりますが，支点で変位がないような反力を作用さえれば，支点条件は違っていても構造物の状態は同じということになります．不静定力が部材力の場合にも，部材力の有無という相違がありますが，その部材力があった時の変位状態とおなじ状態になるように不静定力が作用していれば，構造物の形態は違っていても構造物の状態は同じということになります．

5.4. 不静定力を求める

　外的一次不静定の場合，不静定力に選んだ支点反力の方向の変位について重ね合わせの原理を適用すれば次式が求まる．

$$d_1 = d_{10} + d_{11}X_1$$

ここで，添え字０は与えられた荷重系に対する量を，添え字１は不静定力 X=1 のみが作用した時の量であることを示す．これらの式は重ね合わせの原理を用いている．もし，支点で変位がゼロであるなら，上式を変形して以下の式が求まる．

$$X_1 = -\frac{d_{10}}{d_{11}}$$

d_{10} および d_{11} は, 単位荷重法その他の方法で求まるから, この式により不静定力が求まる.
第１の添え字は外力を示し，０は与えられた荷重を，１は不静定力（ 大きさは１）を示す．
第２の添え字は変位の位置を示す．この場合には一次不静定であるのですべて同じ個所（１の個所）となります．

ですから，曲げ変形のみを考慮する場合には，与えられた荷重による曲げモーメントを M_0 とし，不静定反力の位置に 1.0 の荷重を載荷した時の曲げモーメントを M_1 とすれば,

$$d_{10} = \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx \qquad d_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx$$

となり，曲げモーメントから不静定力が求まります．

ｎ次不静定構造物の場合，同様にｎ個の式が立てられ，これを連立させて解くことによりｎ個の不静定力が求まります．

$$d_1 = d_{10} + d_{11}X_1 + d_{12}X_2 + ... + d_{1n}X_n = 0$$
$$d_2 = d_{20} + d_{21}X_1 + d_{22}X_2 + ... + d_{2n}X_n = 0$$
$$d_3 = d_{30} + d_{31}X_1 + d_{32}X_2 + ... + d_{3n}X_n = 0$$
$$\vdots$$
$$d_n = d_{n0} + d_{n1}X_1 + d_{n2}X_2 + ... + d_{nn}X_n = 0$$

$$x = d_0^{-1} d$$

$$x = \{X_1; X_2; X_{3;} .....X_n\}^{-1}$$

$$d_0 = \left\{ d_{10}; d_{20}; d_{30;} .....d_{n0} \right\}^{-1}$$

$$d = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & & d_{2n} \\ & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

ここで $$d_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI} dx$$

例題

5.5. 積分公式の利用

上記のように，静定基本形による方法で不静定力を求める場合，曲げモーメントの積の積分計算が多くなります．そこで，積分公式を用いると計算ミスを少なくすることができます．曲げモーメント図は直線，放物線，二次式など比較的単純な曲線の組み合わせになることが多いことから，それらの代表的な組み合わせについて積分値をまとめて示します．

例題

5.6. 各種応答を重ね合わせて求める

一次不静定構造物の場合，荷重及び不静定力 X の作用を受けた状態での反力 R，曲げモーメント M，せん断力 S，軸方向力 N，たわみδなどの力学量は，以下のように表される．

$$R = R_0 + R_1 X$$
$$M = M_0 + M_1 X$$
$$S = S_0 + S_1 X$$
$$N = N_0 + N_1 X$$
$$d = d_0 + d_1 X$$

n次不静定構造物の場合にも同様で，一般に力学量Zは以下のように求まる.

$$z_i = z_{i0} + z_{ij} X_j$$

5.7. たわみ角法の基本とマトリックス法・FEM

5.8. 曲げの伝達機構の理解