

構造力学ノート

Part4

2001年4月1日

皆川 勝

1. エネルギーによる解法 2

前 2 章では、実仕事あるいは仮想仕事を用いて、変位を求める方法を学び、さらにその応用として不静定構造物を解析する方法を学びました。本章では、その他の仕事やエネルギーに基づく諸原理や定理について述べます。

1.1. ポテンシャルエネルギー極小の原理

エネルギー保存則より、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は一定となります。今、おわんの中にボールが這いいている状態から、無理に若干移動した状態を考えます。ボールのポテンシャルエネルギーは増加することになり、その結果運動エネルギーが減少する。したがって、無理にボールを上へ押し上げても、結局ボールはポテンシャルエネルギーのその近辺で最も小さい（すなわち極小）の位置で静止することになります。そして、ポテンシャルエネルギーが極小のときつり合います。これは剛体の運動におけるポテンシャルエネルギー極小の原理です。弾性構造物でも同様の原理が導かれます。ただし、弾性構造物のポテンシャルエネルギーは、外力のポテンシャルとひずみエネルギーの和となります。すなわち、「つり合い状態にある弾性構造物について、外力が指定されたとき、対応する変位状態におけるポテンシャルエネルギーは極小となる」

この原理を用いると、荷重と変位が非線形関係にある構造物のつり合い曲線を求めることができます。

例題

1.2. カスティリアーノの第 1 定理

ある荷重系が作用した状態でポテンシャルエネルギーの極小の原理を適用すると、

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i} [U - P_i v_i] = \frac{\partial U}{\partial v_i} - P_i = 0$$

となり、カスティリアーノの第1定理が導かれます。すなわち、「弾性構造物のひずみエネルギーが変位の関数として与えられているとき、ひずみエネルギーのある点の変位での偏導関数はその点でその方向に作用する外力に等しい」

例題

1.3. 相反作用の定理

重ね合わせの原理より、荷重の載荷する順序によらず弾性線形構造物の内部に蓄えられるひずみエネルギーが同じであることを利用して求められる定理です。影響線を求めるのに効果的に用いられます。

弾性線形構造物が荷重系 P_i を受けて、その点でその方向に変位 v_{li} を生じたとします。さらに、別の荷重系 P_j が作用して、荷重系 P_i の作用点の作用方向の変位が v_{2i} だけ増加すると共に、荷重系 P_j の作用点の作用方向の変位が v_{2j} だけ増加とします。この時、外力群のなした仕事は以下ようになります。

$$\frac{1}{2} P_i v_{ii} + P_i v_{ji} + \frac{1}{2} P_j v_{jj}$$

一方、載荷する順序を逆にした場合には、仕事量は以下ようになります。

$$\frac{1}{2} P_j v_{jj} + P_j v_{ij} + \frac{1}{2} P_i v_{ii}$$

重ね合わせ原理から、いずれの場合にも内部に蓄えられるひずみエネルギーは同じになりますから、結局以下の式が導かれます。

$$P_i v_{ji} = P_j v_{ij}$$

これをベッティの相反作用の定理といい、以下のように表せる。

「荷重系 2 により生じる変位に対して荷重系 1 がなす仕事量は、荷重系 1 により生じる変位

に対して荷重系 2 がなす仕事量に等しい。」

ベッティの定理において、荷重系 1 あるいは 2 を構成する荷重として、各々別々の単位荷重とすれば、以下のマックスウェルの定理が導かれます。

$$v_{ij} = v_{ji}$$

すなわち、「点 i に単位荷重が作用したときの点 j の変位は、点 j に単位荷重が作用したときの点 i の変位に等しい」

例題

1.4. カスティリアーノの第 2 定理

ベッティノ相反作用の定理を導いた同じ問題設定において、荷重系 2 を荷重系 1 の中の、ある特定の点 o に作用する荷重増分 dP_o とします。

荷重増分によるひずみエネルギーの増加は以下のようになります。

$$\Delta U = P_i \Delta v_i + \frac{1}{2} \Delta P_o \Delta v_o$$

ところが、ベッティの相反作用の定理より、

$$\Delta P_o v_o = P_i \Delta v_i$$

となるので、結局

$$\Delta U = \Delta P_o v_o + \frac{1}{2} \Delta P_o \Delta v_o$$

したがって、 $\Delta P_o \rightarrow 0$ となると、 $\Delta v_o \rightarrow 0$ となることから、

$$\frac{dU}{dP_i} = \lim_{\Delta P_o \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta P_o} = v_o$$

となります。これをカスティアーノの第 2 定理といいます。すなわち、

「弾性線形構造物において、荷重作用点のその方向の変位は、ひずみエネルギーをその荷重で微分することにより得られる」

1.5. 補ポテンシャルエネルギー極小の原理

弾性構造物のポテンシャルエネルギーは、外力のポテンシャルとひずみエネルギーの和となること、および、「つり合い状態にある弾性構造物のポテンシャルエネルギーは極小となる」ことをすでに述べました。ここでは、これと相補的な関係にある補ポテンシャルエネルギー極小の原理について説明します。ポテンシャルエネルギーがひずみエネルギー U と外力のポテンシャル V の和であったのと同様に、補ポテンシャルエネルギーは、補ひずみエネルギー U_c と外力のポテンシャル V_c の和です。ただし、ポテンシャルエネルギーの場合には外力が既知で、それに対して生じる変位が未知変数であったのに対して、補ポテンシャルエネルギーの場合には変位が既知で、それに対する外力が未知変数となります。

そして、ポテンシャルエネルギーについて極小原理があったのと同様に、補ポテンシャルエネルギーの場合にも極小原理が成り立ちます。すなわち、「つり合い状態にある弾性構造物において、変位状態が指定されたとき、それに対応する外力について補ポテンシャルエネルギーは極小となる」

ある変位 v_i が指定された状態で補ポテンシャルエネルギーの極小の原理を適用すると、

$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial R_i} = \frac{\partial}{\partial R_i} [U_c - R_i v_i] = \frac{\partial U_c}{\partial R_i} - v_i = 0$$

となります。ここで R_i は指定された変位に対応する外力ですから、通常は指定された変位とは支点変位、対応する外力とは反力となります。なお、線形構造物の場合には $U=U_c$ ですから以下のように、ひずみエネルギーを用いることができます。

$$\frac{\partial U}{\partial R_i} = v_i$$

つまり、未知反力の関数としてひずみエネルギーが表されれば、この式を用いて未知反力が求まることとなります。

1.6. 最小仕事の原理

いま、式において $v_i=0$ とすれば、以下の式が求まります。

$$\frac{\partial U}{\partial R_i} = 0$$

ひずみエネルギーは外力の仕事に等しいことから、上式は変位のない支点における反力は、外力の仕事が最小になるように生じることを表していることから、最小仕事の原理といわれます。これを用いると不静定構造物の不静定反力や不静定内力を求めることができます。

例題

2. 影響線パート 2

2.1. 仮想仕事の原理

仮想仕事の原理を用いると、影響線を容易に求めることができます。そこで、まず剛体に関する仮想仕事の原理を復習しましょう。剛体に関する仮想仕事の原理とは、「剛体に働く力が釣りあっている時、任意の仮想的な変位に対して各々の力のなす仕事の和はゼロである」というものです。

2.2. 反力の影響線

単純梁の支点反力を求める場合に適用しましょう。まず、単純梁に単位荷重が作用しているとします。そこで、支点Aを取り除き、支점에作用するのと同じ反力 R_A を作用させます。すると、この梁の状態は元の状態と同じです。さてこの状態で仮想仕事の原理を適用します。求めたいのは支点反力 R_A の影響線ですので、この点に仮想変位を与えます。与える量は R_A と逆向きに 1.0 とします。すると、A点が動いた分だけこの梁は図のように剛体変位します。このとき、 R_A は仕事をしますが、同時に単位荷重の位置も変位するので仕事をします。これらの和がゼロであるというのが仮想仕事の原理ですから、

$$R_A(x)(-1.0) + (1.0)d(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad R_A(x) = d(x)$$

です。 $R_A(x)$ とは単位荷重の位置 x の関数としての反力 R_A であり、 $d(x)$ は仮想変位ですね。つまり、A点を 1.0 だけ動かしたときの梁の仮想変位形状が反力 R_A の影響線に他なりません。

2.3. せん断力の影響線

それでは、せん断力の影響線はどうでしょうか？この場合には、せん断力による仮想仕事量が $S_C(x)(-1.0)$ になるような仮想変位を考えればいいわけです。この場合、着目点Cにおいて仮想的に切断した自由物体で仕事量を考えます。そうしますと、仮想断面には上下逆向きに $S_C(x)$ が作用していますので、左の部分が d_1 だけ上に、右の部分が $1-d_1$ だけ下に変位すれば、仮想仕事の和は以下ようになります。

$$S_C(x)(-d_1) + S_C(x)(-1+d_1) + (1.0)d(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad S_C(x) = d(x)$$

つまり、せん断力が作用しないようにまず着目点で切り離しておき、そこに相対的に 1.0 のずれ変位を生じさせた時の変位形状がせん断力の影響線になります。ただし、この場合、この断面に作用している曲げモーメントが仕事をしないように、両側のはりが着目点Cにおいて平行になるように変位させなければなりません。

2.4. 曲げモーメントの影響線

曲げモーメントの影響線はどうでしょうか？この場合には、曲げモーメントによる仮想仕事量が $M_C(x)(-1.0)$ となるような仮想変位を考えればいいわけです。この場合もやはり、着目点Cにおいて仮想的に切断した自由物体で仕事量を考えます。そうしますと、仮想断面には正の曲げモーメント $M_C(x)$ が作用していますので、左の部分が q_1 だけ時計回りに、右の部分が $1-q_1$ だけ反時計回りに回転すれば、仮想仕事の和は以下ようになります。

$$M_C(x)(-q_1) + M_C(x)(-1+q_1) + (1.0)d(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad M_C(x) = d(x)$$

つまり、曲げモーメントが作用しないようにまず着目点をヒンジ構造にしておき、そこに相対的に 1.0 の折れ角を生じさせた時の変位形状が曲げモーメントの影響線になります。

2.5. 影響線を求める手順

- まず、求める力が作用しない構造にします。
- 着目点以外の支点では変位しないものとします。
- 中間ヒンジでは折れ曲がりを許すこととします。
- この状態で求める力と逆向きに単位の変位を与えます。
- この時の変位形状が求める力の影響線です。

この方法を Muller-Breslau の原理といいます。静定構造物を例に説明しましたが、この原理は不静定構造にも成り立ちます。相違は影響線の形です。静定構造の場合には、求める力が作用しない構造とした段階で構造物は不安定となり、その結果仮想変位を与えたときのたわみ形状つまり影響線のかたちはすべて直線の集まりとなります。一方、不静定構造の場合には、求める力が作用しない構造としても構造物は安定であり、その結果仮想変位を与えたときのたわみ形状つまり影響線のかたちは曲線を含むこととなります。なお、この場合内部仮想仕事が発生していないことに注意しましょう。

例題

2.6. 変位やたわみの影響線

変位や変形の影響線は、相反作用の定理を用いると、ある特定の荷重に対応するたわみ形状として求めることができます。

今、与えられた梁に単位の移動荷重が作用した系を系 1 とし、求めたい変位の位置にその方向に単位の力を作用させた系を系 2 とする。そしてこれらの系に相反作用の定理を適用すると、第 2 系のたわみ形状が第 1 系の求めたい変位の影響線となります。すなわち、「指定された点に単位の荷重（あるいは集中モーメント）を作用させたときのたわみ形状が、その点のその方向での変位（あるいはたわみ角）の影響線となる。」

例題

3. 弾性論序論
4. 弾塑性論序論
5. コンピュータによる構造解析
序論

以上