構造計算の基礎
―構造力学の基本―

東京都市大学
都市工学科教授　皆川　勝

目次

目次

構造物とは何か，構造力学はなぜ必要か

建設構造物とは何か

- 荷重などの外的要因により, 内部に力を生じ, また変形や変位を受け, 基礎である地盤すなわち大地に力を伝えるために, 野外に自立するもの.

構造力学とは何か

静力学(Statics)

- 静止する物体の力学

動力学(Dynamics)

- 運動する物体の力学

構造力学(Structural　Mechanics)

- 力学の構造物への応用. 主に静力学.

なぜ構造力学が必要か？

構造物のライフサイクル

- 調査→計画→設計→施工→維持管理→更新・廃棄

設計とは

- 考えられる限りの条件の下で生じる結果を予測し，最適な構造形態（材料　寸法　配置）を決定する行為

設計の流れ

- 荷重等条件設定→構造重量分布を仮定→安全な形態を計算→構造重量は仮定と合致→変形・変位照査→完了

8

構造力学におけるモデル化

問題を簡単にするモデル化

構造物や構造物の形

- 梁は，ある断面特性を持つ，1次元の棒とみなす

作用する荷重・支え方などの外的要因

- 荷重は，集中荷重や等分布荷重などに

用いる材料の特性や変形・変位

- いくら荷重をかけても劣化しない，変形はわずか

構造部材の種類

一次元

- 梁：長さが他の2方向に比べ大．横方向の力．
- 柱：長さが他の2方向に比べ大．長さ方向の圧縮力．
- 梁ー柱：長さが他の2方向に比べ大．両方向の力．
- 曲がり梁
- ケーブル

二次元

- 板：厚さに比べ他の2方向の寸法が大．
- 殻

三次元

- 固体

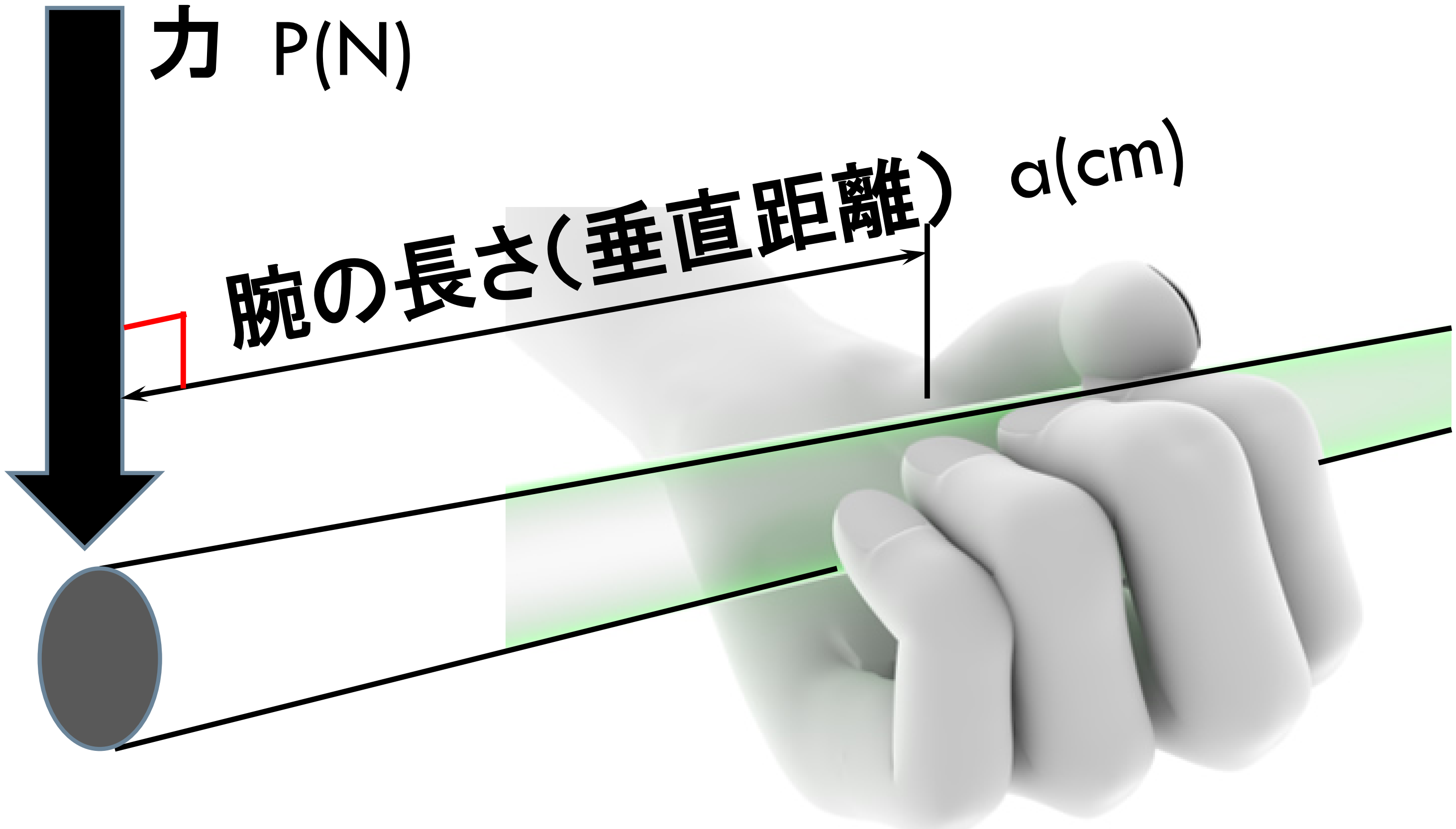
構造物の種類

柱，梁(曲がり梁）

ケーブル, 柱, トラス（棒）, 固体

写真素材足成より転載

モーメントとは何か？



回転させようとする作用　　M=Pa（Ncm）

「手のポーズフーリーイラスト素材」より転載

構造物を支える支点

ローラー支点
- 1方向のみ拘束

ピン支点
- 2方向を拘束

自由端
- 拘束なし

固定端
- 2方向と回転を拘束

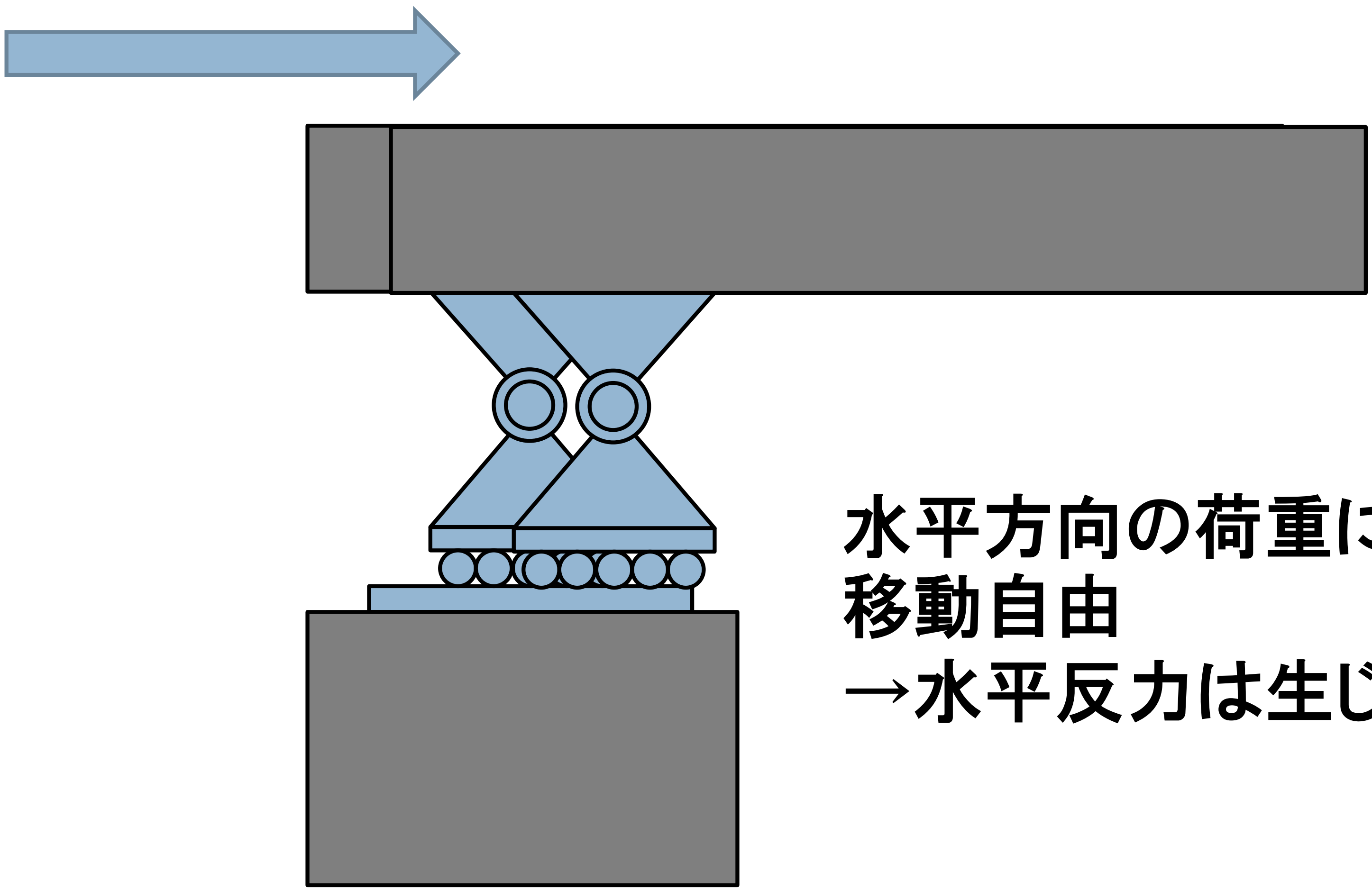
拘束すると力などが発生

ローラー支点：1方向に力が生じる
ピン支点：2方向に力が生じる
自由端：力は生じない
固定端：2方向の力と一つのモーメントが生じる

鋼製のピン支承・ローラー支承

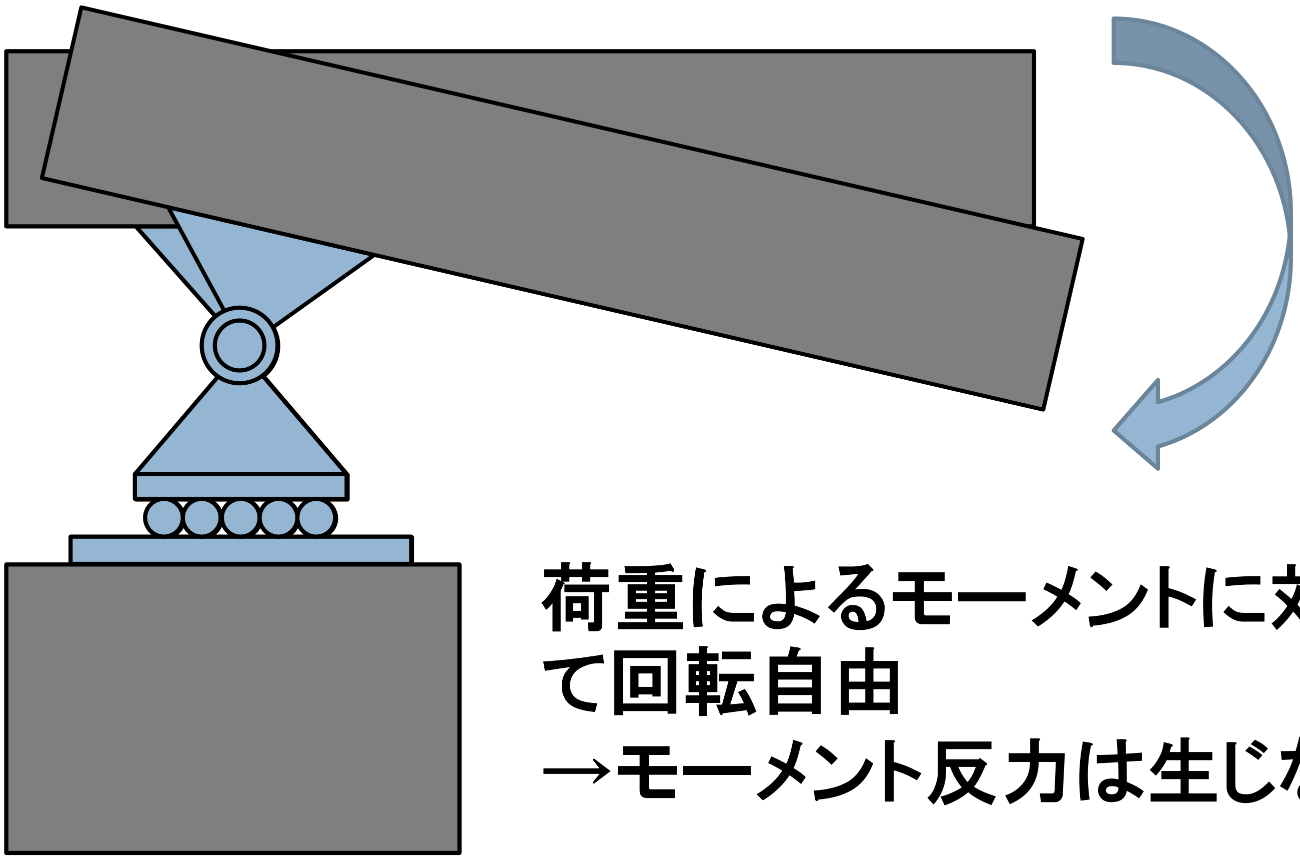
エスケーテクノ（株）HPより転載

ローラー支点（水平移動自由）



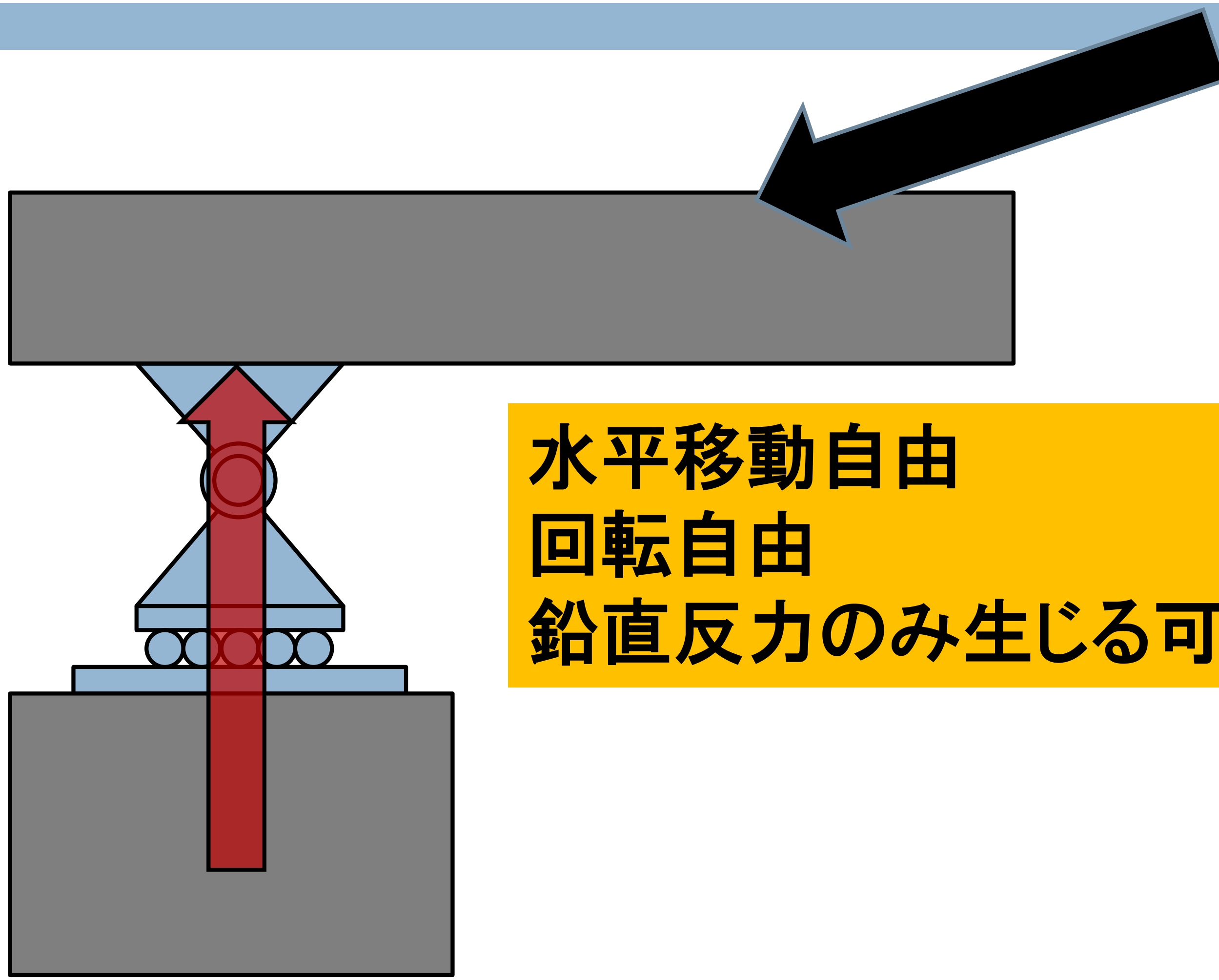
水平方向の荷重に対して
移動自由
→水平反力は生じない.

ローラー支点（回転自由）



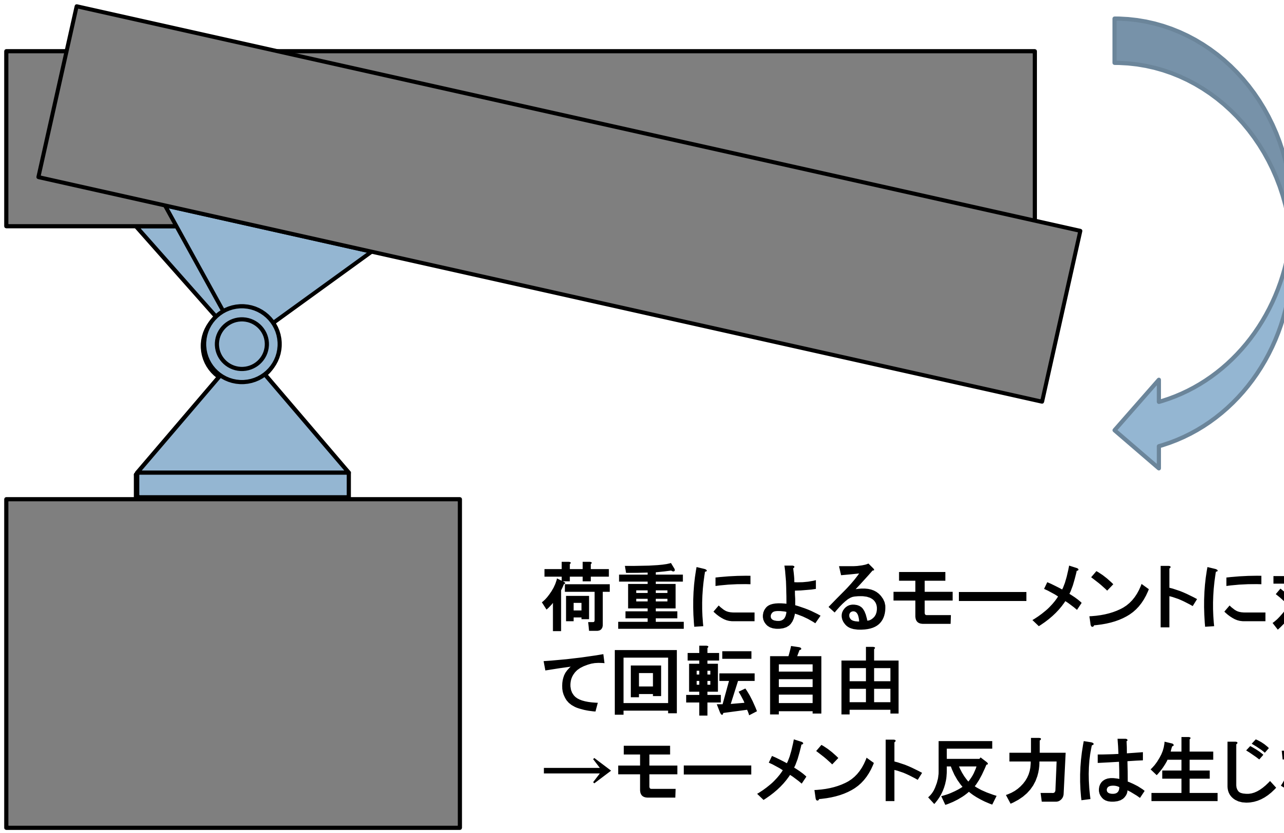
荷重によるモーメントに対して回転自由
→モーメント反力は生じない.

ローラー支点（垂直反力）



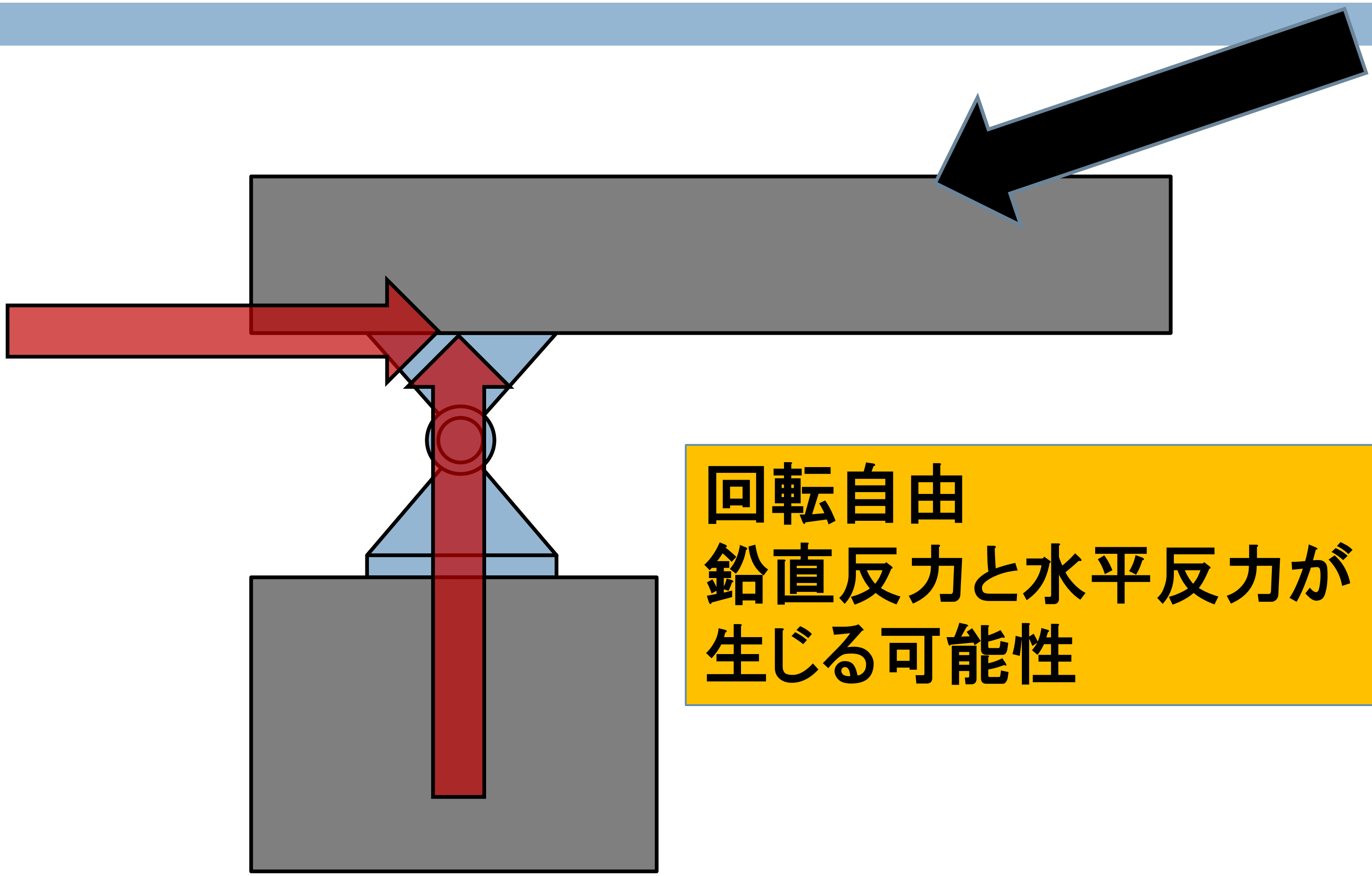
水平移動自由
回転自由
鉛直反力のみ生じる可能性

ピン支点（回転自由）



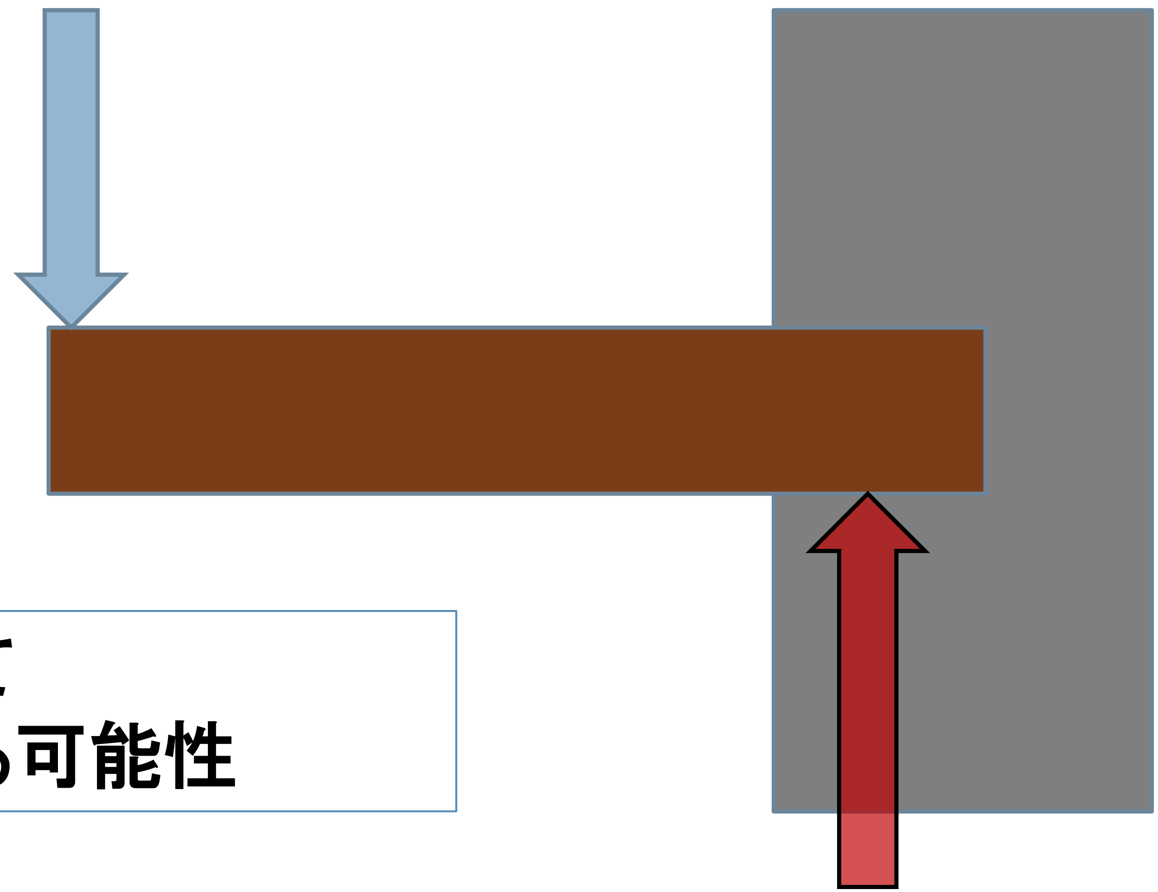
荷重によるモーメントに対して回転自由
→モーメント反力は生じない．

ピン支点（垂直，水平反力）



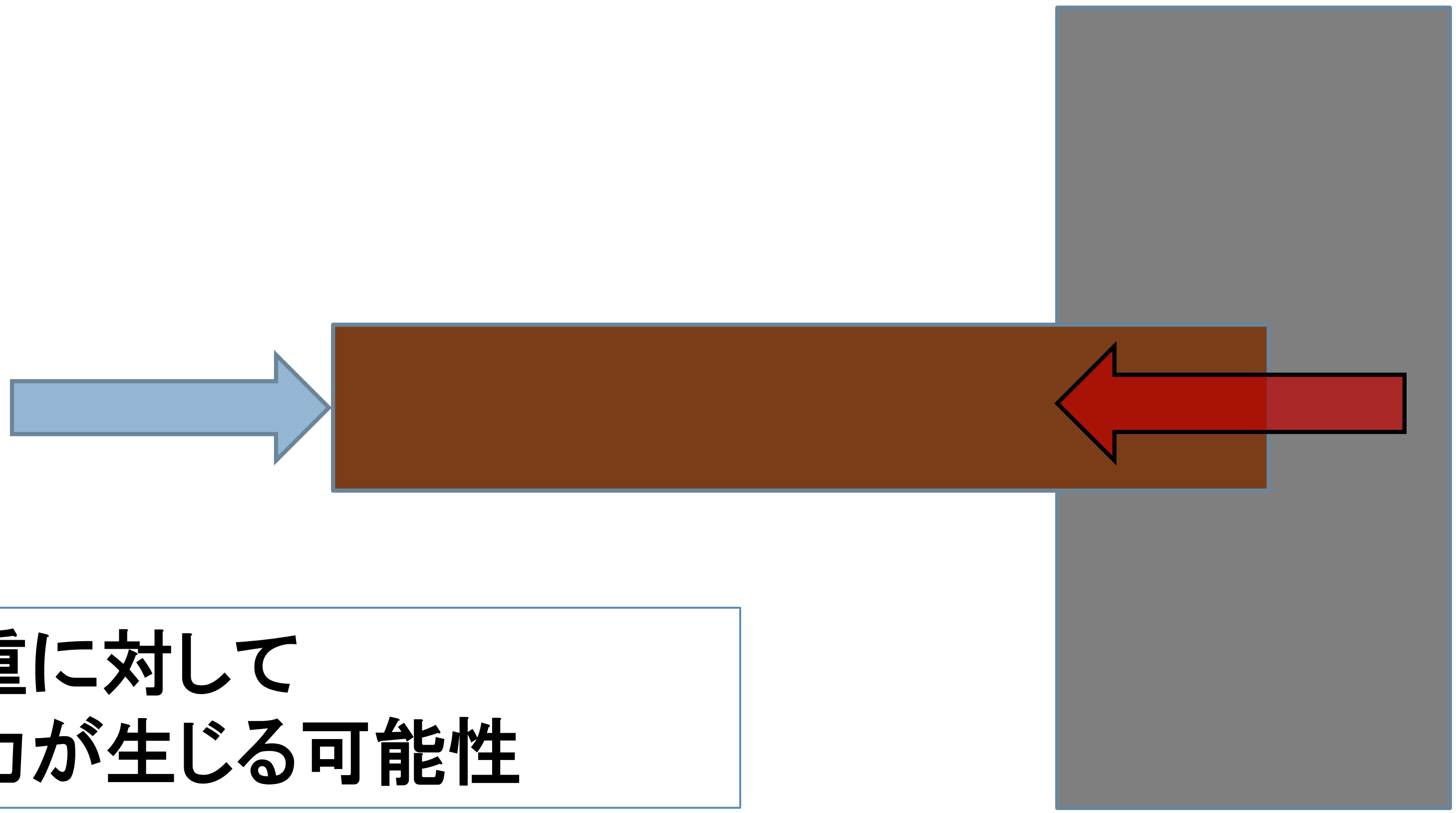
回転自由
鉛直反力と水平反力が
生じる可能性

固定支点(鉛直反力)



**鉛直荷重に対して
鉛直反力が生じる可能性**

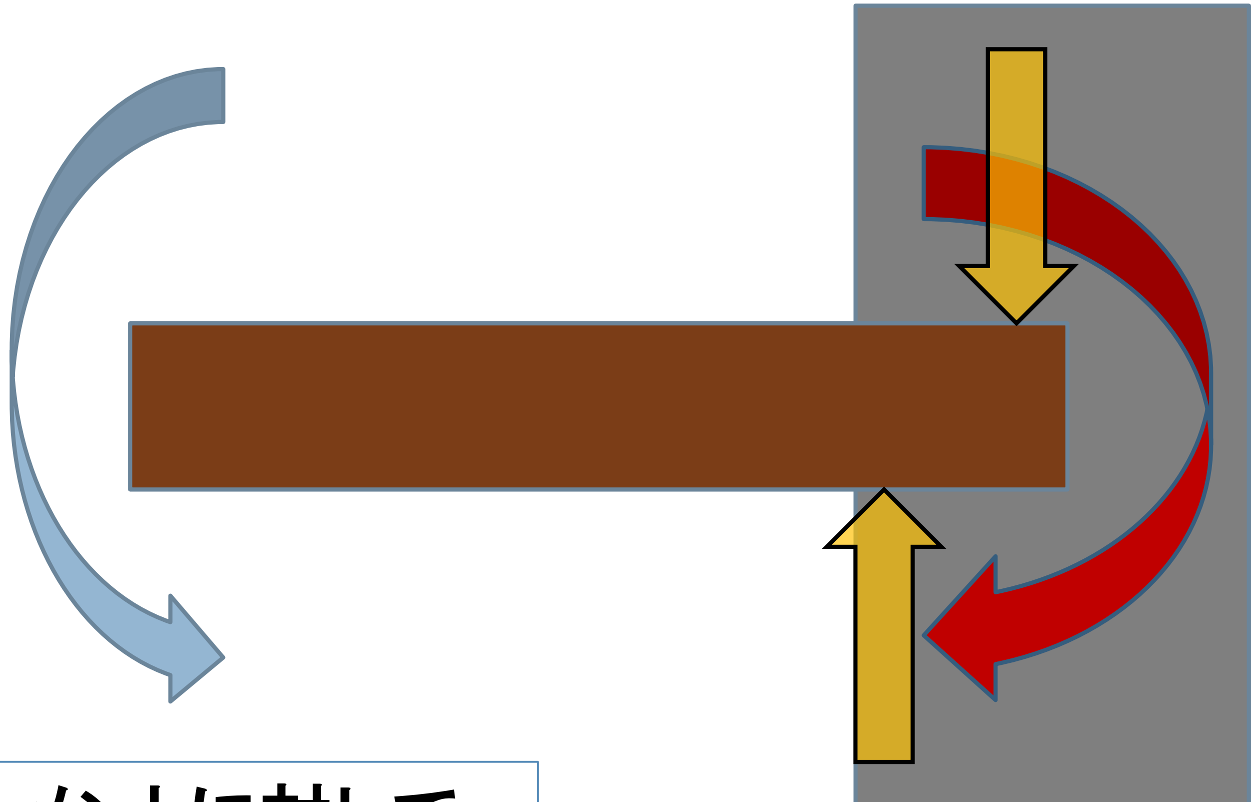
固定支点(水平反力)



水平荷重に対して
水平反力が生じる可能性

固定支点（モーメント反力）

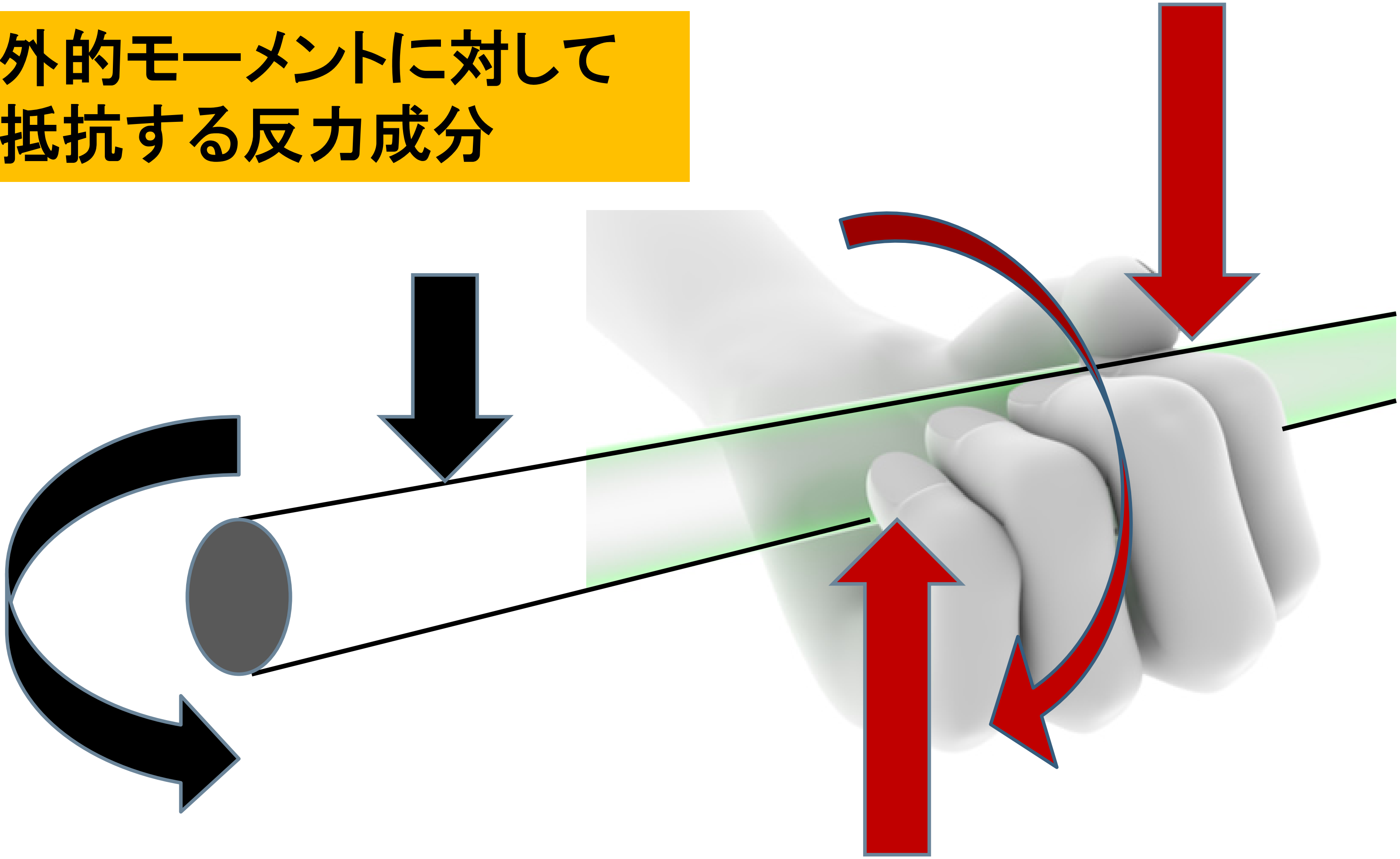
モーメント反力
の正体は
上下から
抵抗する偶力



荷重によるモーメントに対して
モーメント反力が生じる可能性

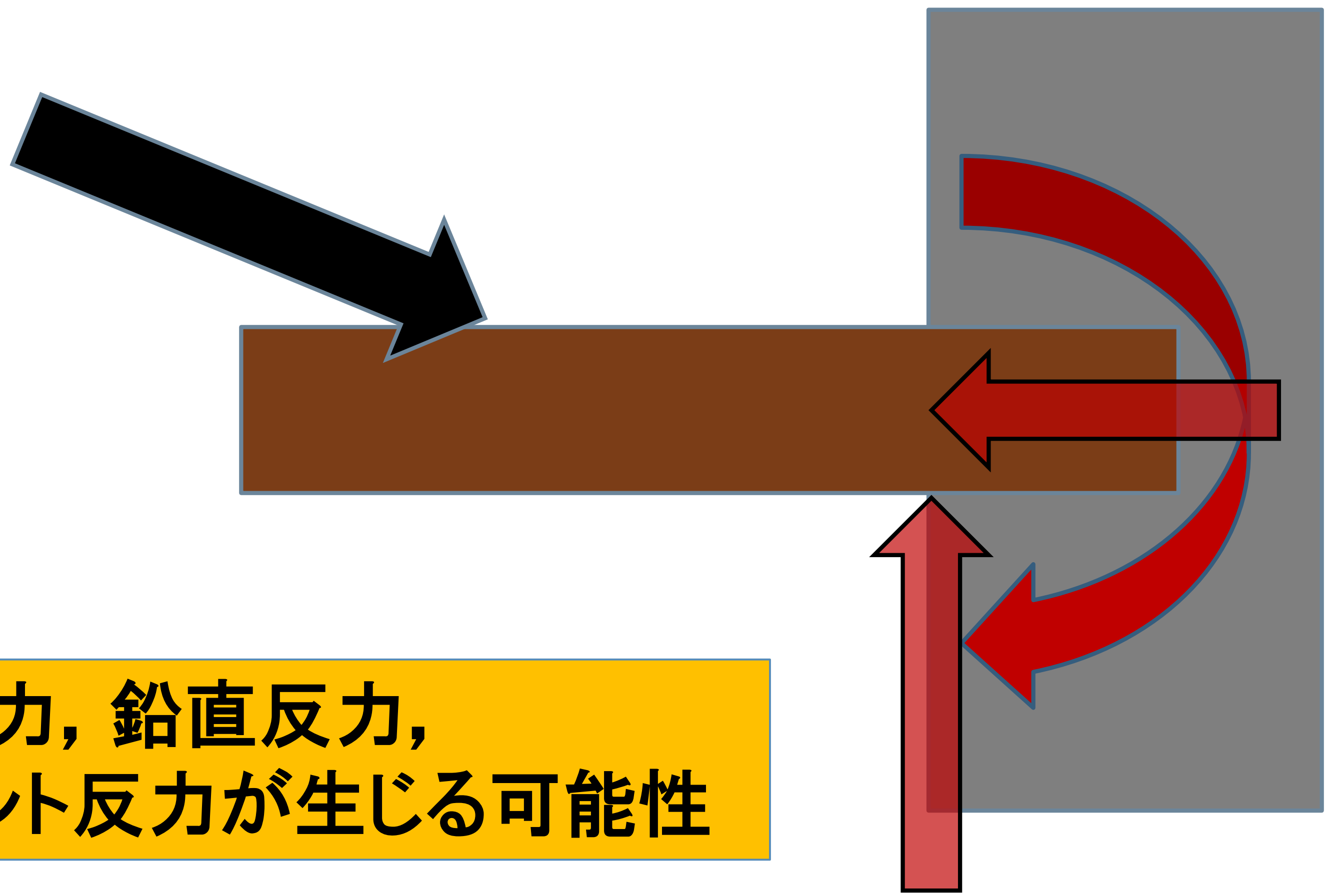
モーメント反力とは何か？

外的モーメントに対して
抵抗する反力成分



「手のポーズフーリーイラスト素材」より転載

固定支点（3つの反力成分）



水平反力，鉛直反力，
モーメント反力が生じる可能性

構造物に作用する荷重モデル

集中

- 面積のない点に作用.

等分布

- 単位長さあたり等しい強さの力. 四角形で表示

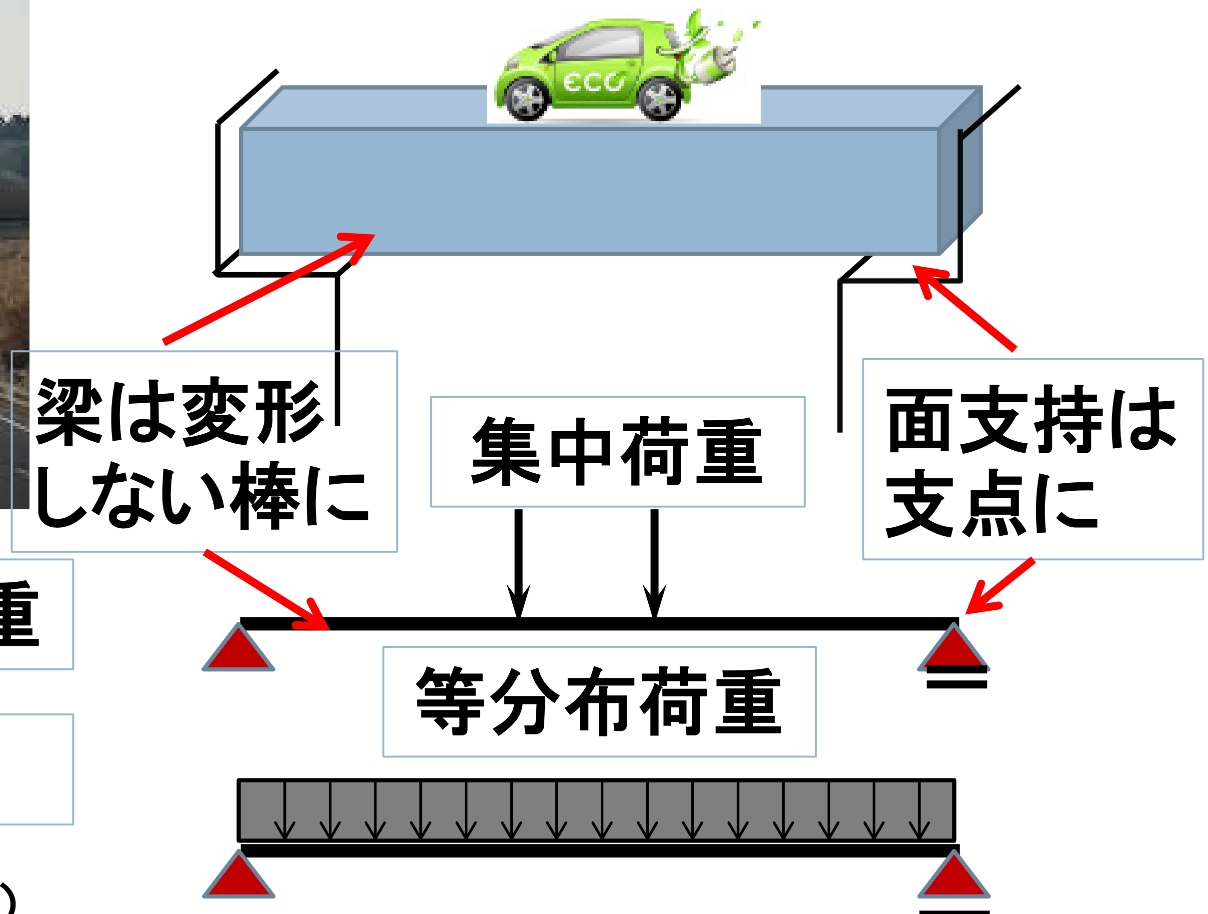
等変(三角形)分布

- 単位長さあたりの力が等しい比率で増減する力. 三角形で表示

集中モーメント

- 一点に集中して回転作用が働く

問題を簡単にするモデル化



活荷重：車両の輪荷重

死荷重：材料の重さ

（建築では，積載荷重，固定荷重）

Pro.foto無料画像転載，駒井春本HPより転載

27

つり合い，静定と不静定，安定と不安定

静止している構造物（つり合い）

静止とは何か

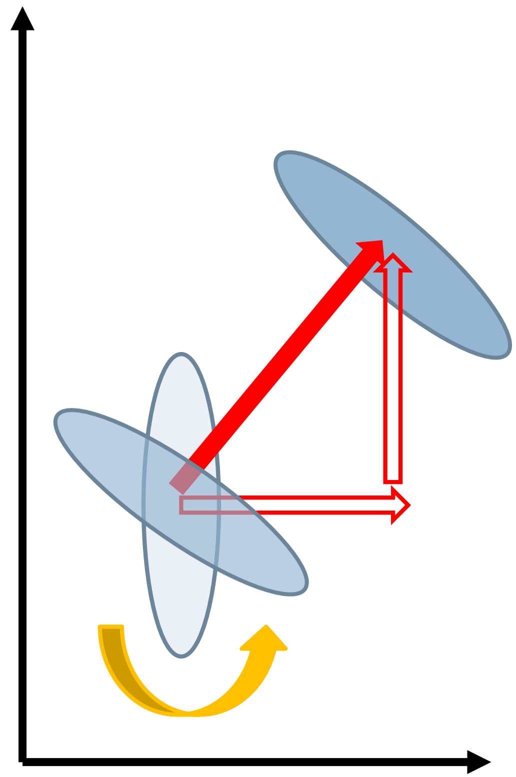
- 並進運動も回転運動もしないこと.

並進運動しない条件

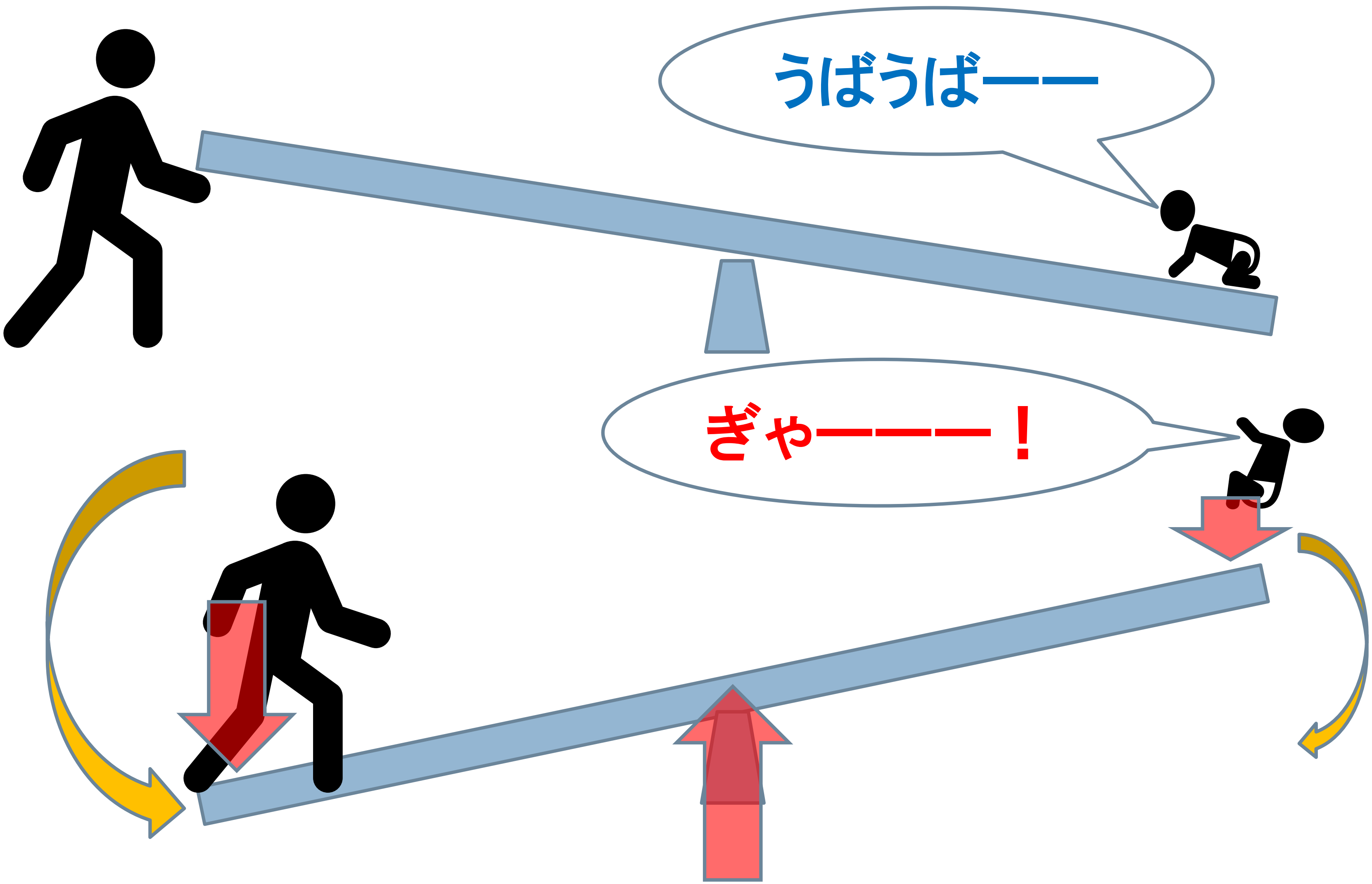
- 2次元空間なら，二方向に移動しない.
- 2方向の合力がゼロ

回転運動しない条件

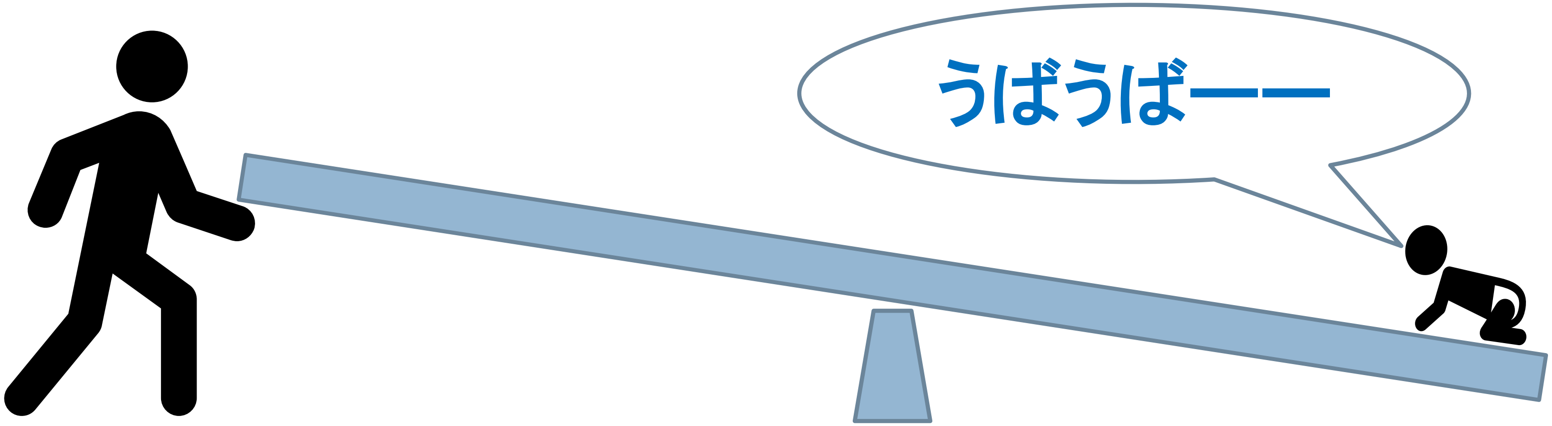
- 2次元空間なら，平面内で回転しない.
- モーメントがゼロ.

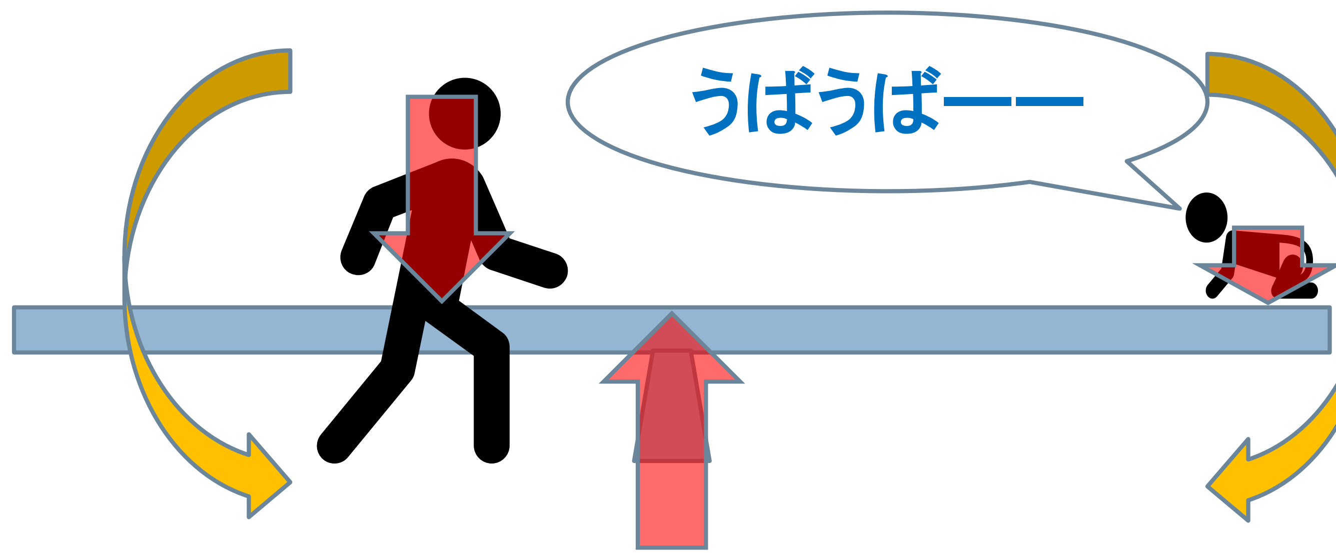


つり合わないと･･･

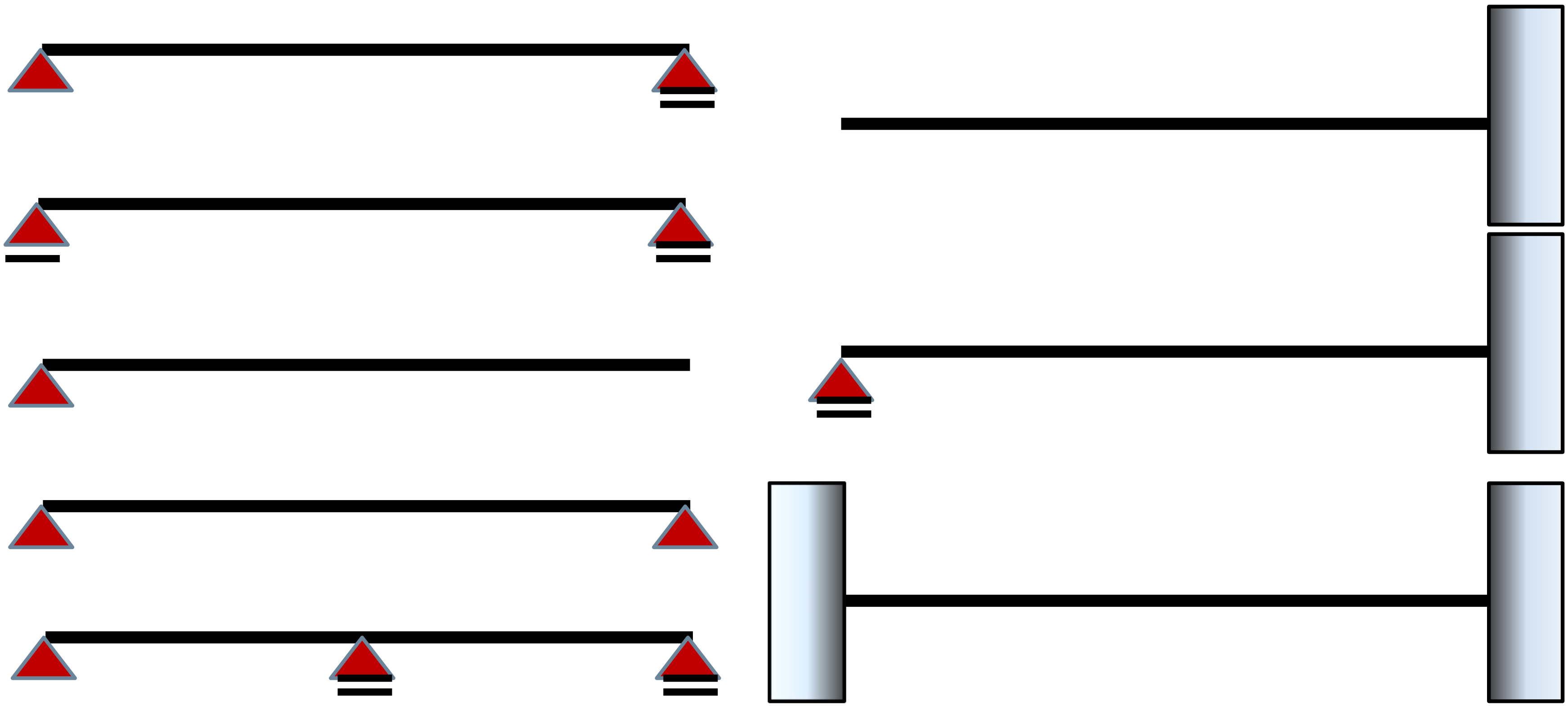


つり合うということ





二次元構造の安定・不安定

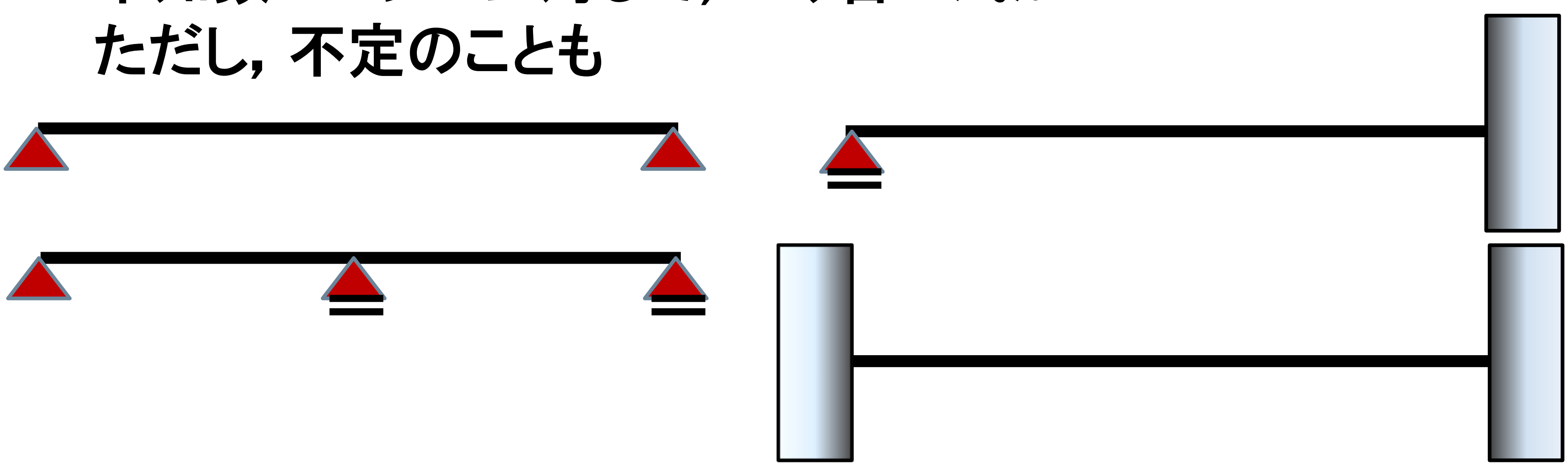


安定と不安定

- 安定：Stable
  静定または不静定（後述）
  未知数3つ以上に対して，つり合い式が3つ
  ただし，不定のことも
- 不安定：Unstable
  静力学により反力が決定できない．
  未知数2つ以下で，つり合い式が不成立

静定と不静定

- **静定**：Statically Determinate
  静力学により反力が決定できる.
  未知数3つに対して，つり合い式が3つ
  ただし，不定のことも
- **外的不静定**：Statically Indeterminate
  静力学により反力が決定できない.
  未知数4つ以上に対して，つり合い式が3つ
  ただし，不定のことも

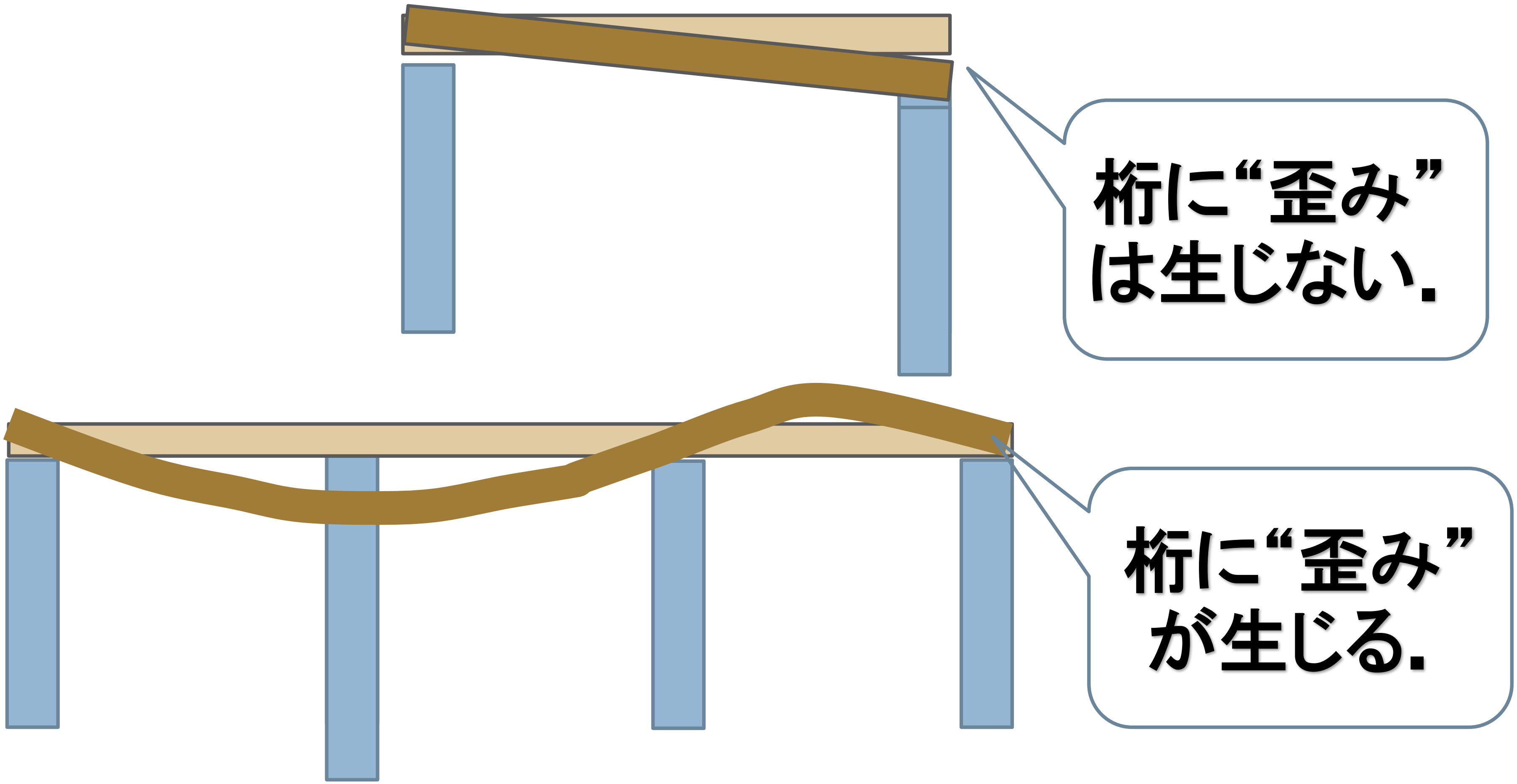


静定構造から不静定構造へ

- 静定構造解析が容易.
  - 不同沈下に対して応力が生じない.
  - 拘束条件が一つでも減ると崩壊する.

- 不静定構造
  - 解析が比較的複雑. →コンピュータの発達で障害なし.
  - 不同沈下で応力が発生. →基礎構造の性能が重要.
  - 拘束条件が減っても, 即崩壊とはならない. 冗長性.

静定と不静定　不同沈下の影響



解析が容易に，地盤技術も向上．不静定構造へ．

はりの反力　単純ばりと片持ちばり

荷重と反力は共に外力

荷重(Loads)

- 外的な作用により構造物に作用する外力

反力(Reaction)

- 荷重の反作用として，支点に作用する外力

荷重→内力→反力

- 荷重が徐々に作用すると，内力と反力が次第に増加

荷重→反力→内力→応力度→ひずみ→変位

反力を求める.

ステップ1：自由物体図

- 支点を除き，作用する可能性のある反力に置換.

ステップ2：すべての外力を集中力と集中モーメントに

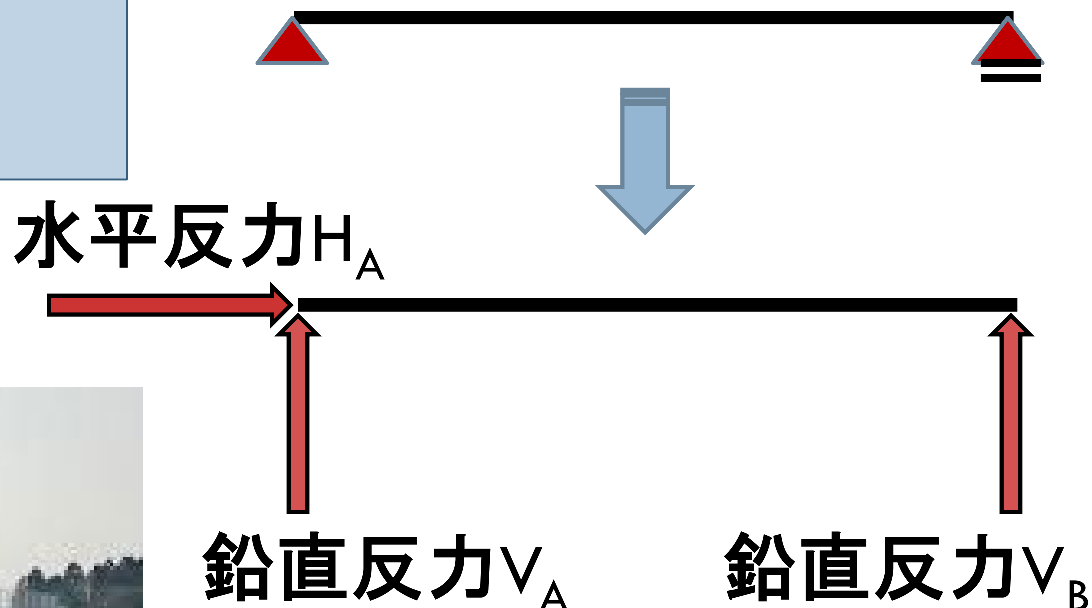
- 分布荷重は，荷重図の重心に作用する集中荷重に.

ステップ3：3つの未知反力を三式で解く

- つり合いの三式を解く.
- 3つ以上の反力の成分があると解けない.
- 不安定構造物は求まらない.

単純梁

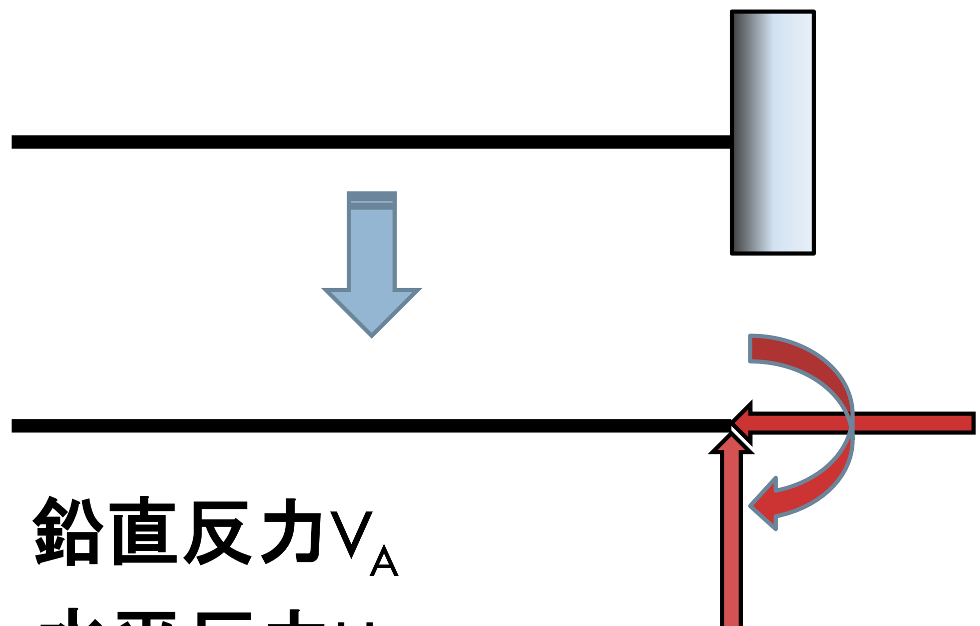
自由物体図
FREE BODY DIAGRAMS



駒井春本HPより転載

片持ち梁

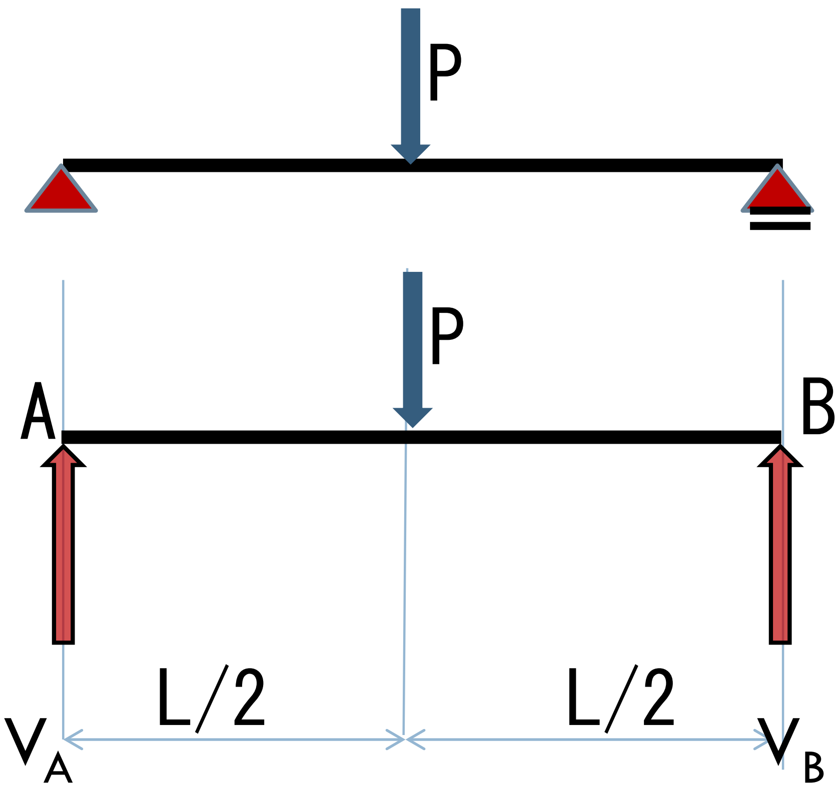
自由物体図
FREE BODY DIAGRAMS



鉛直反力V_A
水平反力H_A
モーメント反力M_A

カンチレバー技術研究会HPより転載

はりの反力を求める手順



水平方向の外力の和はゼロ

鉛直方向の外力の和はゼロ

A点周りのモーメントの和はゼロ

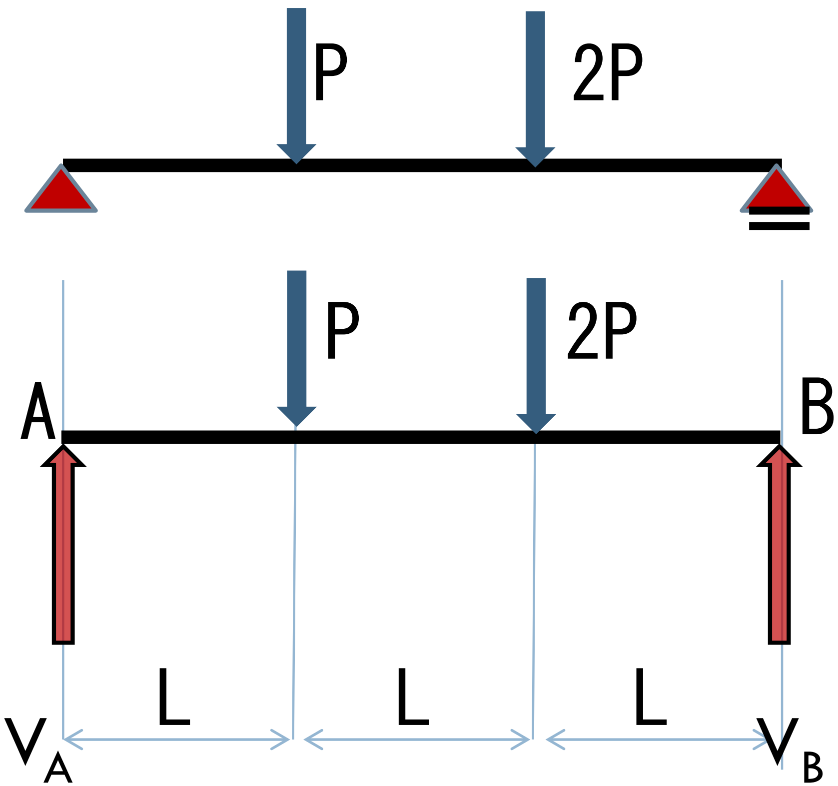
B点周りのモーメントの和はゼロ

その他の点周りのモーメントの和もゼロ

独立な3式を用いて

解答: $V_A=(1/2)P$, $V_B = (1/2)P$

集中荷重を受ける単純梁



$$\sum H = 0$$

$$\sum V = v_A + v_B - P - 2P = 0$$

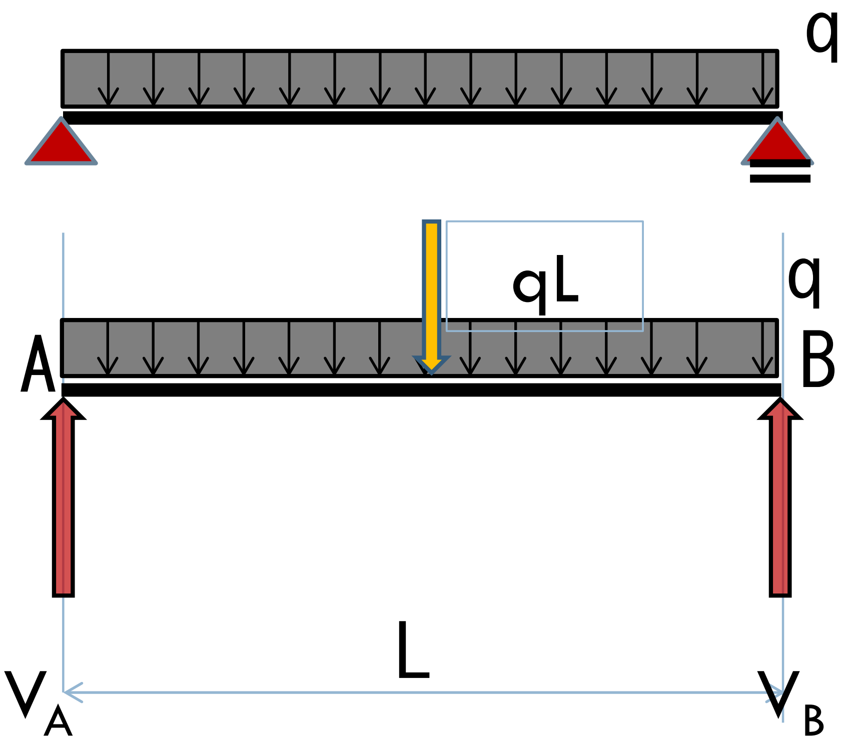
$$\sum M_B$$

$$= v_A 3L + v_B 0 - P2L - 2PL = 0$$

解答:

V_A=(4/3)P, V_B = (5/3)P

等分布荷重を受ける単純梁

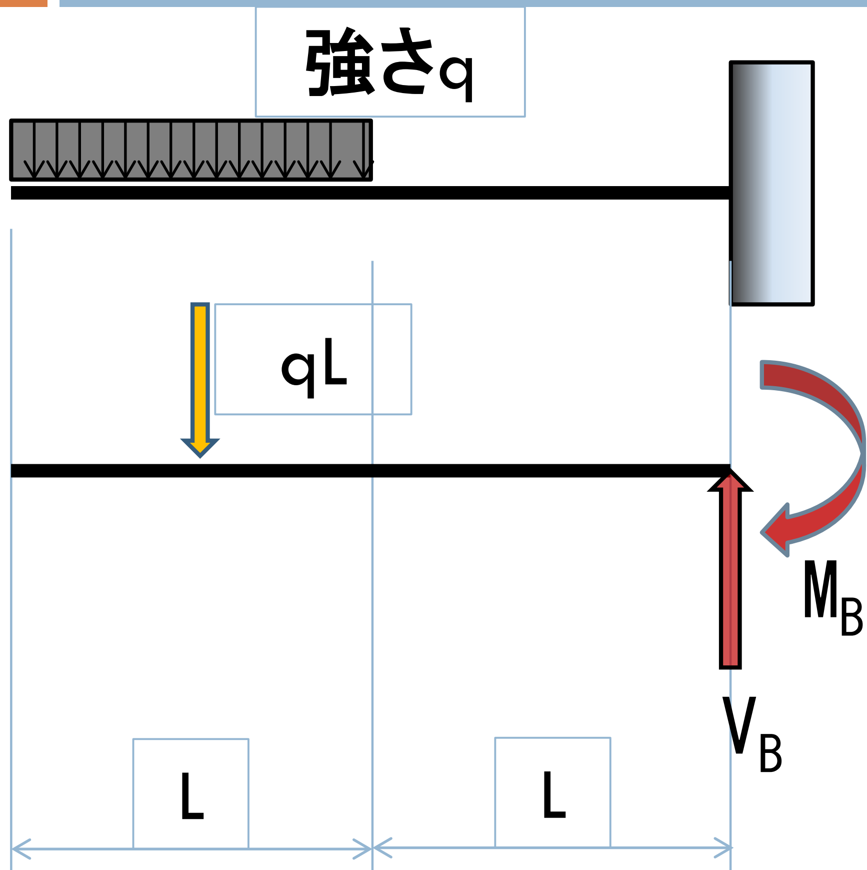


分布荷重は，荷重図の重心に作用する集中荷重に置換

解答：

V_A=(1/2)qL, V_B = (1/2)qL

部分載荷の等分布荷重を受ける片持ち梁の反力



分布荷重は，荷重図の重心に作用する集中荷重に置換

水平の外力はない．

鉛直方向

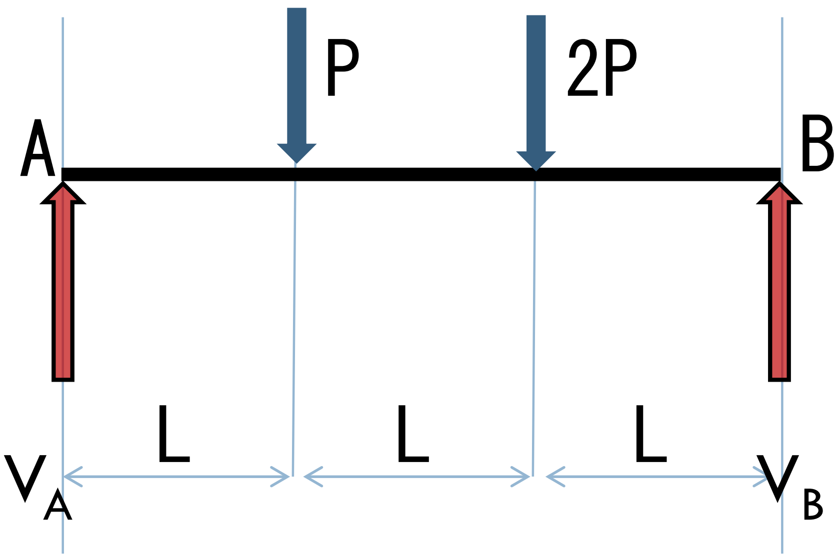
$\Sigma V_{\uparrow}=$ -qL + V_B = 0

B点周りのモーメント

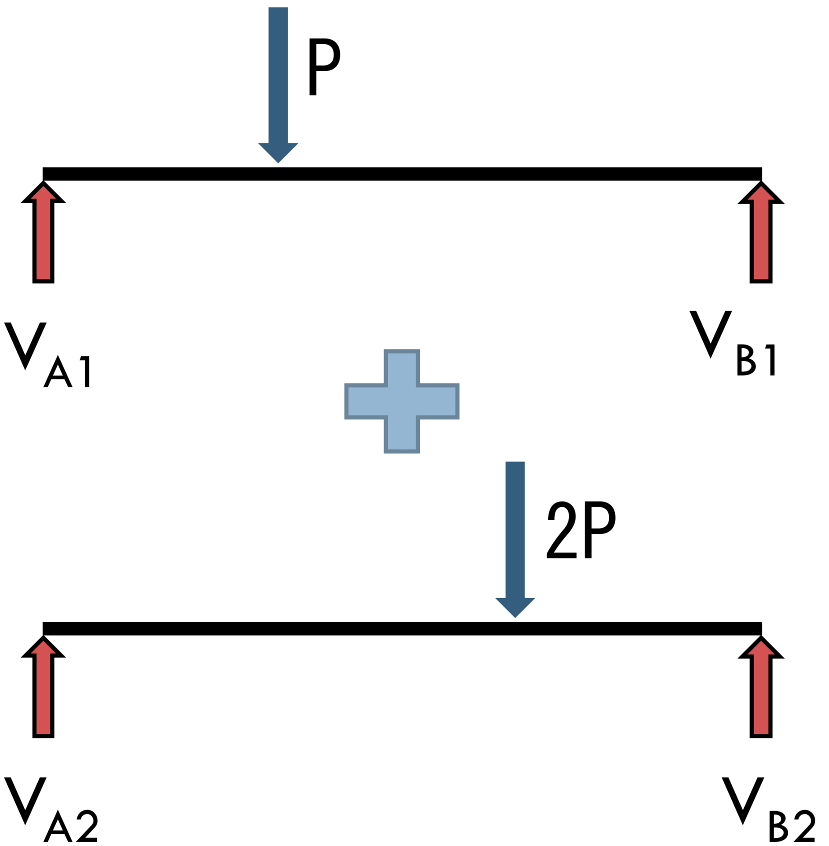
$$\Sigma M_{B\circlearrowright}=-qL\left(\frac{3}{2}L\right)+M_B=0$$

解答 $M_B=\frac{3}{2}\mathrm{q}L^2, V_B=qL$

重ね合わせることができる



個々の荷重に対する反力を加算すると，全体の荷重に対する反力が求まる．（重要）



土木と建築の用語の相違

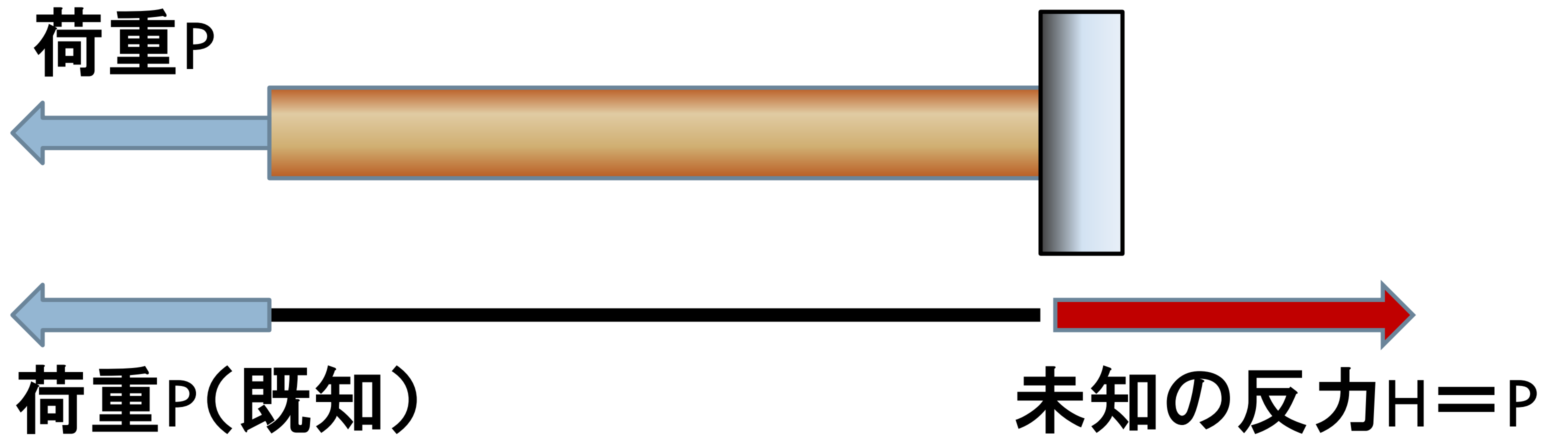
土木と建築における用語の相違

土　　　木	建　　　築
死荷重，活荷重	固定荷重，積載荷重
ラーメン	架構，ラーメン
応力度，（単に応力ともいう．）	応力度
合応力，断面力，部材力	応力
―	応力図（曲げモーメント図等の総称）
影響線	―
部材軸	材軸
主鉄筋　など	主筋　など（“鉄”を省略）
有効高さ	有効せい
スターラップ	あばら筋　などRCに関して相違が多い．

48

はりの曲げモーメントとせん断力

軸力部材の断面力

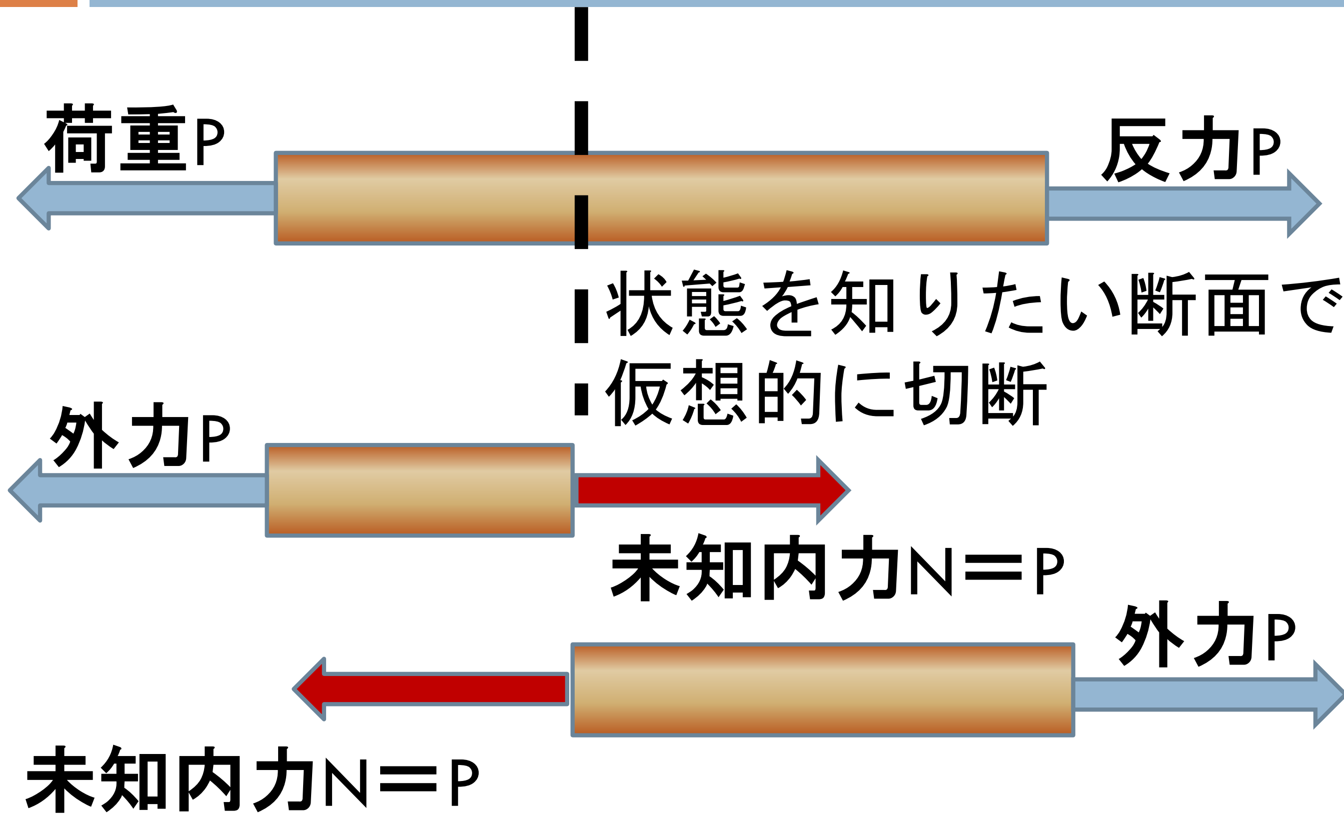


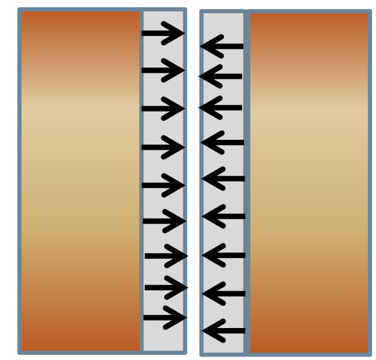
既知の荷重に対して，未知の反力を自由物体図により求めた．

構造物(棒)の内部を力が伝わったはず．そうでなければ反力は生じない．

荷重→反力→断面力→応力度→ひずみ→変位

仮想切断して，自由物体図

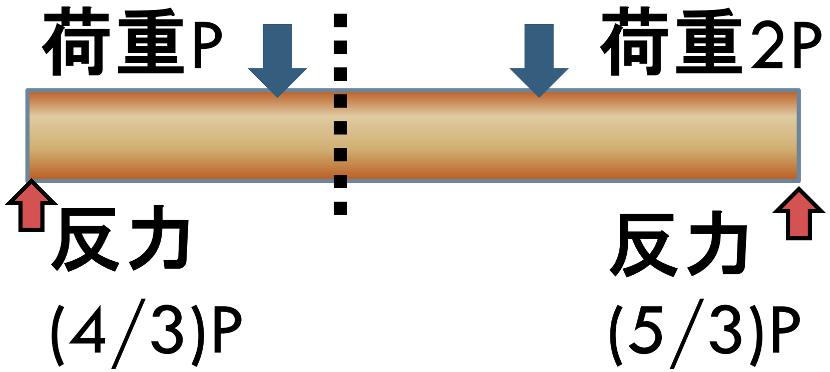


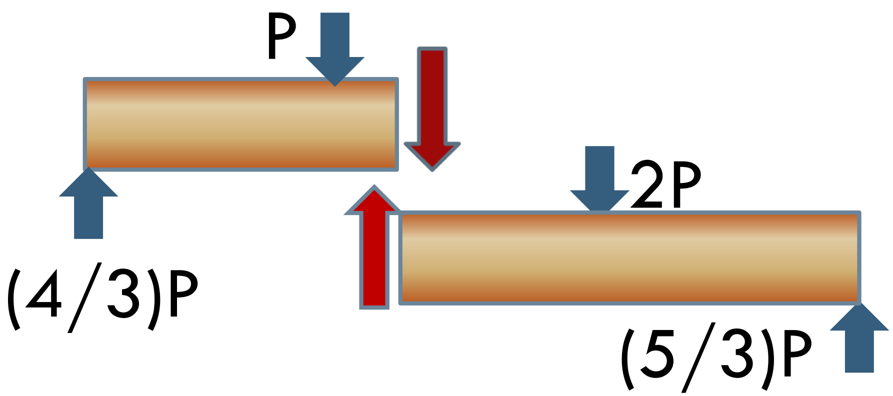


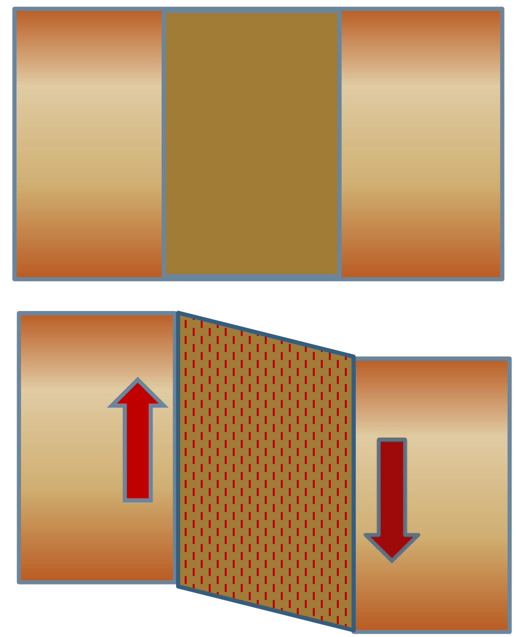
正体：分布力

未知内力が求まる．この正体は何か？
→原子・分子レベルでの断面の結合力の総和

梁の曲げにおける断面力（1）—曲げによるせん断力—





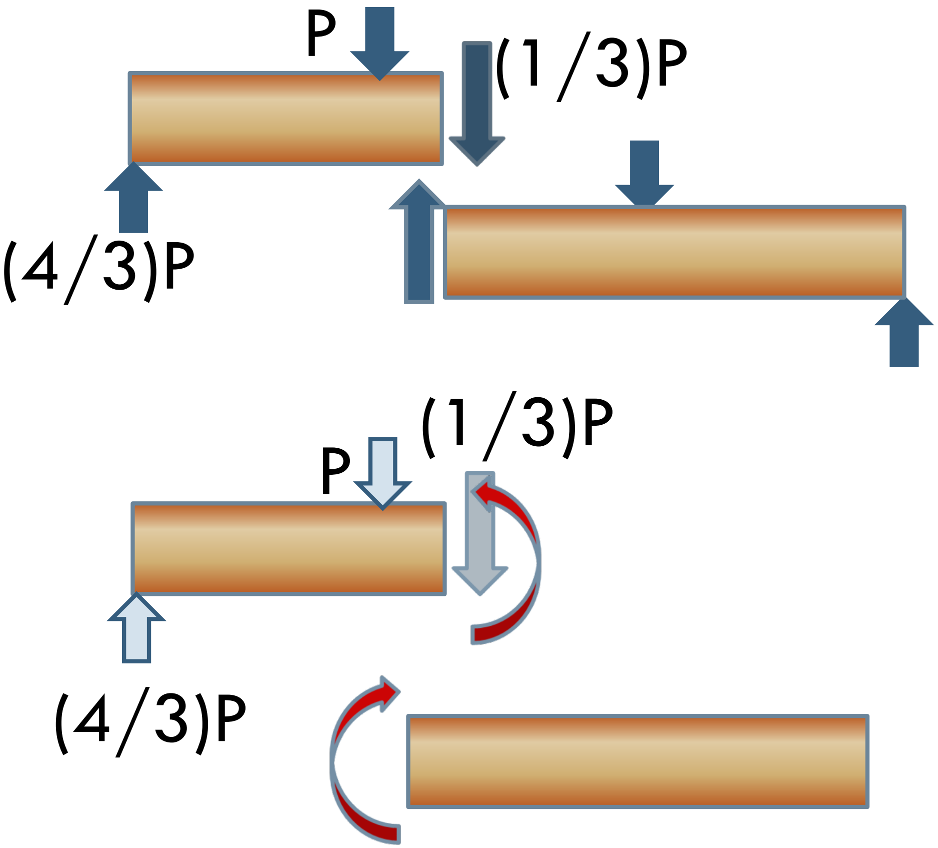


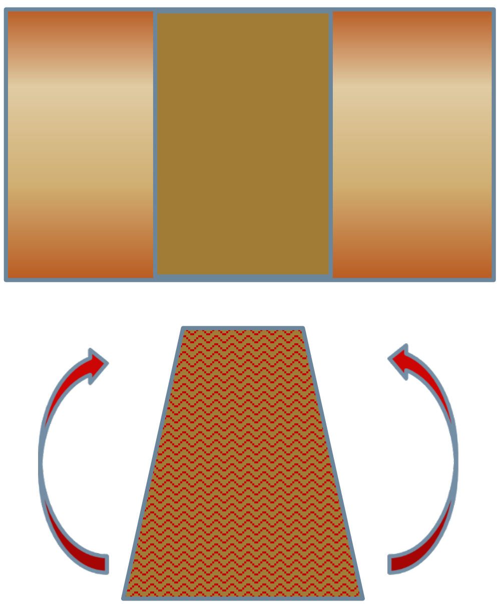
この方向の変形を正

上下のずれに抵抗する断面力が存在し，鉛直につり合う.

せん断力 SHEAR FORCE（SHEARING FORCEともいう.）

梁の曲げにおける断面力(2) ー曲げモーメントー





この方向の変形を正

断面の曲げに抵抗する内力が存在して全体がつり合う.

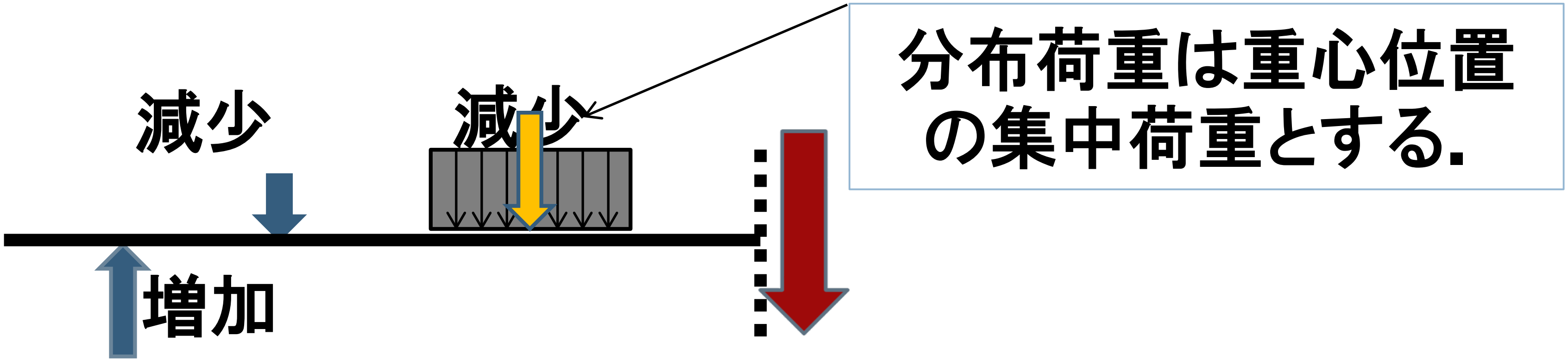
曲げモーメント BENDING MOMENT

せん断力の計算方法

せん断力

断面より左側に作用している力の，上向きを正とした総和.

（断面より右側を考えるときは，下向きを正とした総和.）

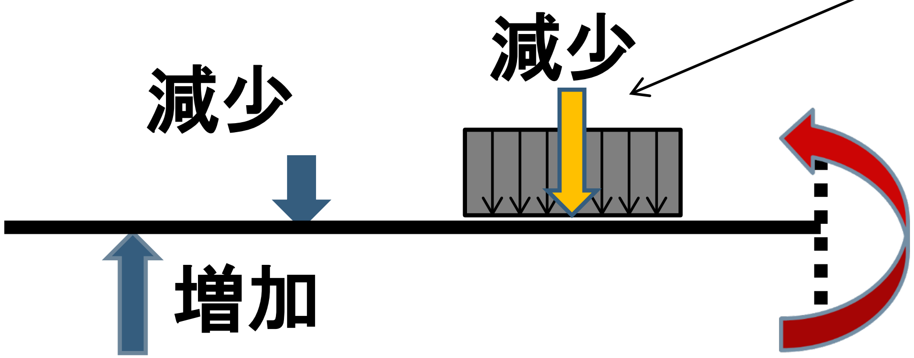


曲げモーメントの計算方法

曲げモーメント

断面より左側に作用している力が断面周りに持つモーメントの，時計回りを正とした総和．

（断面より右側を考えるときは，反時計回りを正とした総和）

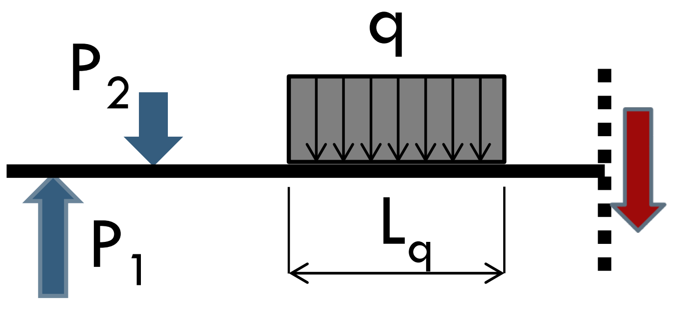


分布荷重は重心位置の集中荷重とする．

SFおよびBMの計算方法

せん断力

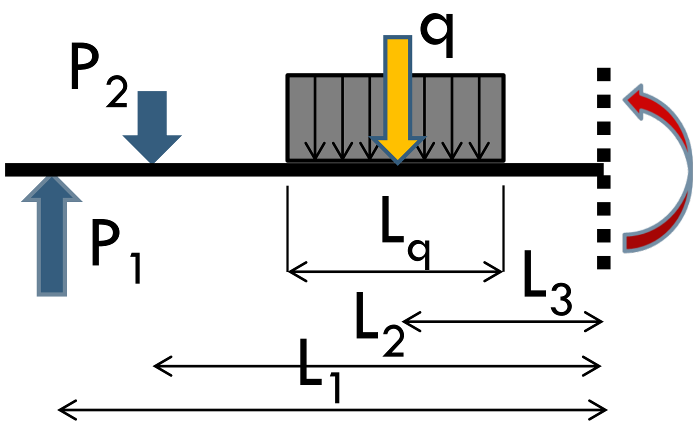
断面より左側に作用している力の，上向きを正とした総和.



$$S_x = \quad +P_1 \quad -P_2 \quad -qL_q$$

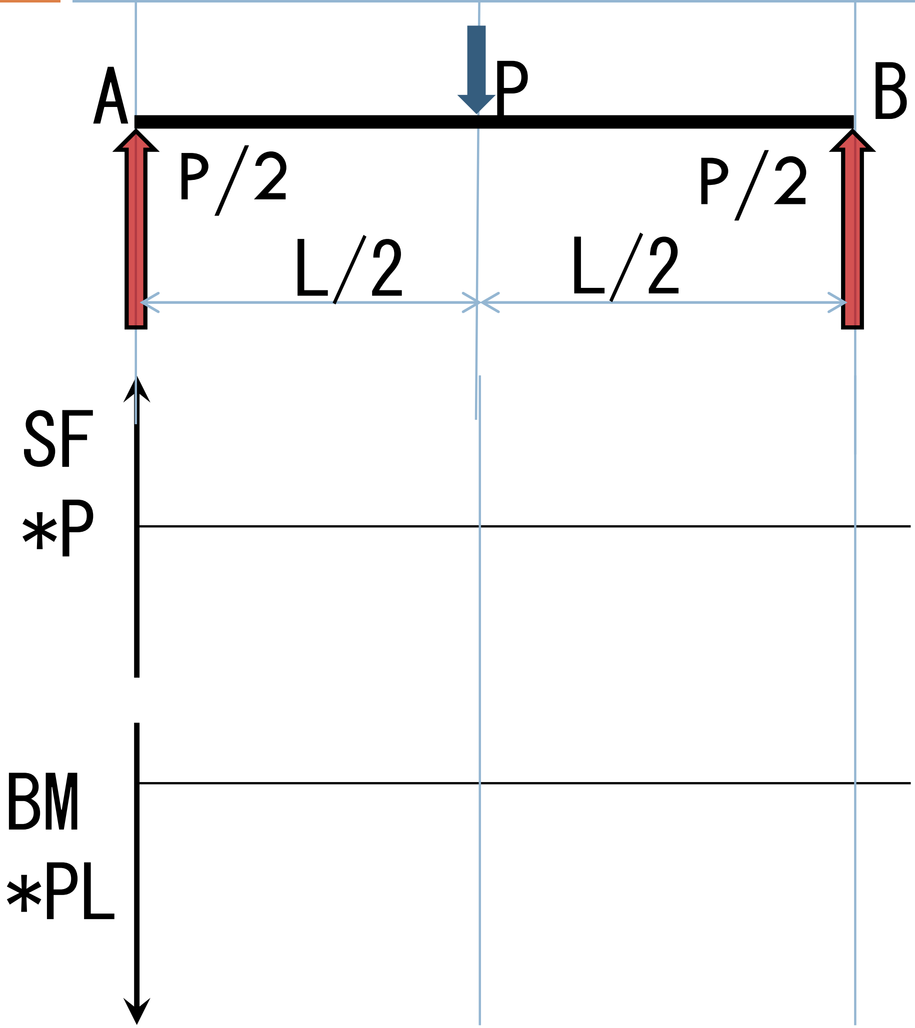
曲げモーメント

断面より左側に作用している力が断面周りに持つモーメントの，時計回りを正とした総和.



$$M_x = +P_1L_1 \quad -P_2L_2 \quad -qL_qL_3$$

集中荷重を受ける単純梁のS.F.&B.M.



まずは反力をすべて求める.

- 計算違いしたらすべておじゃん.

区間に分割

- 集中外力作用位置，分布荷重の両端，分布パターンが変わる位置で分割.

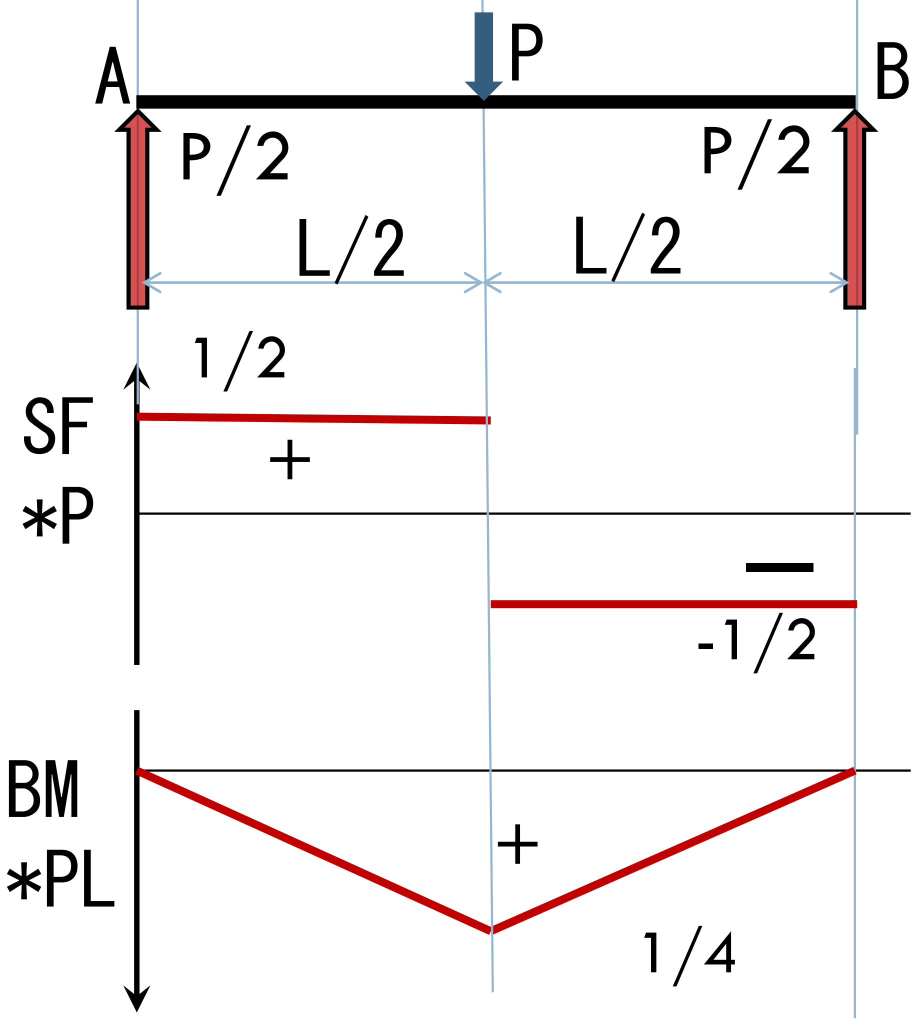
各区間で計算

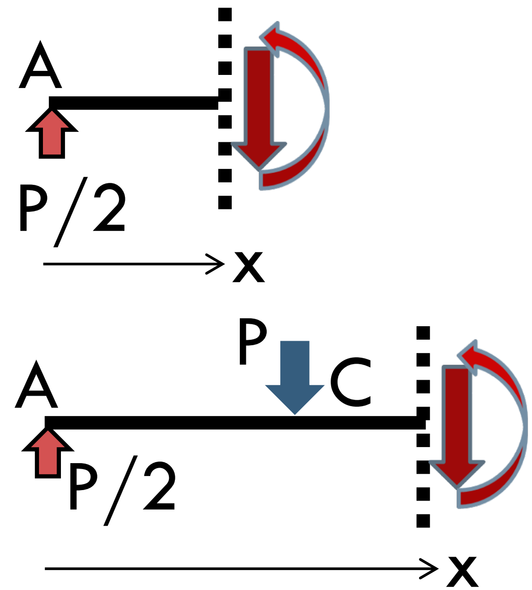
- 説明した方法で.

図化

- 曲げモーメント図，せん断力図

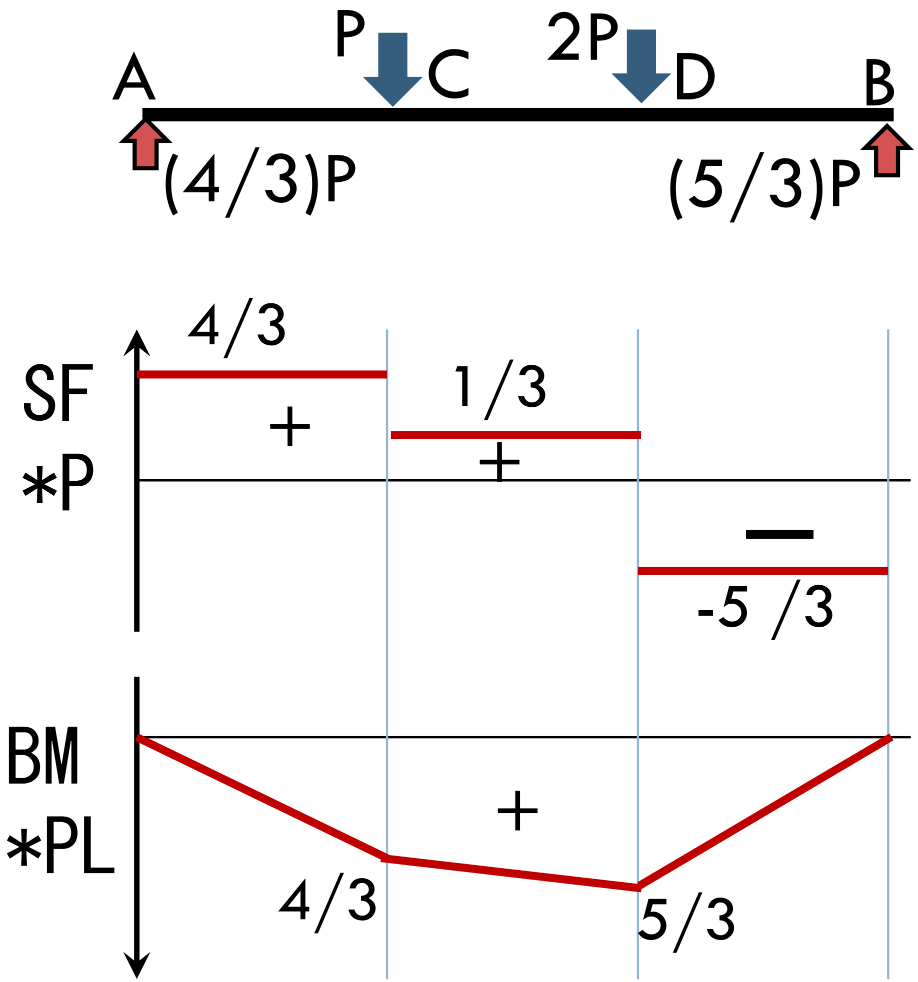
集中荷重を受ける単純梁のS.F.&B.M.

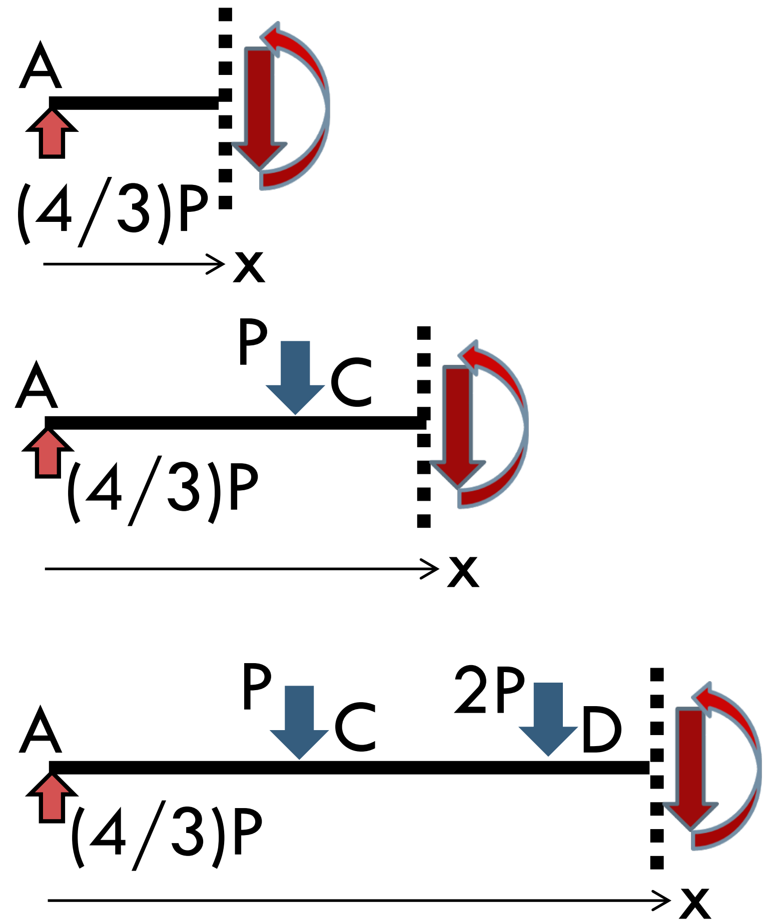




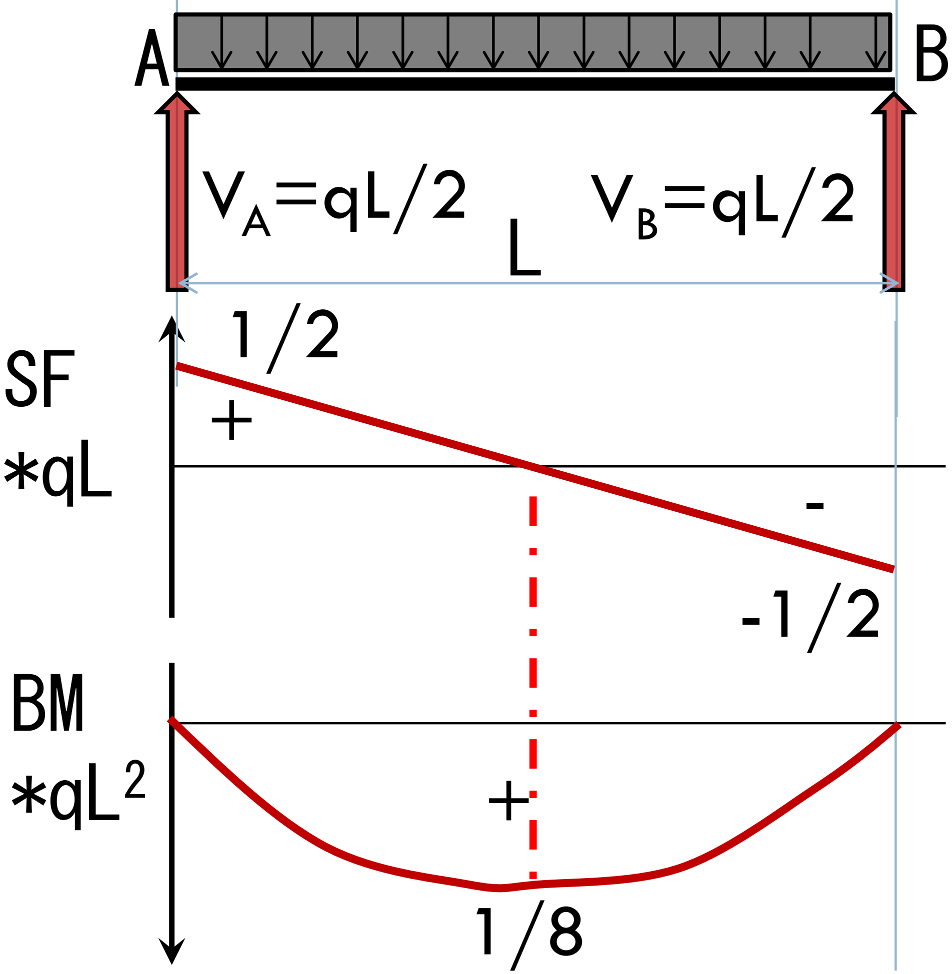
$$M_{x=\frac{L}{2}} = \frac{\mathrm{PL}}{4}$$

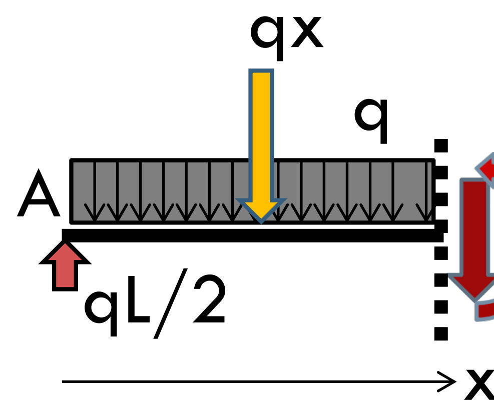
集中荷重を受ける単純梁のS.F.&B.M.





等分布荷重を受ける単純梁のS.F.&B.M.



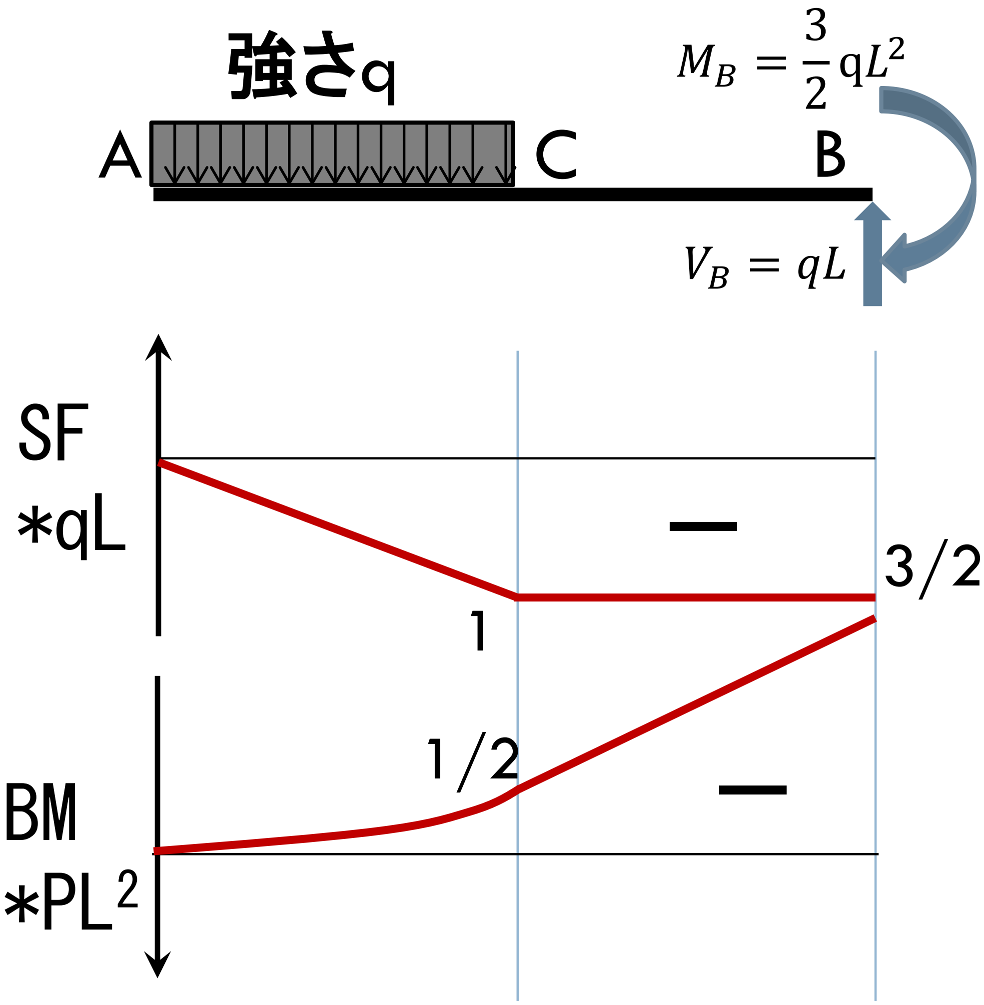


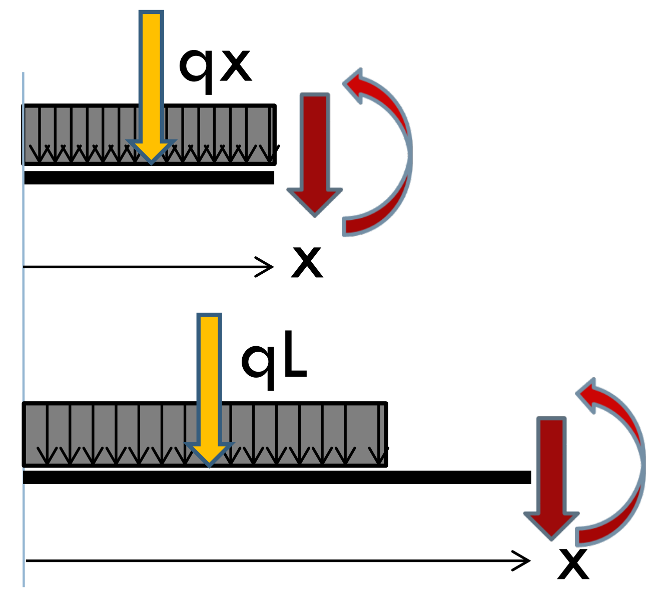
$$S_x = \frac{qL}{2} - qx$$

$$M_x = \frac{qL}{2}x - qx\frac{x}{2}$$

$$M_{x=\frac{L}{2}} = \frac{qL^2}{8}$$

分布荷重を受ける片持梁のS.F.&B.M

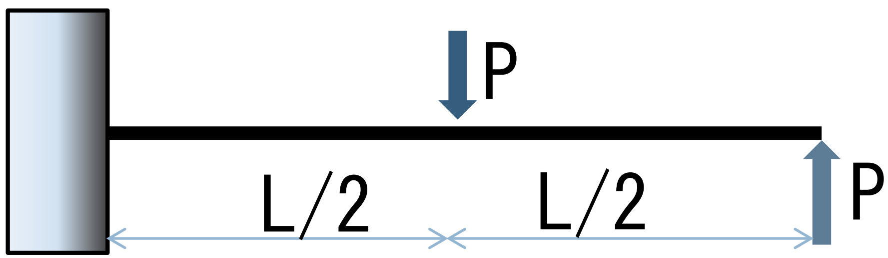




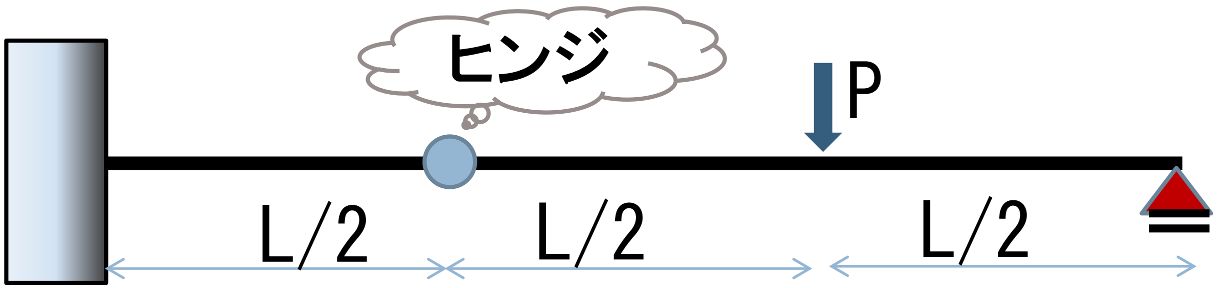
分布荷重は，対象区間について集中荷重に置き換える．

荷重そのものを集中荷重にしてはダメ！

（演習）
集中荷重を受ける片持梁のS.F.&B.M

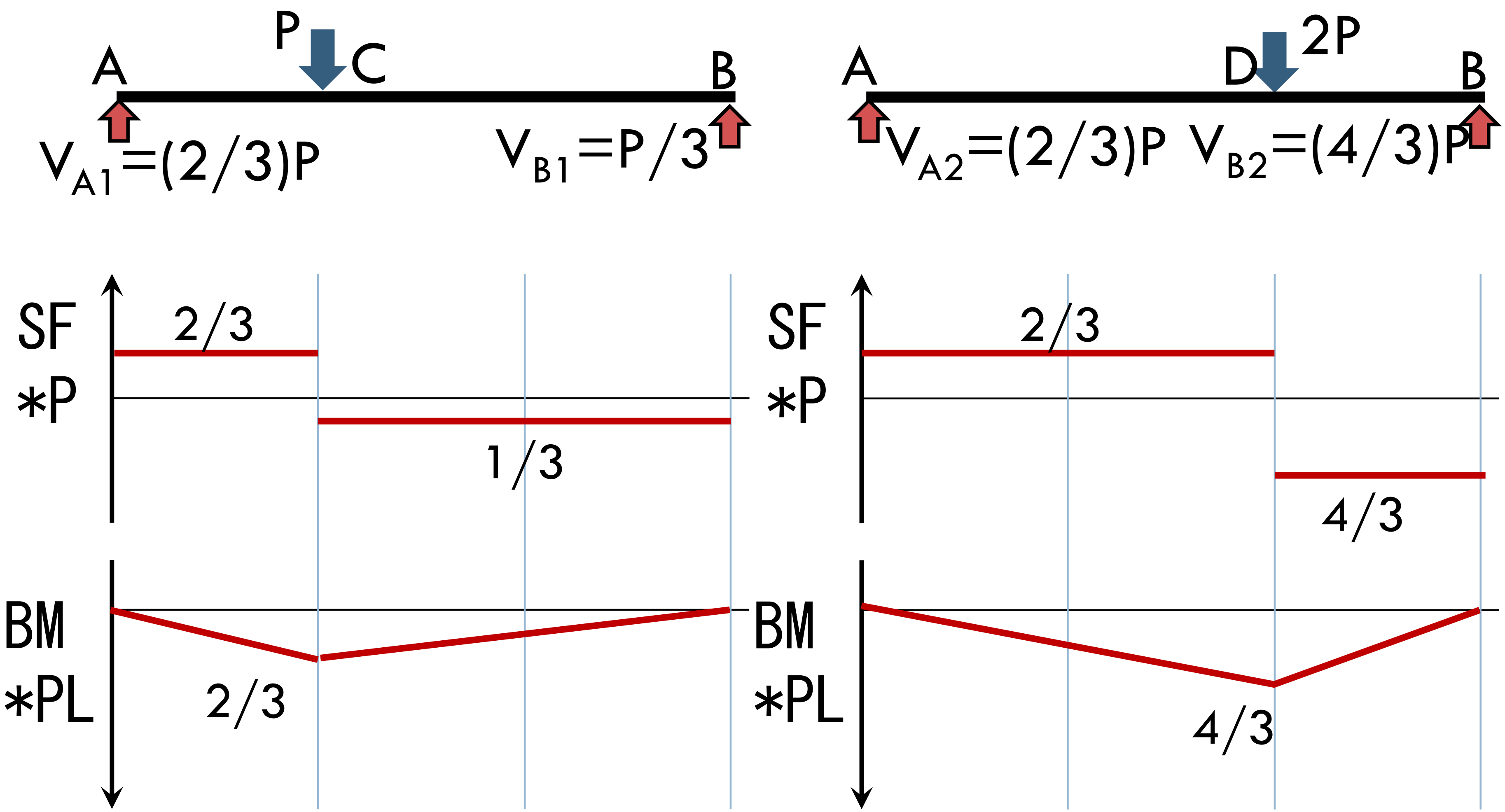


（演習　ちょっと上級者用）集中荷重を受ける片持梁のS.F.&B.M

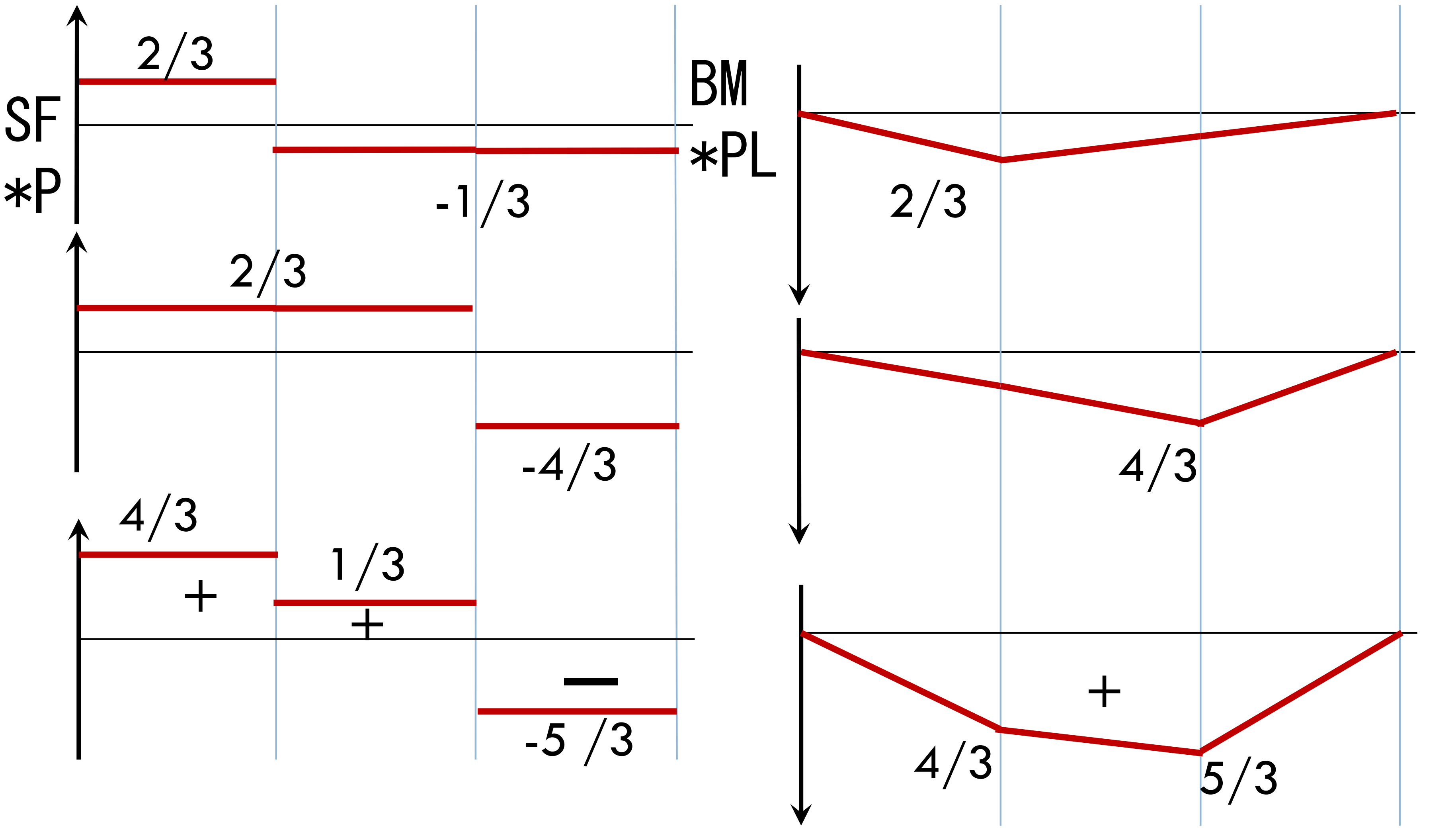


ヒンジは曲げを伝えない

S.F.&B.M.の重ね合わせ


P
A
C
B
VA1=(2/3)P
VB1=P/3
2P
A
D
B
VA2=(2/3)P
VB2=(4/3)P
SF
*P
2/3
1/3
BM
*PL
2/3
SF
*P
2/3
4/3
BM
*PL
4/3

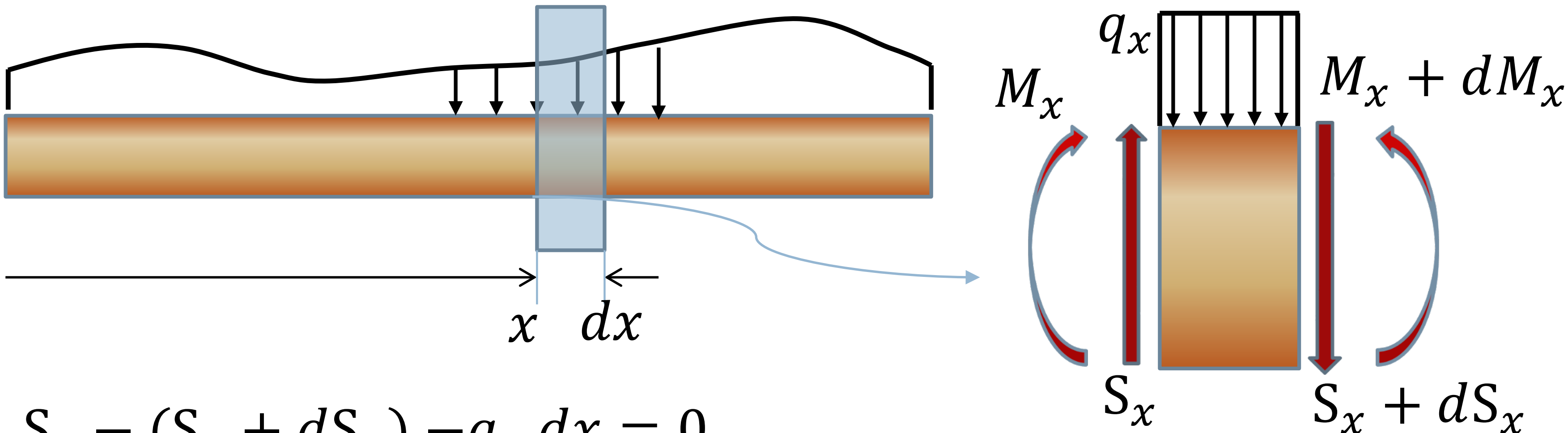
S.F.&B.M.の重ね合わせ



65

曲げモーメント，せん断力，荷重の関係

曲げモーメント，せん断力，荷重



$$S_x - (S_x + dS_x) - q_x\, dx = 0$$

$$M_x - (M_x + dM_x) + (S_x + dS_x)dx - q_x\, dx \frac{dx}{2} = 0$$

高次の微小項を無視すると，曲げモーメント，せん断力，荷重の関係が求まる．

$$\frac{dM_x}{dx} = S_x \qquad \frac{dS_x}{dx} = -q_x$$

曲げモーメント，せん断力，荷重（2）

曲げモーメント → せん断力 → 荷重

微分　　微分

微分とは，“勾配”

荷重 → せん断力 → 曲げモーメント

積分　　積分

積分とは，“面積”

式を用いないS.F.図の作成

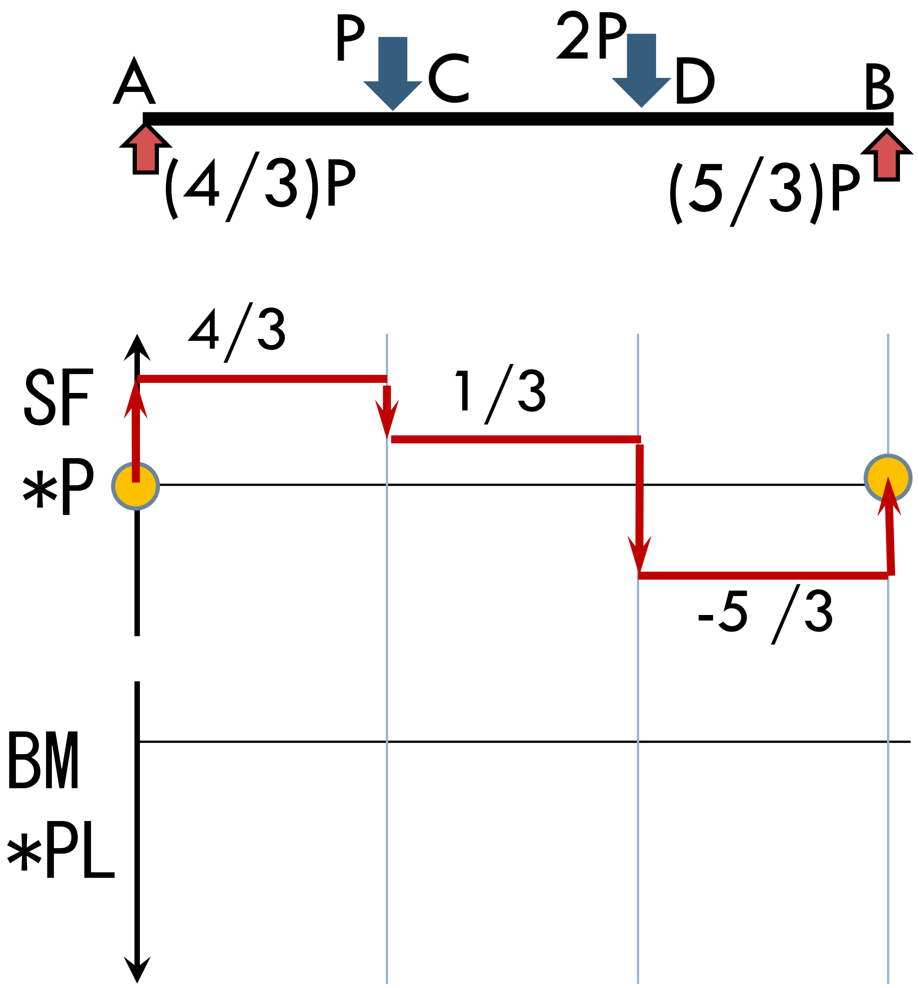
せん断力

断面より左側に作用している力の，上向きを正とした総和．

（断面より右側を考えるときは，下向きを正とした総和．）

1. 荷重のない区間：一定（水平）
2. 集中荷重作用点：荷重の大きさだけ段違い
3. 等分布荷重作用区間：一次式（直線）
4. 2点間のS.F.の差は，その間の荷重図の面積と等しい
5. モーメント荷重作用点：変化なし
6. 三角形分布荷重作用区間：2次式（放物線）
7. n次関数の荷重作用区間：（n+1）次式（曲線）

集中荷重を受ける単純梁のS.F.&B.M.



1.左端のゼロから

2.上向きの荷重で増加

3.AC間は荷重がないので一定

4.下向きの荷重で減少

5.CD間は荷重がないので一定

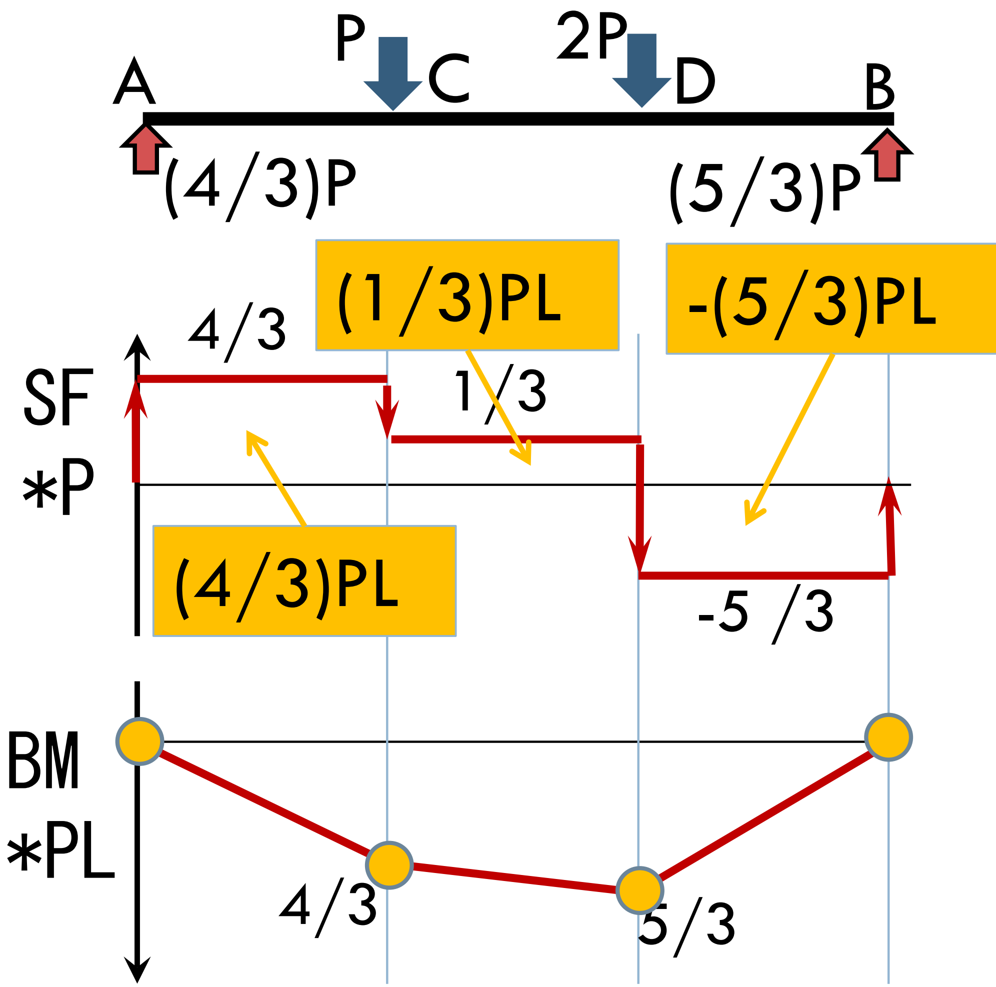
6.下向きの荷重で減少

7.DB間は荷重がないので一定

8.上向きの荷重で増加

9.右端のゼロで完了

集中荷重を受ける単純梁のS.F.&B.M.



1.左端のゼロから

2.AC間のS.F.図の面積計算

3.AC間はS.F.図の面積だけ増加．
荷重はないので直線．

4.CD間S.F.図の面積計算

5.CD間はS.F.図の面積だけ増加．
荷重はないので直線

6.DB間S.F.図の面積計算

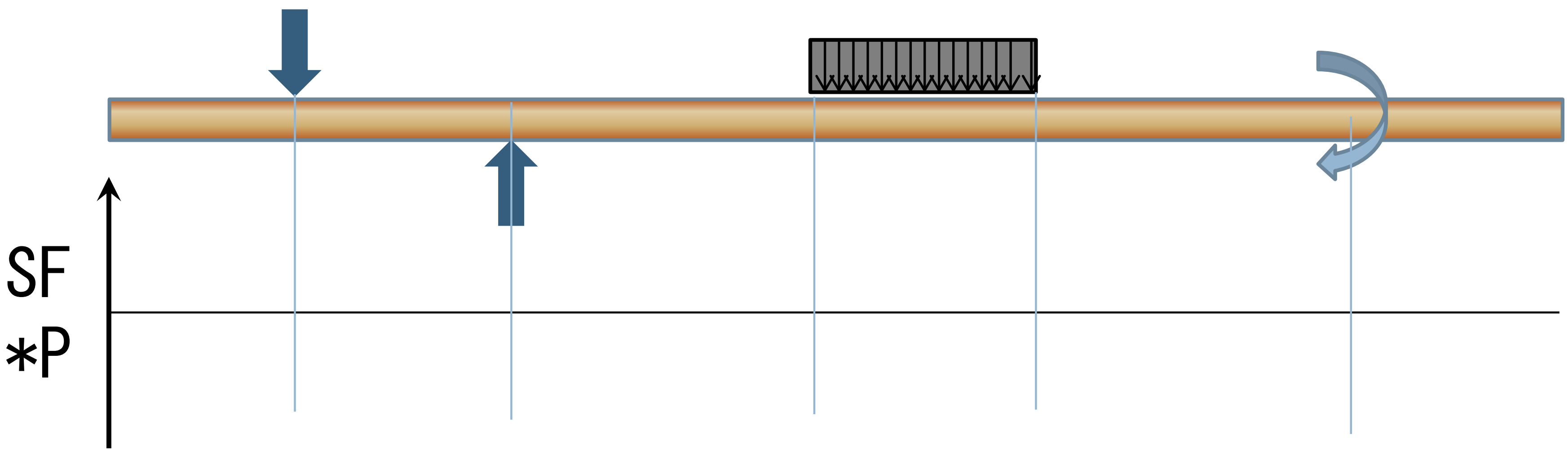
7. DB間はS.F.図の面積だけ減少．
荷重はないので直線．

8.右端のゼロで完了

式を用いないS.F.図の作成（演習）

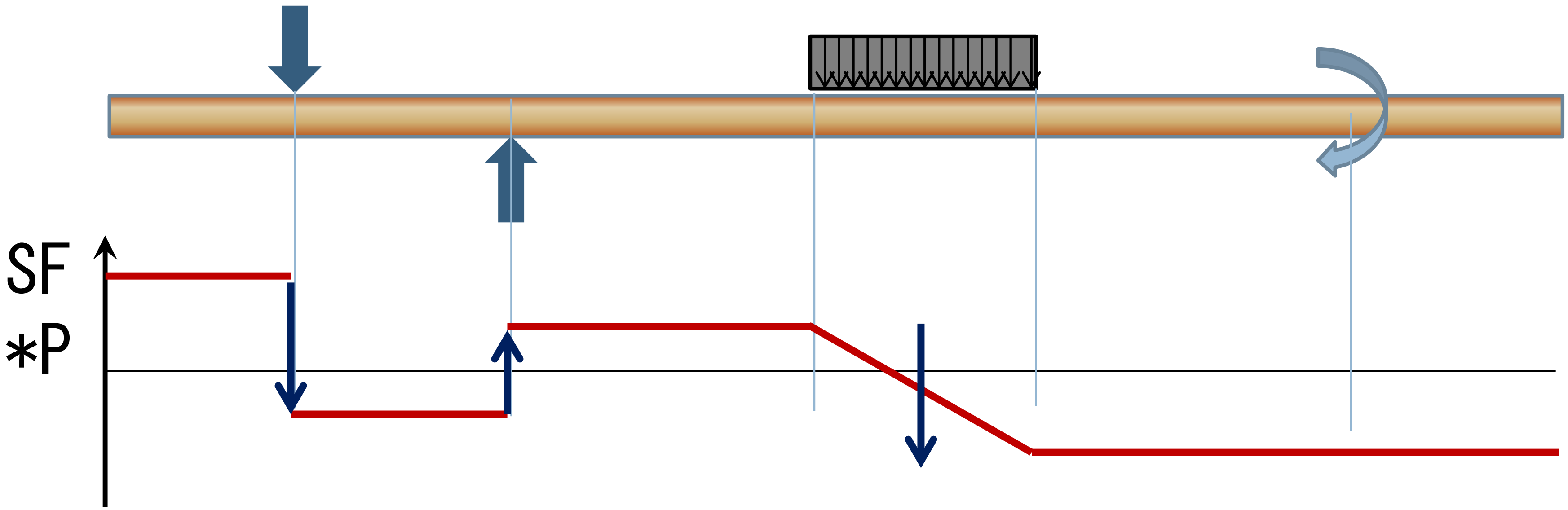
1. 荷重のない区間：一定（水平）
2. 集中荷重作用点：荷重の大きさだけ段違い
3. 等分布荷重作用区間：一次式（直線）
4. 2点間のS.F.の差は，その間の荷重図の面積と等しい

5. モーメント荷重作用点：変化なし
6. 三角形分布荷重作用区間：2次式（放物線）
7. n次関数の荷重作用区間：(n+1)次式（曲線）



式を用いないS.F.図の作成(解答)

1. 荷重のない区間：一定（水平）
2. 集中荷重作用点：荷重の大きさだけ段違い
3. 等分布荷重作用区間：一次式（直線）
4. 2点間のS.F.の差は，その間の荷重図の面積と等しい
5. モーメント荷重作用点：変化なし
6. 三角形分布荷重作用区間：2次式（放物線）
7. n次関数の荷重作用区間：(n+1)次式（曲線）



式を用いないB.M.図の作成

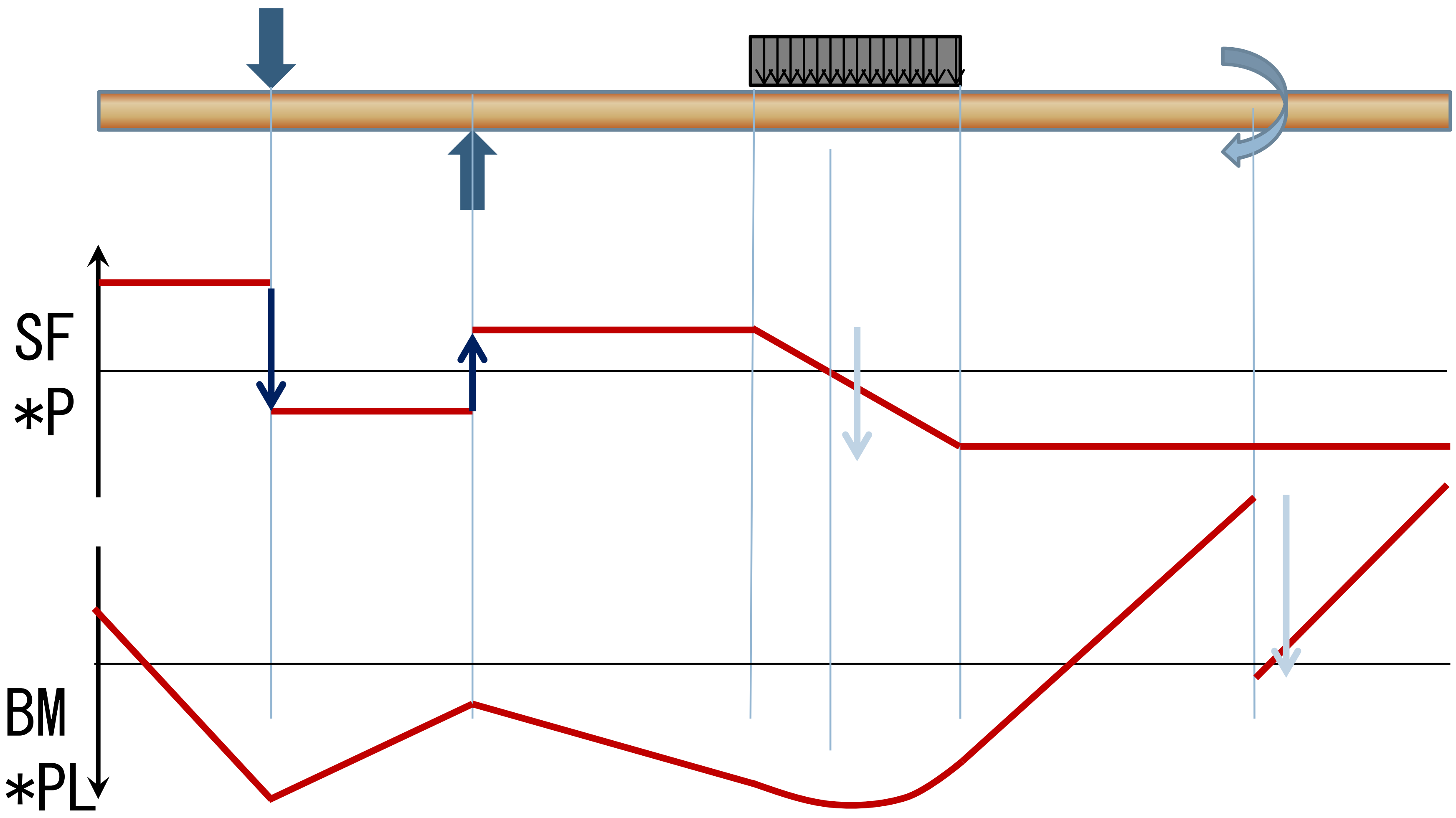
曲げモーメント

断面より左側に作用している力が断面周りに持つモーメントの，時計回りを正とした総和．

（断面より右側を考えるときは，反時計回りを正とした総和）

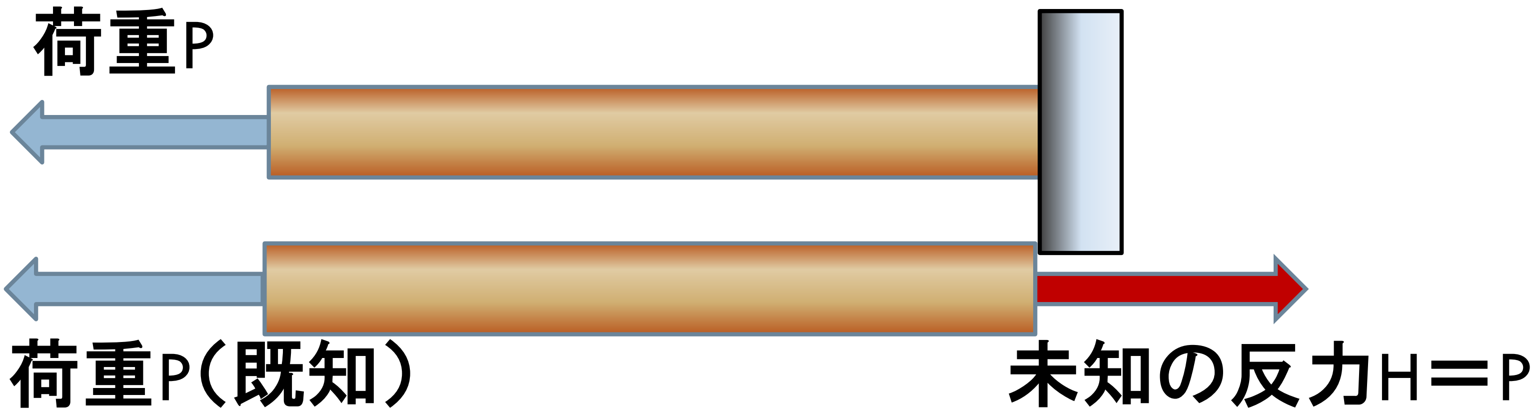
1. 荷重のない区間：一次式（直線）
2. 集中荷重作用点：荷重の大きさだけ傾きが変化
3. 等分布荷重作用区間：2次式（放物線）
4. 2点間のB.M.の差は，その間のS.F.図の面積と等しい
5. モーメント荷重作用点：その大きさだけ段違い
6. 三角形分布荷重作用区間：3次式
7. n次関数の荷重作用区間：（n+2）次式（曲線）
8. B.M.図の傾きは，S.F.図の値に等しい．
9. S.F.=0の位置でB.M.は極値をとる．

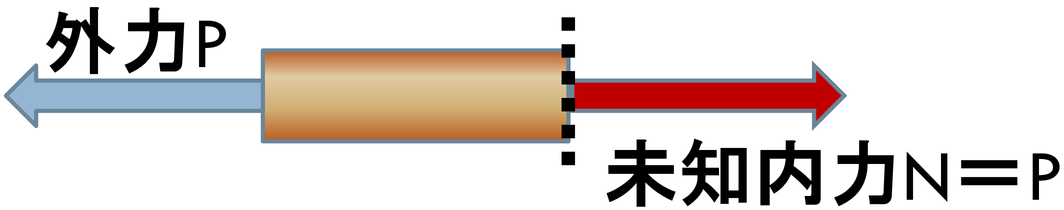
式を用いないB.M.図の作成



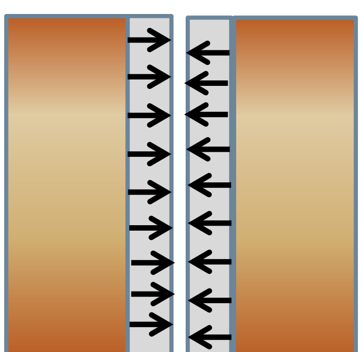
材料特性と曲げ応力度

応力度とは何か？―軸力部材を例に―





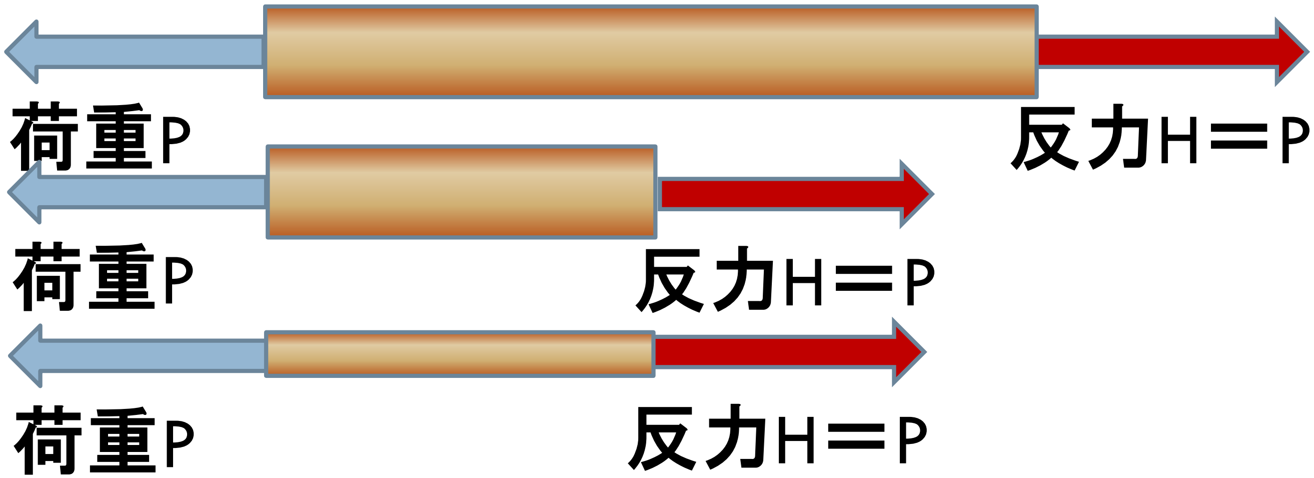
断面特性で決まる.
軸力では断面積A



単位面積当たりの内力

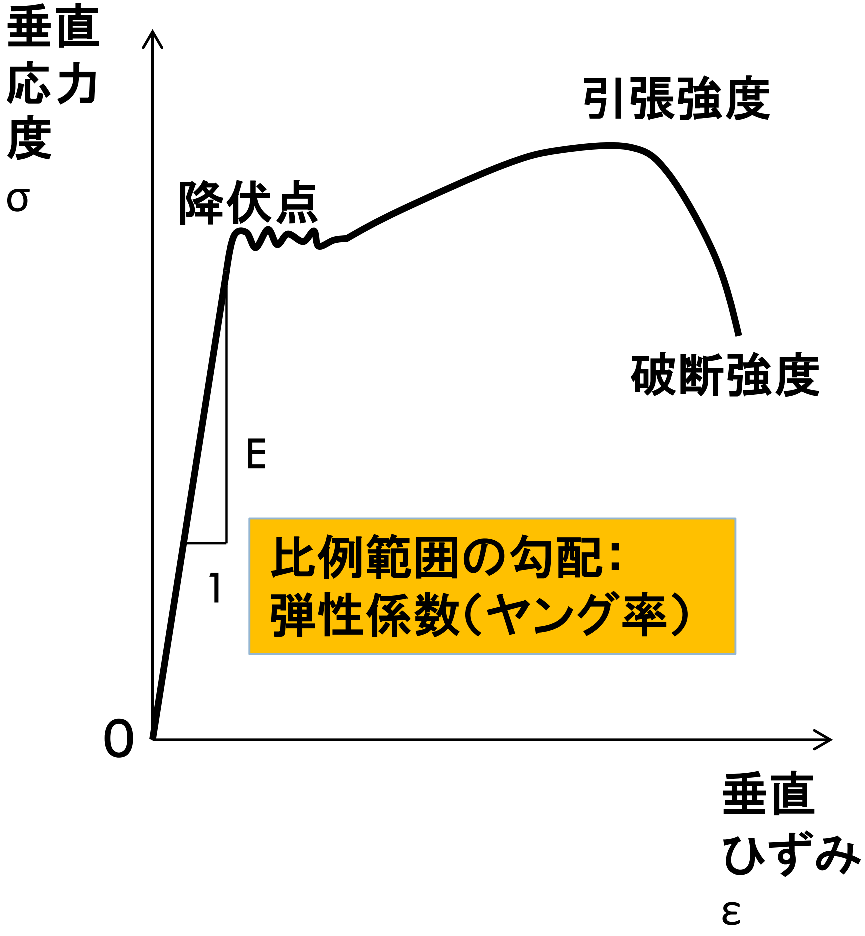
垂直応力度 $\sigma = \dfrac{N}{A}$

ひずみとは何か？ー軸力部材を例にー



	構造1	構造2	構造3
軸力	P	P	P
垂直応力度	P/2A	P/2A	P/A
伸び	Δ	Δ/2	Δ
ひずみ	Δ/2L	Δ/2L	Δ/L
応力度/ひずみ	**PL/AΔ**	**PL/AΔ**	**PL/AΔ**

応力度ーひずみ関係（材料特性）



PL/AΔ=E（一定）

$\sigma = P/A$

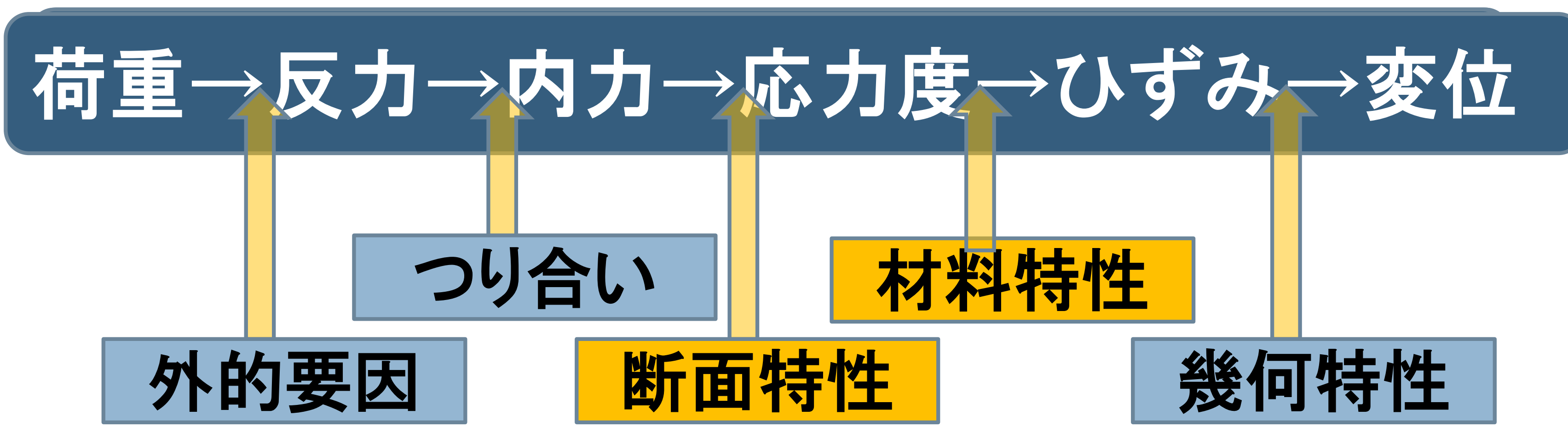
$\varepsilon = \Delta/L$

$\sigma = E\varepsilon$

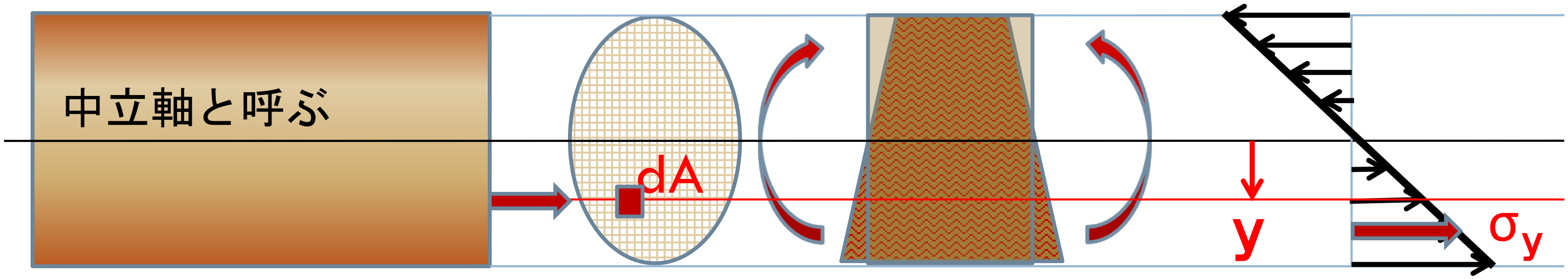
応力度を求める$\sigma = P/A$
ひずみを求める$\varepsilon = \sigma/E$
変位を求める$\Delta = \varepsilon L$

材料の性質(材料特性）

- 断面積は断面特性の一種
- 長さは構造特性の一種
- 反力と荷重の関係は，荷重パターンと支点パターンで決まる．（構造物の形，断面特性，構造特性，材料特性に無関係）



曲げを受ける梁の応力度（曲げ応力度）



梁の一部（長さ方向）断面　梁の微小幅要素　応力度分布

仮定1.　材料は弾性であり，　応力度とひずみは比例（弾性を仮定）
仮定2.　変形前に平面だった断面は，変形後も平面（平面保持を仮定）

ひずみ∝y座標，　応力度∝ひずみ　→　応力度∝y座標　→　応力度は直線分布

$$M = \int_A y\sigma dA$$

曲げ応力度

$$M = \int_A y\sigma dA = \int_A y\frac{\sigma_{max}}{y_{max}}ydA = \frac{\sigma_{max}}{y_{max}}\int_A y^2 dA = \frac{\sigma_{max}}{y_{max}}I$$

$$M = \frac{\sigma_{max}}{y_{max}}I \qquad \frac{\sigma_{max}}{y_{max}} = \frac{\sigma}{y}$$

$$\sigma = \frac{M}{I}y \qquad I = \int_A y^2 dA$$ (中立軸周り)

荷重→反力→内力→応力度→ひずみ→変位

曲げにおける中立軸は図心軸

部材軸方向に力は作用しないので・・・
（圧縮力や引張力は曲げにより生じない．）

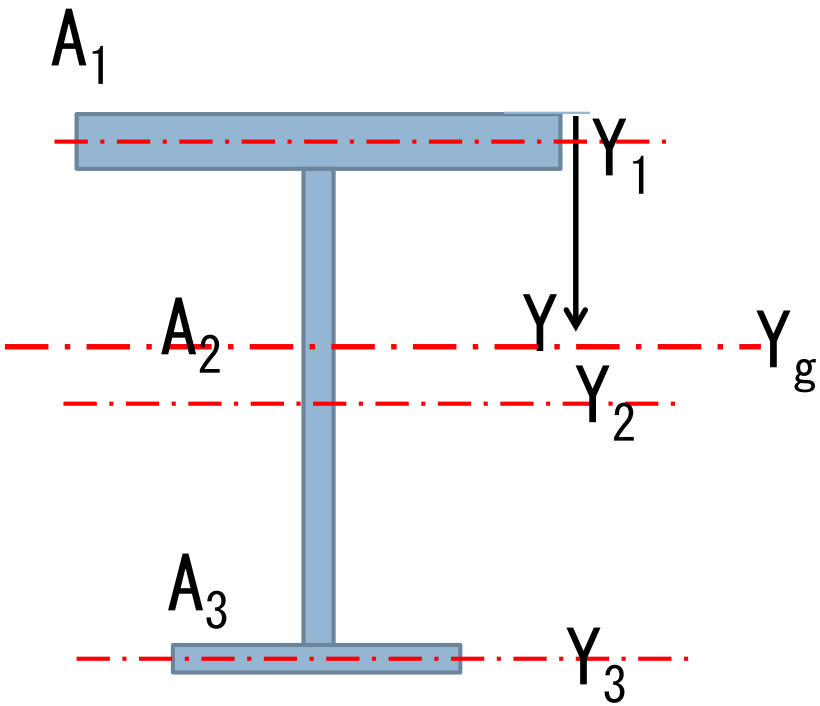
$$N = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{M}{I} y dA = \frac{M}{I} \int_A y dA = 0$$

$$\therefore \quad G = \int_A y dA = 0$$

中立軸周りの断面一次モーメントがゼロ，
すなわち，中立軸は図心軸と一致する．

断面特性と曲げ応力度

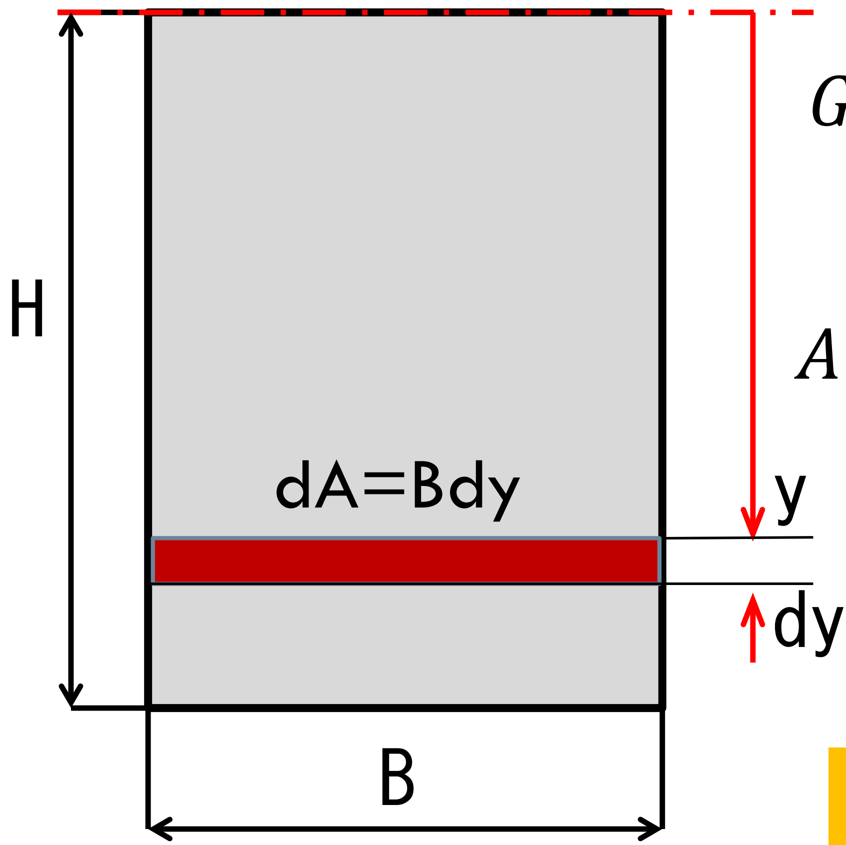
非対称H形断面の図心を求める



図心とは,
Center of Figure
重心とは
Center of Gravity

$$Y_g = [Y_1A_1 + Y_2A_2 + Y_3A_3]/[A_1 + A_2 + A_3]$$

長方形断面の断面一次モーメント



$$G = \int y dA = \int_0^H B y dy = \frac{BH^2}{2}$$

$$A = \int dA = \int_0^H B dy = BH$$

$$\frac{G}{A} = \frac{H}{2}$$

つまり，上から半分の位置に図心軸がある．

断面係数

$\sigma = \frac{M}{I}y \quad I = \int_A y^2 dA$ (中立軸周り)

軸方向力の和はゼロだから

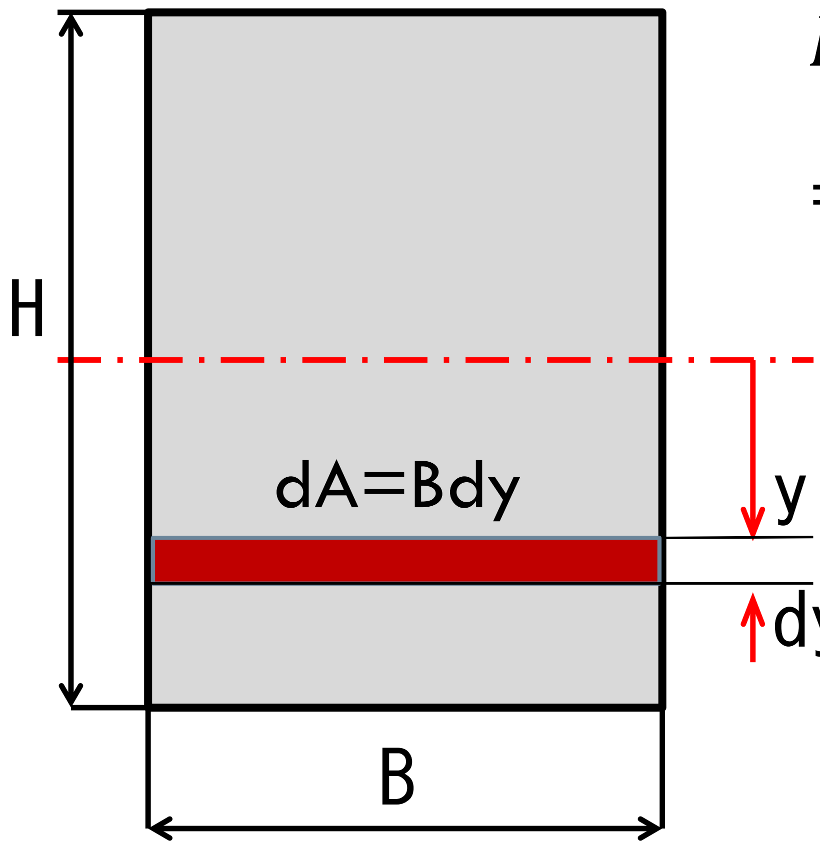
$\int ydA = 0$ つまり中立軸は図心軸

曲げ応力度は断面二次モーメントには反比例しない.

$\sigma_{max} = \frac{M}{\mathrm{Z}} \quad \mathrm{Z} = I/y_{max}$

断面係数Z: 引張側Z_t 圧縮側Z_c

長方形断面の断面二次モーメント



I

$$= \int y^2 dA = \int_{-H/2}^{H/2} B y^2 dy = \frac{BH^3}{12}$$

$\sigma = \frac{\mathrm{M}}{I}\mathrm{y}$ について次元は？

$M: [FL]$

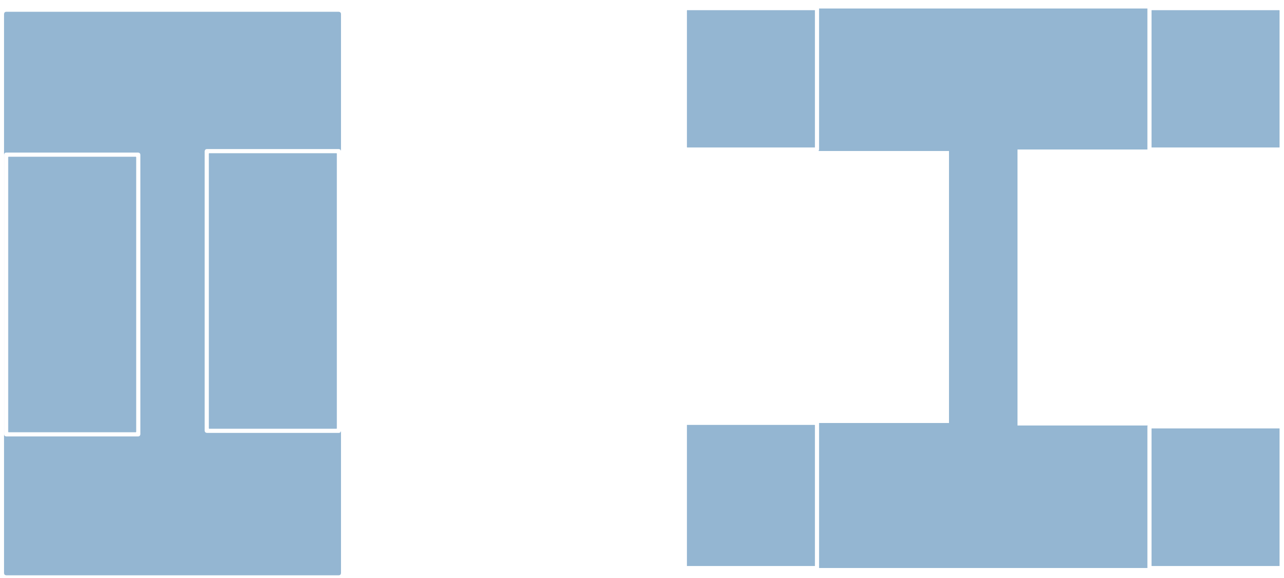
$I: [L^4]$

$y: [L]$

$\mathrm{Z}: [L^3]$

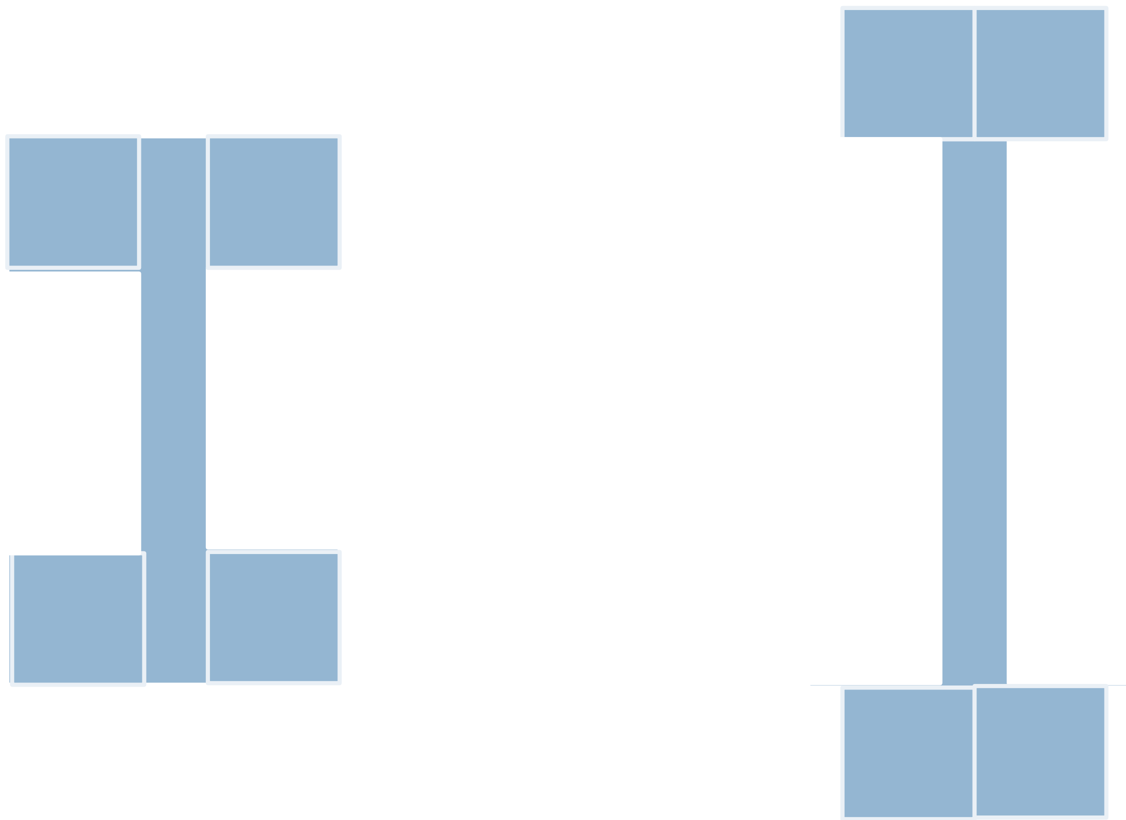
$\sigma: [FL^{-2}]$

同一の断面積で作った二つの断面



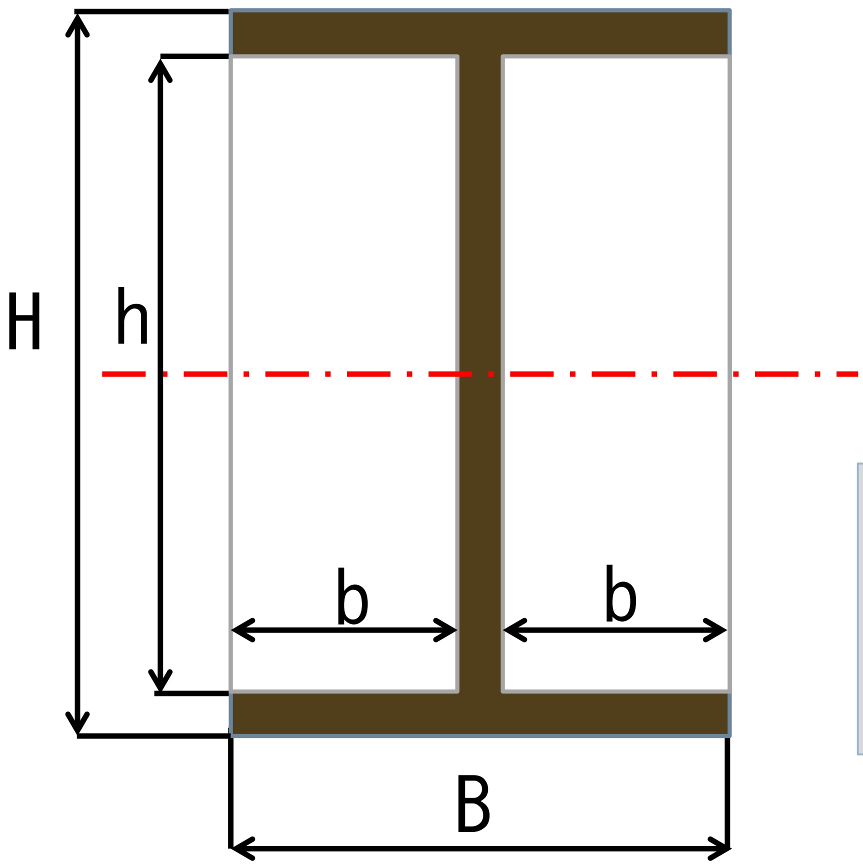
中央の断面は無駄.
断面はなるべく外側に.

同一の断面積で作った二つの断面



上下により離れた方が曲げに強い.

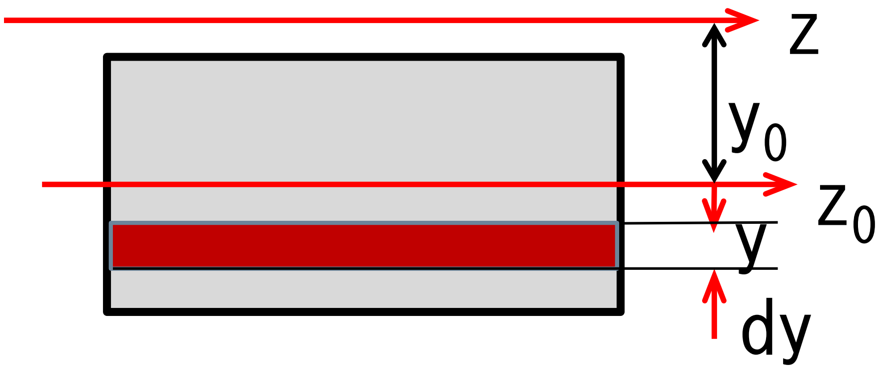
対称H形断面の断面二次モーメント



$$I=\frac{BH^3}{12}-2\frac{bh^3}{12}$$

図心軸が一致している断面は，負の断面も含めて，加算，減算ができる．

平行移動した軸に対する断面二次モーメント



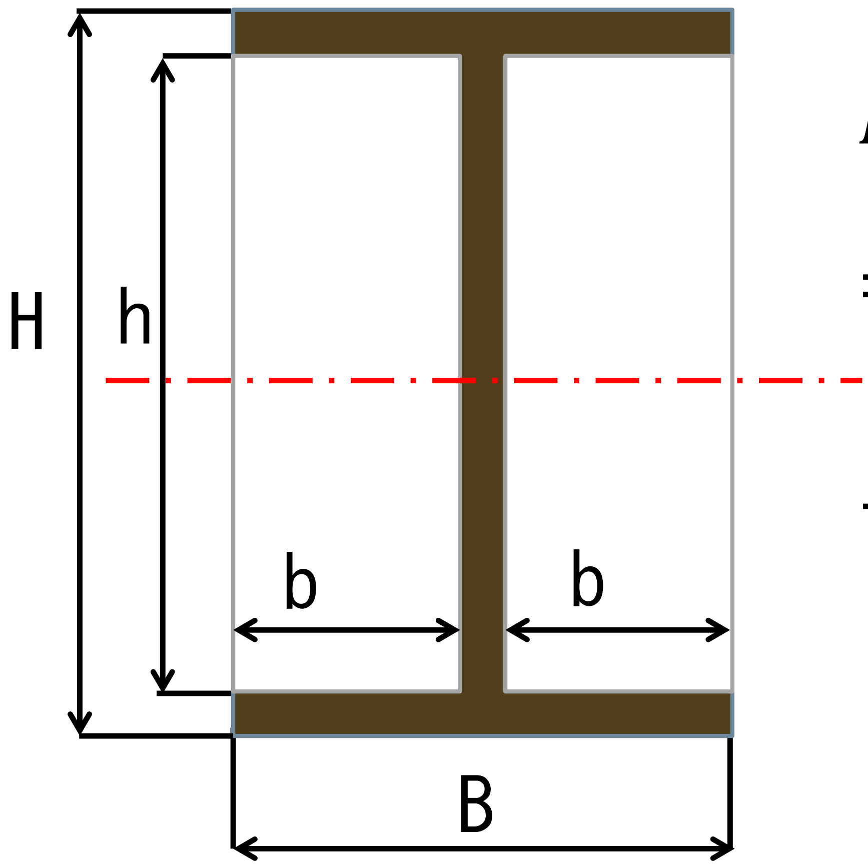
$$I = \int (y_0 + y)^2 \, dA$$

$$I = \int (y_0 + y)^2 \, dA = {y_0}^2 A + \int y^2 dA + y_0 \int y dA$$

$$I = {y_0}^2 A + I_0$$

図心軸が一致していない部分断面の
断面二次モーメントが求められる.

軸移動で対称H形断面の断面二次モーメントを求める

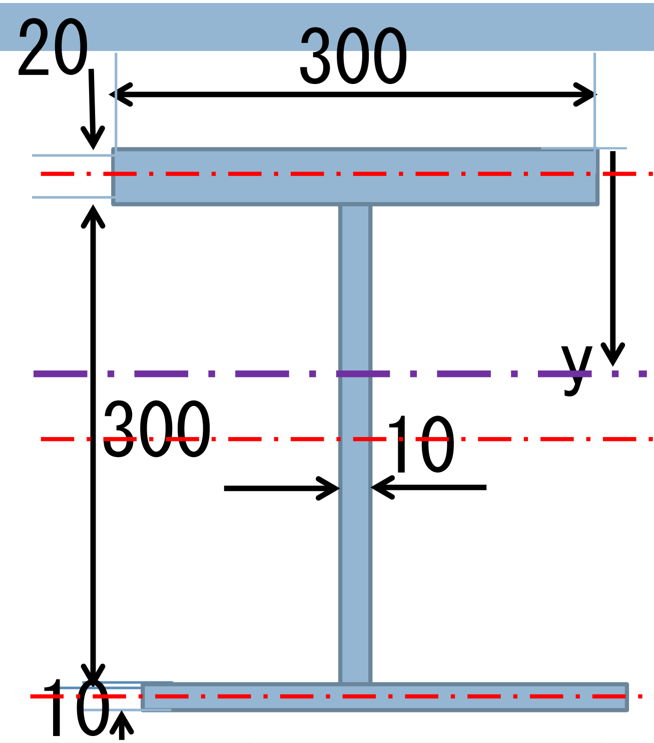


フランジ板厚　t_f
ウェブ板厚　t_w

$$I = \frac{t_w h^3}{12} + 2\left[\frac{B t_f{}^3}{12} + B t_f\left(\frac{H}{2} - \frac{t_f}{2}\right)^2\right]$$

$\frac{B t_f{}^3}{12}$は通常小さいので無視.

非対称断面の断面二次モーメント



任意の参照軸yを設定して，断面一次モーメントを求め，断面積で割る．

図心軸に対して$I = y^2 A + I_0$を用いて断面二次モーメントを求める．

（実務的には，汎用性から対称断面でも）

part	断面積A	距離 y_0	Ay_0	$y=\lvert y_0 - y_g \rvert$	Ay^2	I_0
1	6,000	10	60,000	118.75	84,609,000	~~200,000~~
2	3,000	170	510,000	41.25	51,047,000	22,500,000
3	3,000	325	975,000	196.25	115,542,000	~~25,000~~
計	12,000		1,545,000		251,198,000	22,725,000
	$y_g = \sum Ay_0 / \sum A =$		128.75		I=	273,923,000

曲げ応力度を用いた設計

曲げ応力度で何ができるか

安全性の照査

- 荷重，材料，断面が既知

断面の決定

断面特性と曲げ応力度

- 荷重，材料が既知

荷重の決定

- 材料，断面が既知

材料の決定

- 荷重，断面が既知

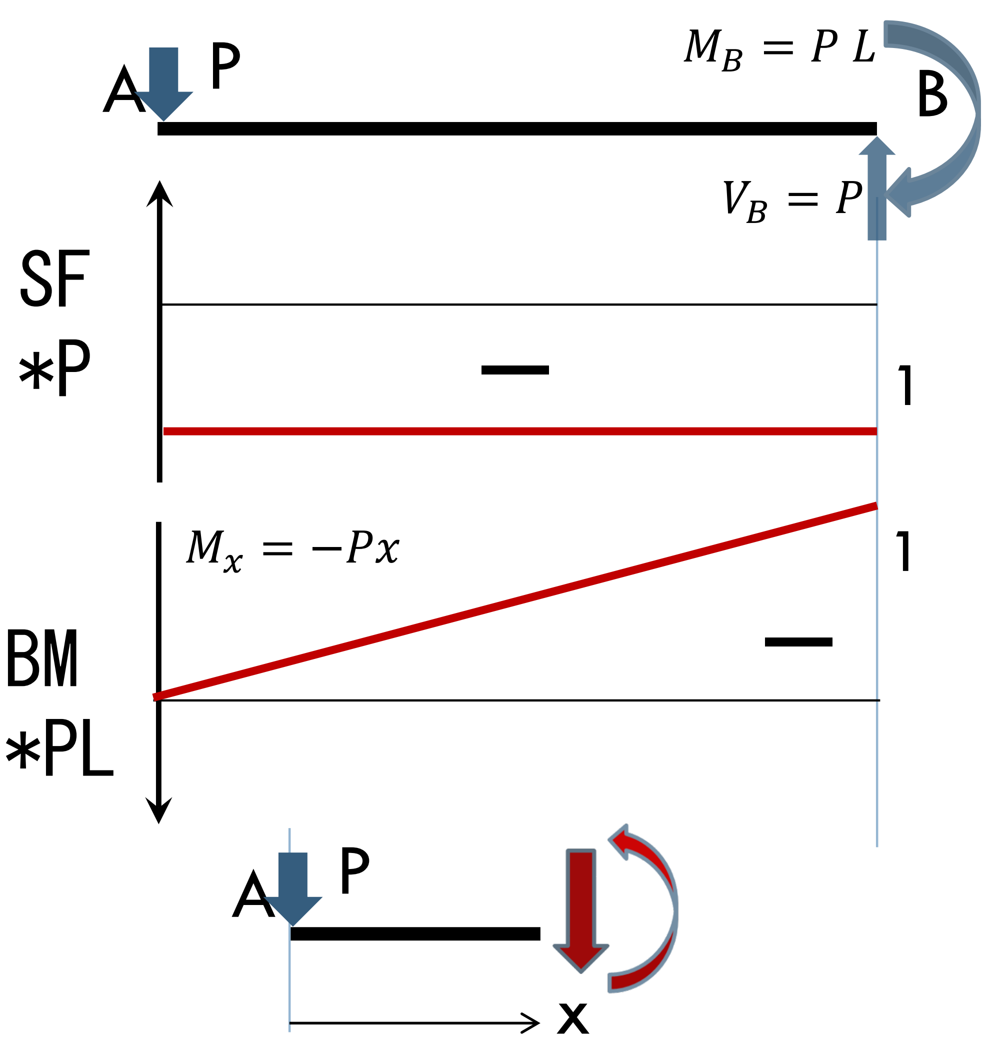
曲げ応力度を求める.（演習）

例題：集中荷重を受ける片持ち梁の曲げ応力度

スパン3mの片持梁の先端に800Nの集中荷重が作用している，

許される最大応力度が2kN/cm2の厚さ7cmの木材で作る場合，板の幅は何cm必要か？

集中荷重を受ける片持梁の曲げ応力度



最大曲げモーメントの絶対値を求める.

$$M_{\max} = PL = 240kNcm$$

断面2次モーメント

$$I = \frac{b7^3}{12}cm^4$$

縁端距離

$$y_{\max} = 3.5cm$$

応力度が制限以下の条件

$$240 \times \frac{12}{b7^3} \times 3.5 \leq 2$$

$$Ans. \quad b \geq 14.7cm$$

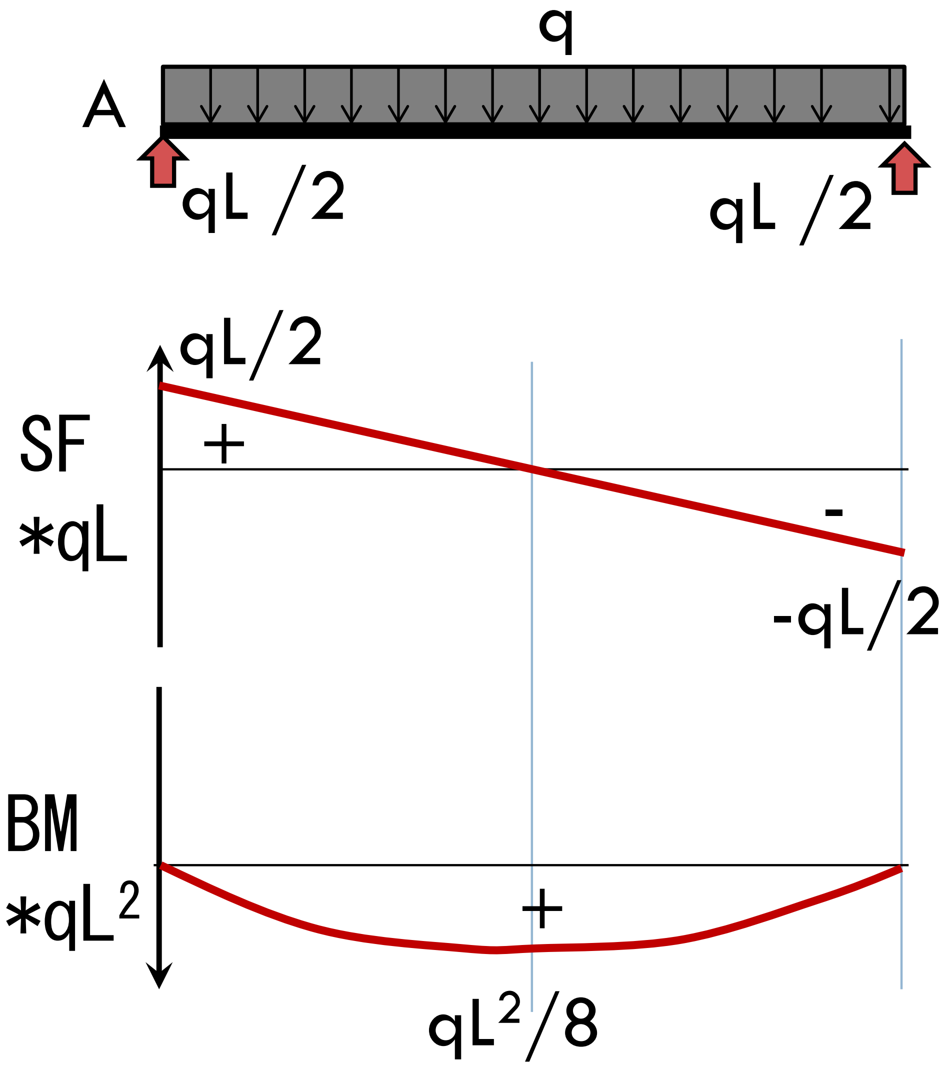
分布荷重を受ける単純梁の曲げ応力度(演習)

例題:分布荷重を受ける単純梁の曲げ応力度

スパン3mの単純梁のスパン全体に等分布荷重が作用している,

許される最大応力度が1kN/cm2の幅10cm, 高さ20cmの木材で作る場合, 積載可能な荷重の強さ何はkN/m?

分布荷重を受ける単純梁の曲げ応力度



最大曲げモーメントの絶対値を求める.

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{8} = q\frac{300^2}{8} kNcm$$

断面2次モーメント

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \times 20^3}{12} cm^4$$

縁端距離 $y_{\max} = 10cm$

応力度が制限以下の条件

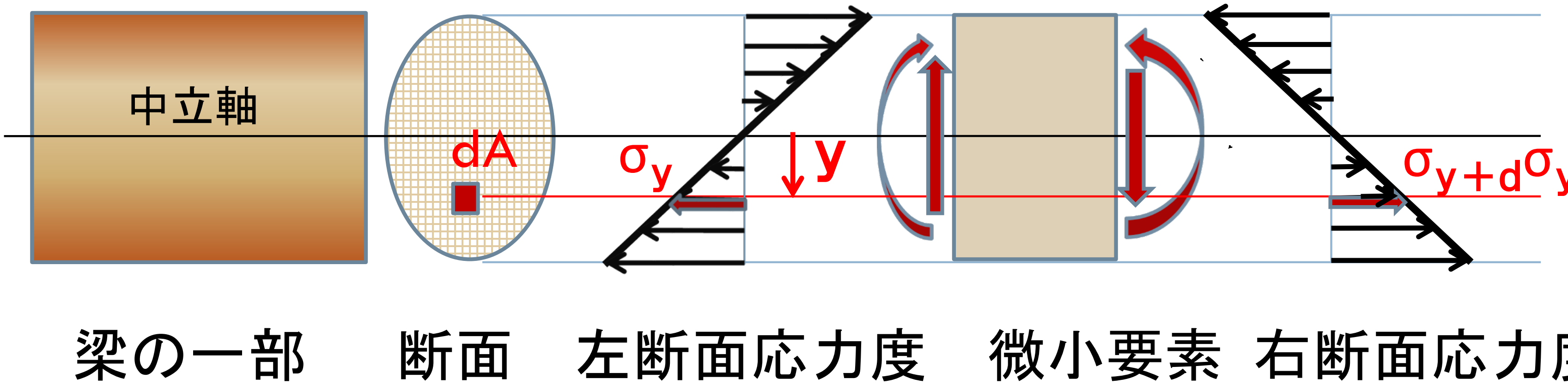
$$q\frac{300^2}{8} \times \frac{12}{10 \times 20^3} \times 10 \leq 1$$

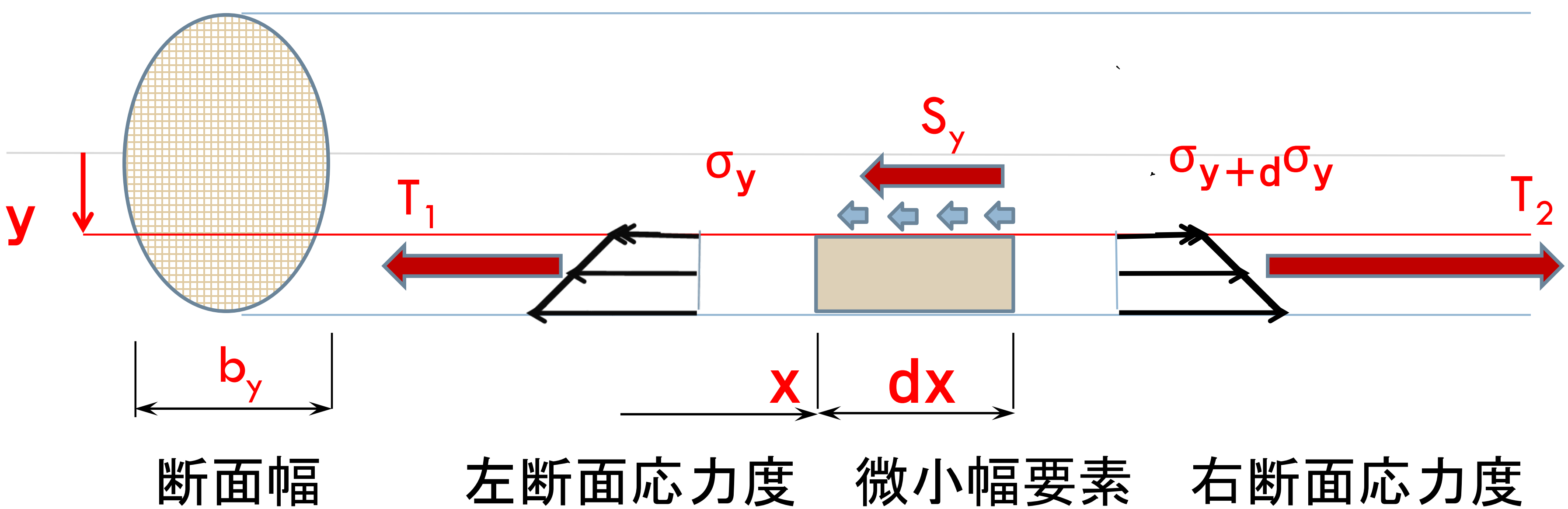
$$Ans. \quad q \leq 5.93\ kN/m$$

100

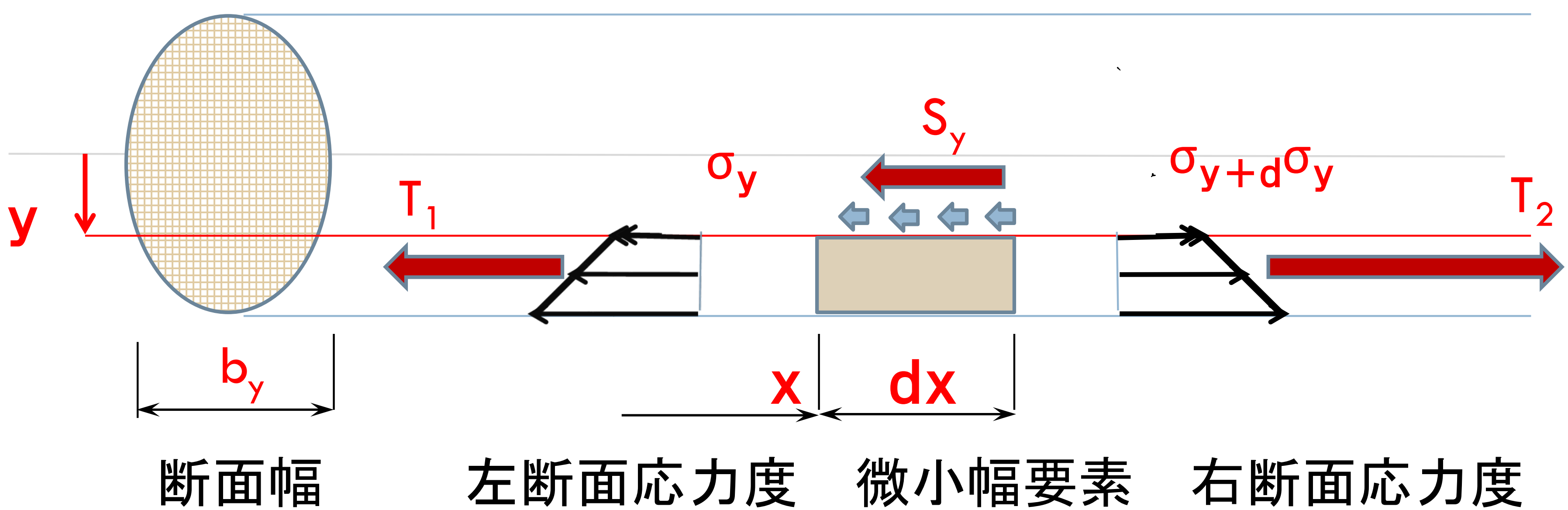
はりの曲げによるせん断応力度

曲げを受ける梁のせん断応力度





曲げを受ける梁のせん断応力度（2）



$$T_1 + S_y = T_2$$

$$\int_y^{y_{max}} \sigma_y dA + \tau_y b_y dx = \int_y^{y_{max}} (\sigma_y + d\sigma_y) dA$$

曲げを受ける梁のせん断応力度(3)

$$\int_{y}^{y_{max}} \sigma_y dA + \tau_y b_y dx = \int_{y}^{y_{max}} (\sigma_y + d\sigma_y) dA$$

$$\tau_y b_y dx = \int_{y}^{y_{max}} d\sigma_y dA$$

$$\tau_y = \frac{1}{b_y d_x} \int_{y}^{y_{max}} \frac{M_x}{I} y dA$$

$$\tau_y = \frac{M_x}{I b_y d_x} \int_{y}^{y_{max}} y dA = \frac{S_x G_y}{I b_y}$$

ただし，

$$G_y = \int_{y}^{y_{max}} y dA$$

せん断力とせん断応力度

$$\tau_y = \frac{S_x G_y}{I b_y} \qquad G_y = \int_y^{y_{max}} y dA$$

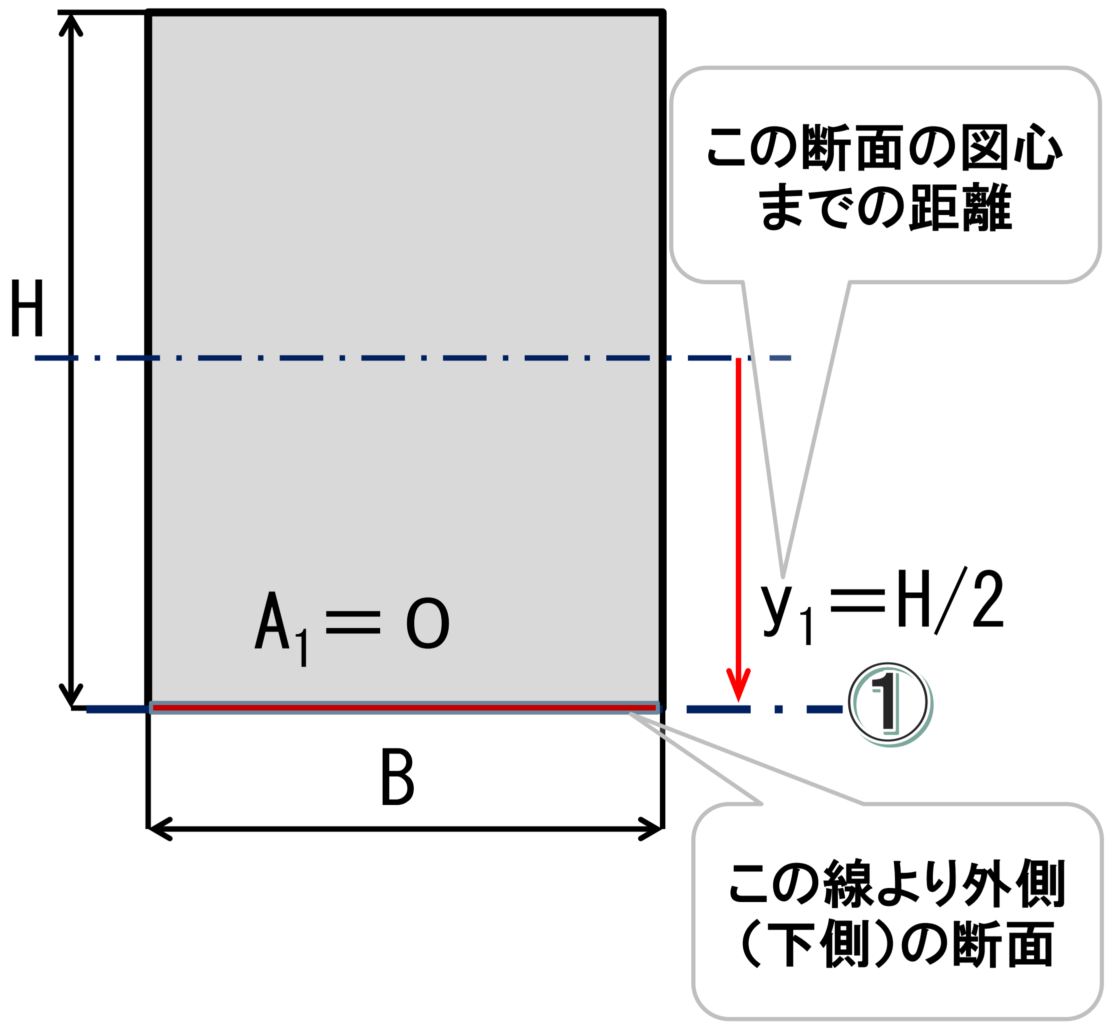
b_y ：断面の幅
G_y ：yより外側の断面一次モーメント

ただし，H型薄肉断面の場合、

$$\tau_w = \frac{S}{A_w}$$

腹板のみでの負担で簡略化も

長方形断面のせん断応力度分布



$$I = \frac{BH^3}{12}$$

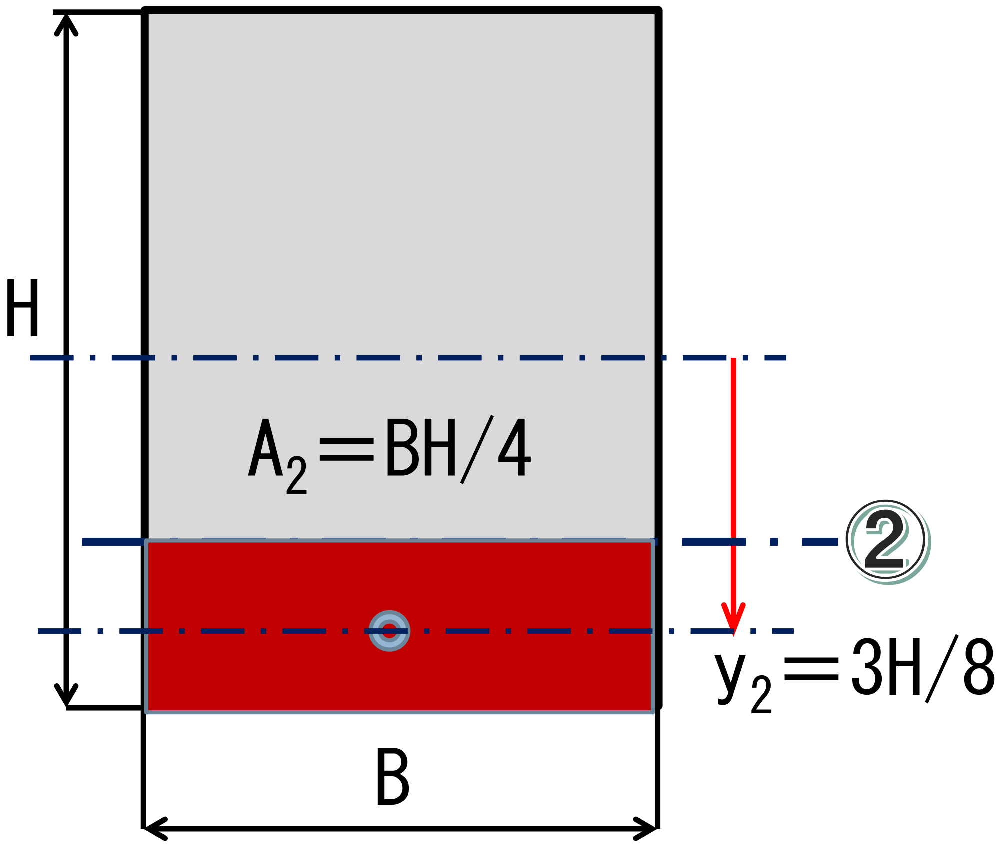
$b_y = B$（一定）

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{S_x}{BH}}$$

$$G_y = \int_y^{y_{max}} y dA = A_1 y_1 = 0$$

$$\tau_1 = 0$$

長方形断面のせん断応力度分布(2)



$$I = \frac{BH^3}{12}$$

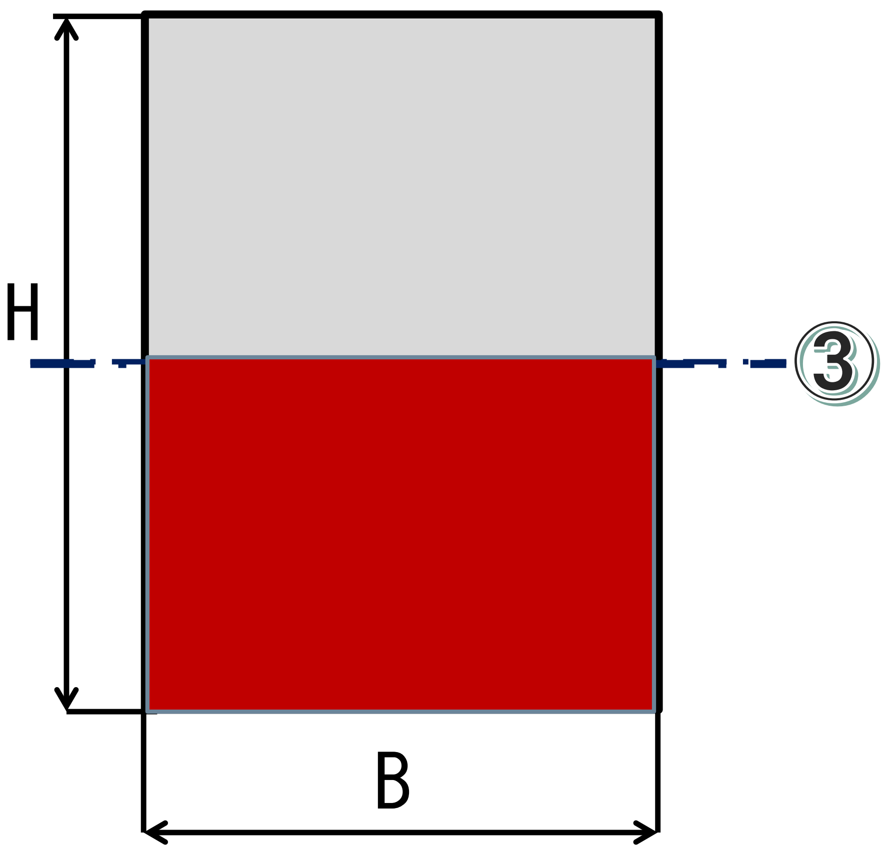
$$b_y = B(一定)$$

$$\bar{\tau} = \frac{S_x}{BH}$$

$$G_y = A_2 y_2 = \frac{3BH^2}{32}$$

$$\tau_2 = \frac{9}{8}\bar{\tau}$$

長方形断面のせん断応力度分布（演習）



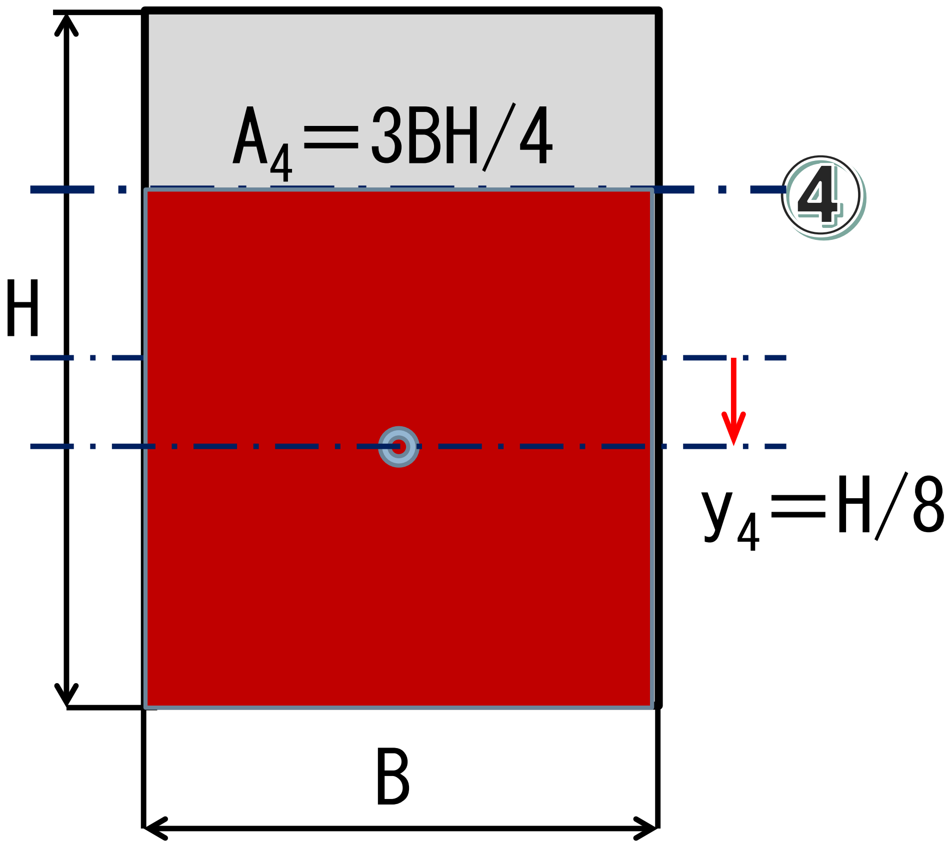
$$I = \frac{BH^3}{12}$$

$b_y = B$（一定）

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{S_x}{BH}}$$

長方形断面のせん断応力度分布（解答）

長方形断面のせん断応力度分布(4)



$$I = \frac{BH^3}{12}$$

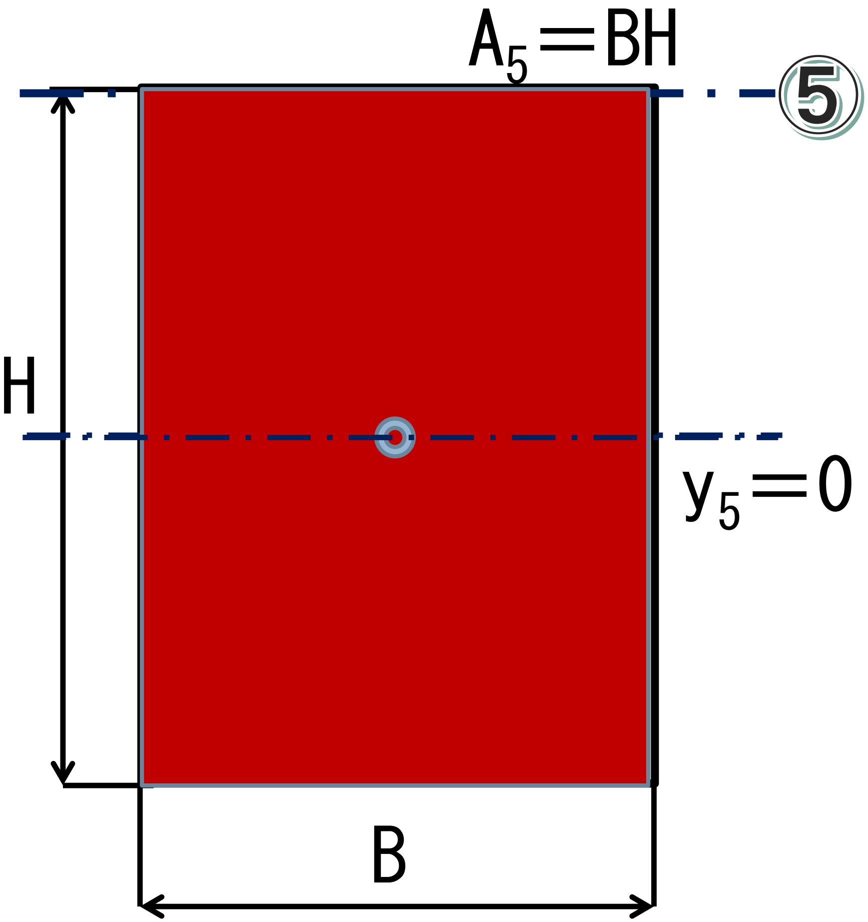
$b_y = B$(一定)

$$\bar{\tau} = \frac{S_x}{BH}$$

$$G_y = A_4 y_4 = \frac{3BH^2}{32}$$

$$\tau_4 = \frac{9}{8}\bar{\tau}$$

長方形断面のせん断応力度分布（5）



$$I = \frac{BH^3}{12}$$

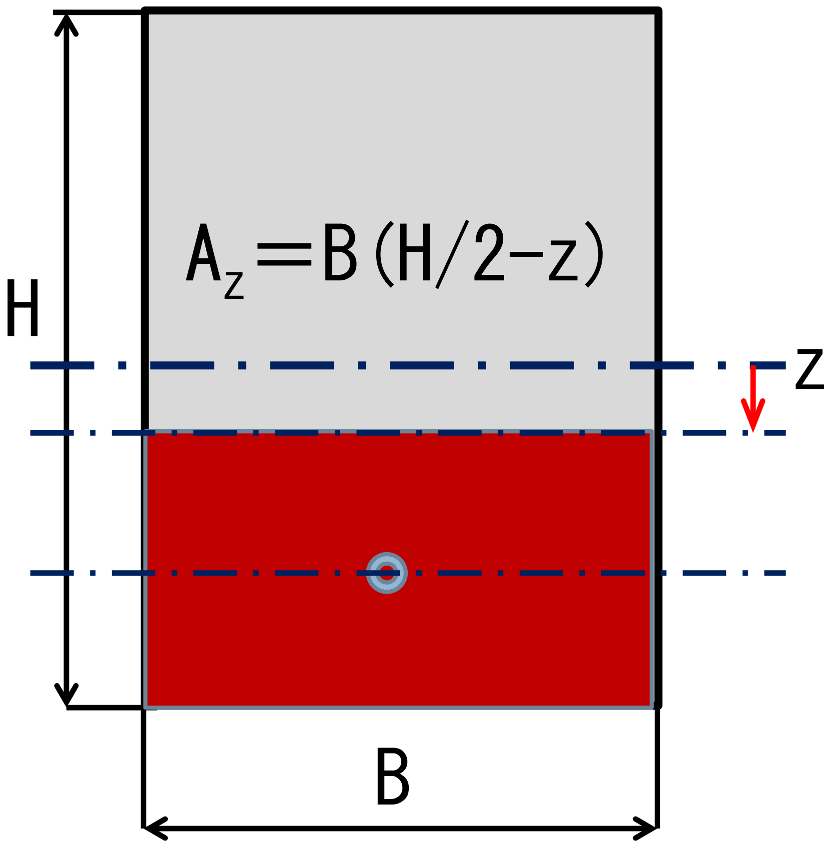
$$b_y = B（一定）$$

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{S_x}{BH}}$$

$$\boxed{G_y = A_5 y_5 = 0}$$

$$\boxed{\tau_5 = 0}$$

長方形断面のせん断応力度分布(6)

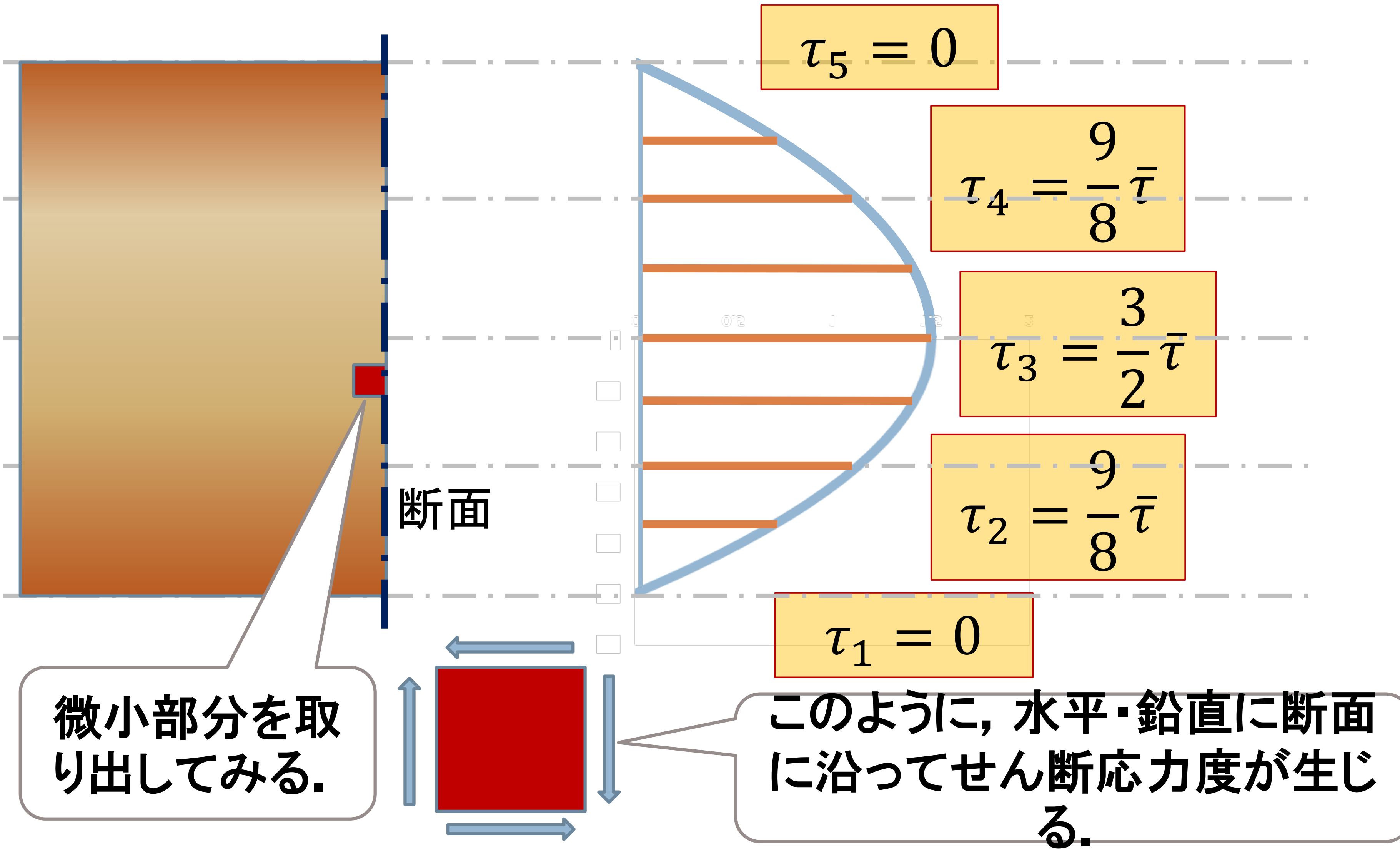


$y_z = z + (H/2 - z)/2$

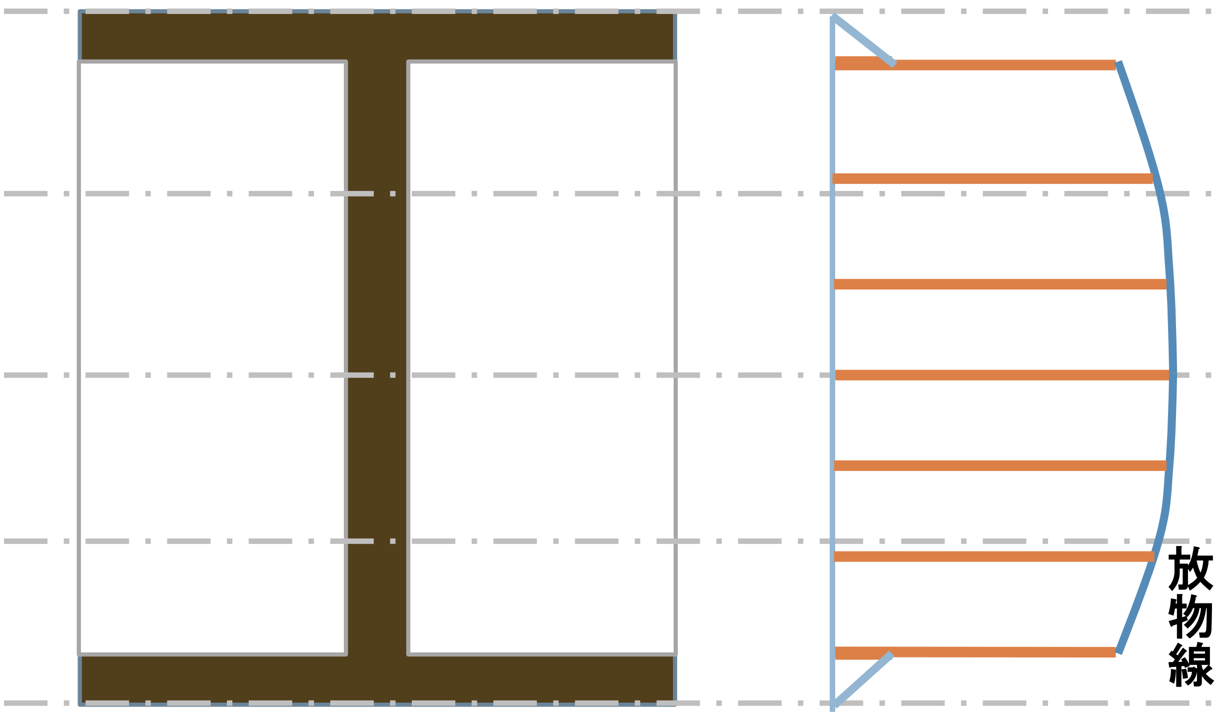
$$G_y = A_z y_z = \frac{BH^2}{2}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z}{H}\right)^2\right]$$

$$\tau_z = 6\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z}{H}\right)^2\right]\bar{\tau}$$

長方形断面のせん断応力度分布(5)



H型断面のせん断応力度分布の例



$\tau_5 = 0.15\tau_w$

$\tau_4 = 0.75\tau_w$

$\tau_3 = 0.89\tau_w$

$\tau_2 = 0.75\tau_w$

$\tau_1 = 0.15\tau_w$

ウェブ（腹板）および
フランジの寸法
幅：100mm
板厚：20mm

ウェブですべてのせん断応力度
を負担するとの簡略化は安全側

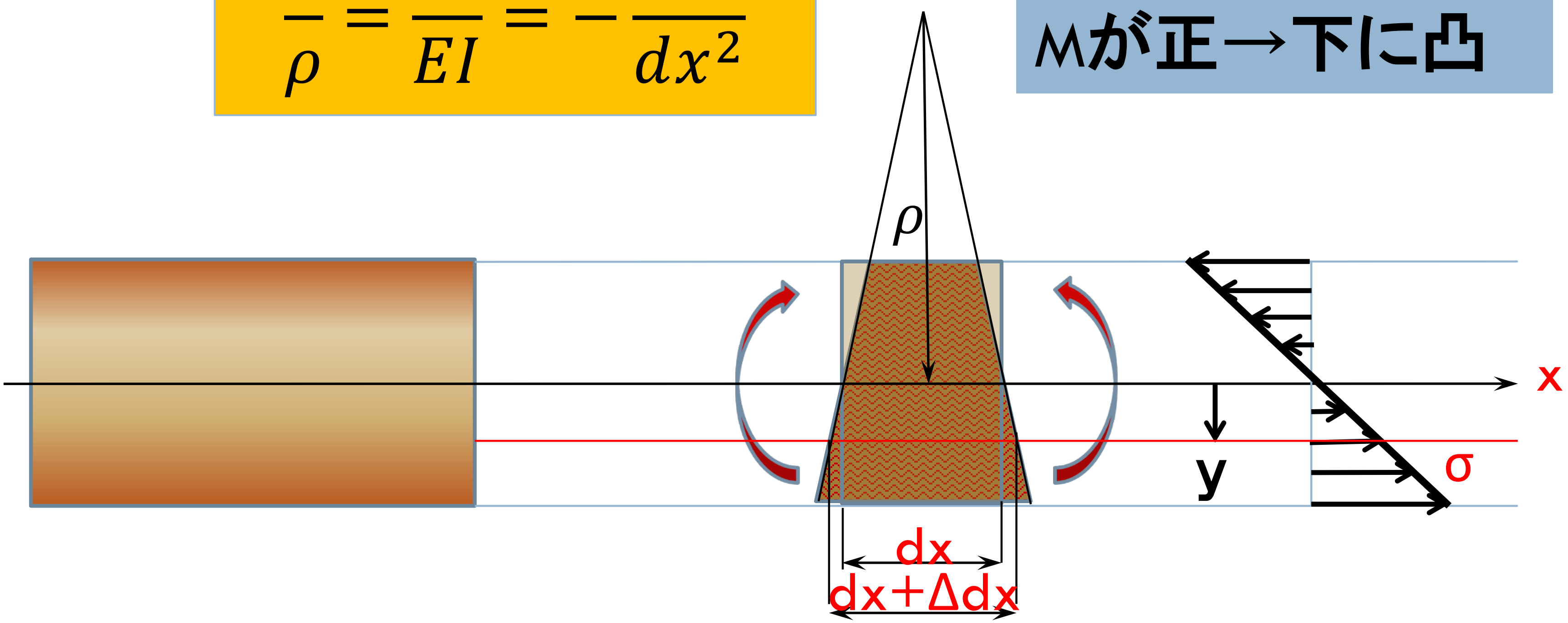
はりの曲げによる変形

梁の曲げ変形を求める

$$\frac{dx}{\rho} = \frac{\Delta dx}{y} = \frac{\varepsilon dx}{y} = \frac{\sigma dx}{Ey} = \frac{M dx}{EI}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = -\frac{d^2 v}{dx^2}$$

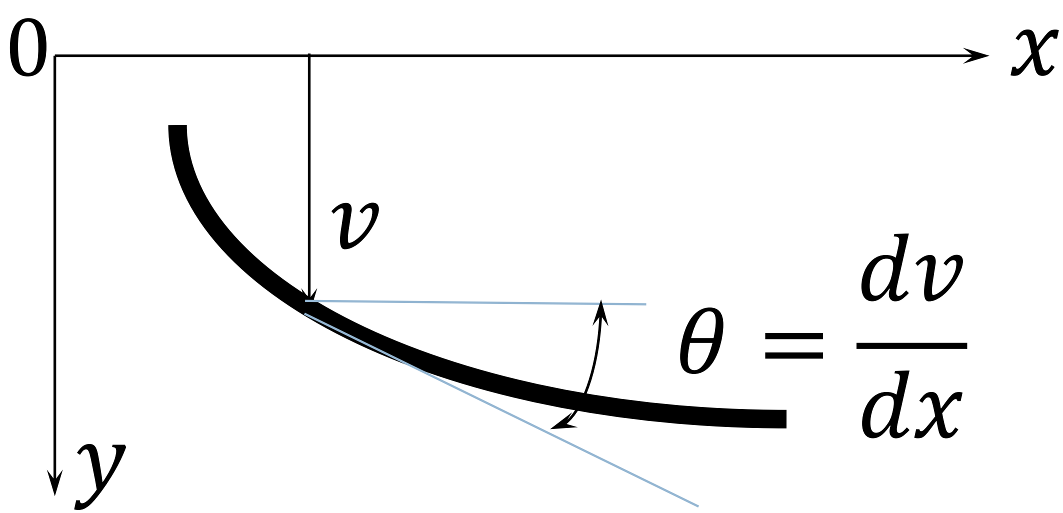
なぜ負号？
Mが正→下に凸



たわみ曲線の方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI}$$

v:たわみ　θ:たわみ角　EI:曲げ剛性

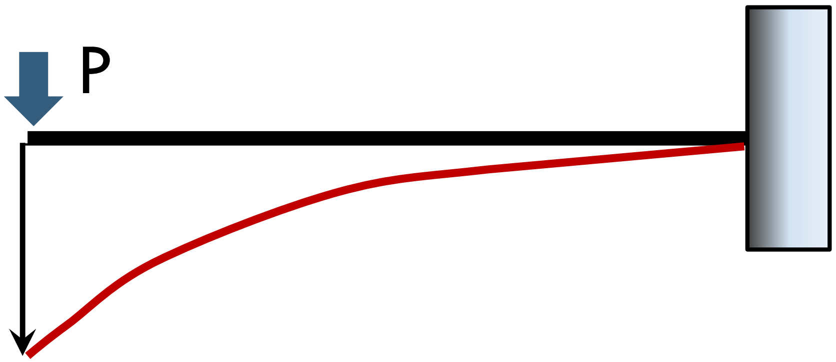


$$\theta = \frac{dv}{dx}$$

右辺がｘの関数であるから，求まる.
積分して境界条件を代入.

荷重→反力→内力→応力度→ひずみ→変位

たわみはどれだけ違うか・・・



$$EIv_{max} = \frac{PL^3}{3}$$

$$EI\theta_{max} = -\frac{PL^2}{2}$$

曲げ変形がEIに反比例
EI：曲げ剛性という.

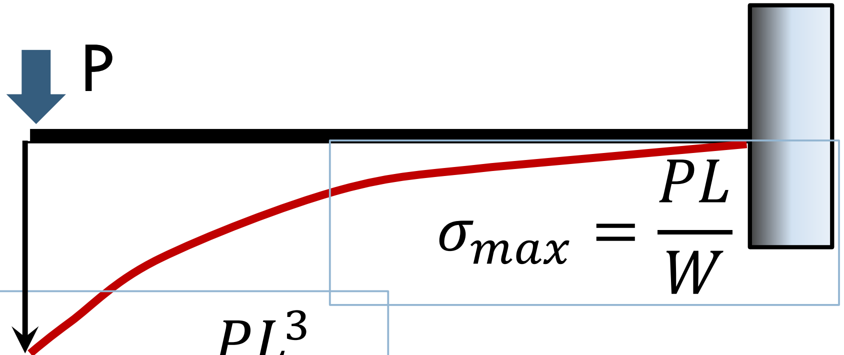
荷重だけが２倍
→　たわみは２倍

梁の長さだけが２倍
→　たわみは８倍

ヤング率だけが２倍
→　たわみは半分

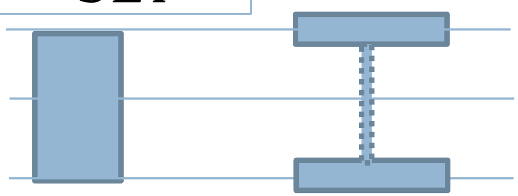
断面二次モーメントだけが２倍
→　たわみは半分

長方形断面とI型断面では，たわみや応力度はどれだけ違うか・・・



$$\sigma_{max} = \frac{PL}{W}$$

$$v_{max} = \frac{PL^3}{3EI}$$



幅a,高さ2aの長方形断面

同じ断面積，同じ縁短距離の理想的I型断面

長方形断面と同じ面積の理想的なI型断面の断面二次モーメントの比は・・・

$$\frac{a \times (2a)^3}{12} : 2a^2 \times a = 1:3$$

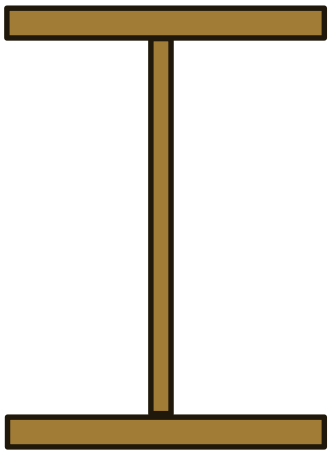
縁短距離も等しいので，断面係数の比は・・・

$$\frac{2a^3}{3a} : \frac{2a^3}{a} = 1:3$$

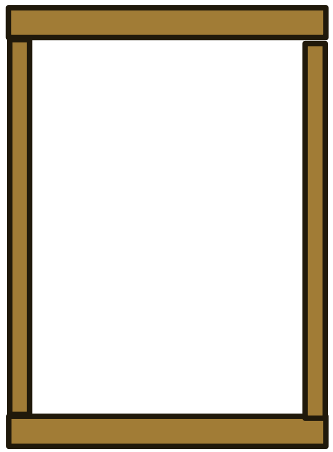
曲げ応力度は，$\frac{1}{3}$倍

たわみは，$\frac{1}{3}$倍

鋼とコンクリートの違い



I型断面



箱型断面
（ねじりに強い）

引張強度と圧縮強度が等しい 金属材料の典型的な断面	引張強度が極端に 小さいコンクリート

いずれの場合にも，フランジに断面を配置し，ウェブはそれをつなぐ役目

122

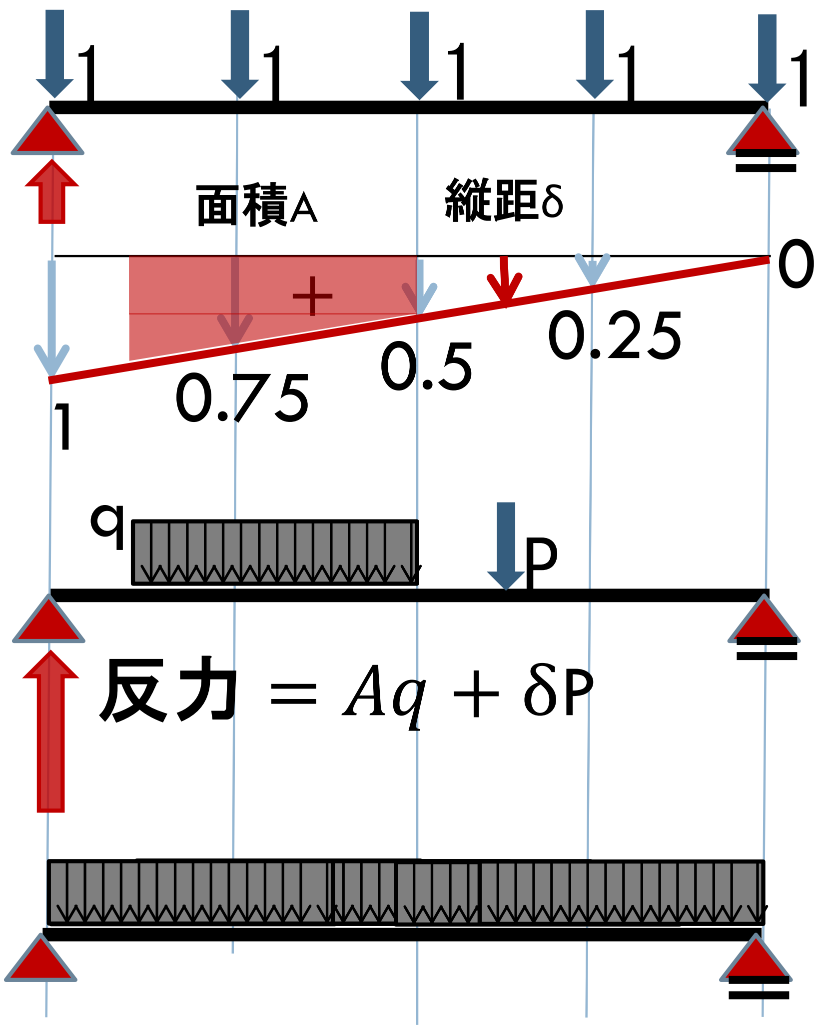
移動荷重と影響線

土木のみで使われる影響線

- 車両など，移動する荷重を扱う土木
- 構造物のどこに移動荷重がある時，構造物や部材は最も危険なのかを知る．→荷重位置特定．
- その時の，反力，合応力などを知ることができる．
- 重ね合わせの原理（すなわち，“足し算”）が成立する場合に適用可能．

はりのある位置に単位荷重が作用した時の，特定の力学量を，そのはりの位置の縦距としてプロットした線図

影響線の描き方と用法

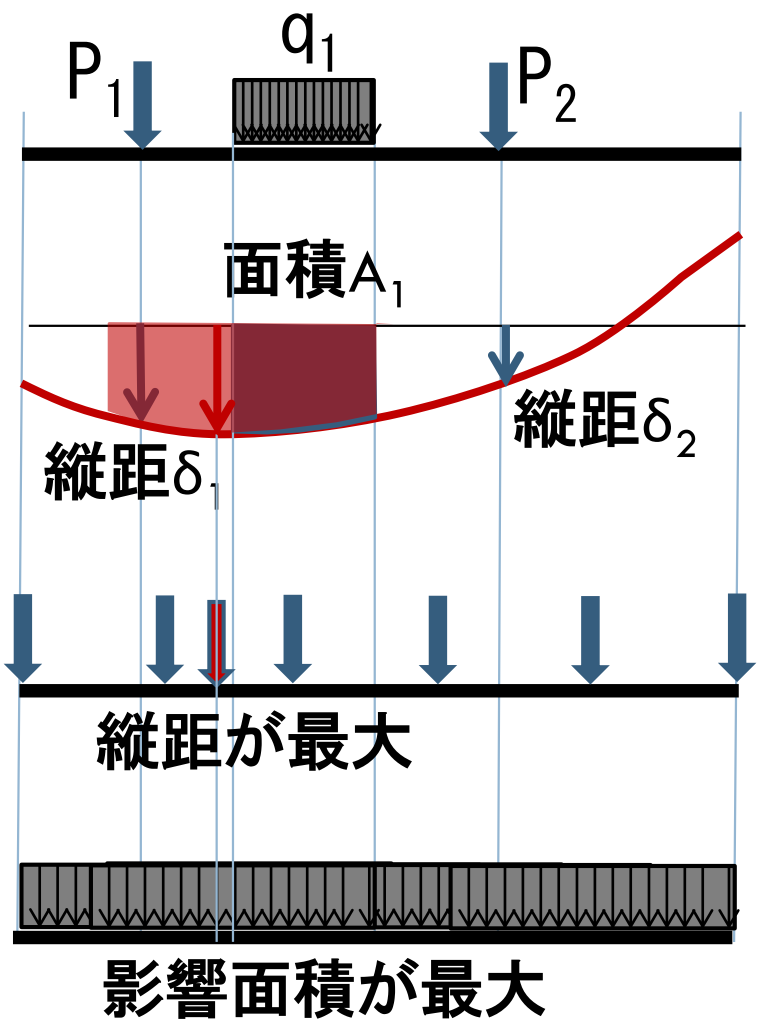


描画
- 左端支点反力の影響線は？

探索
- 最大の反力になる荷重位置？

算出
- この荷重に対する左端支点反力は？

影響線の用法



求めたい力学量

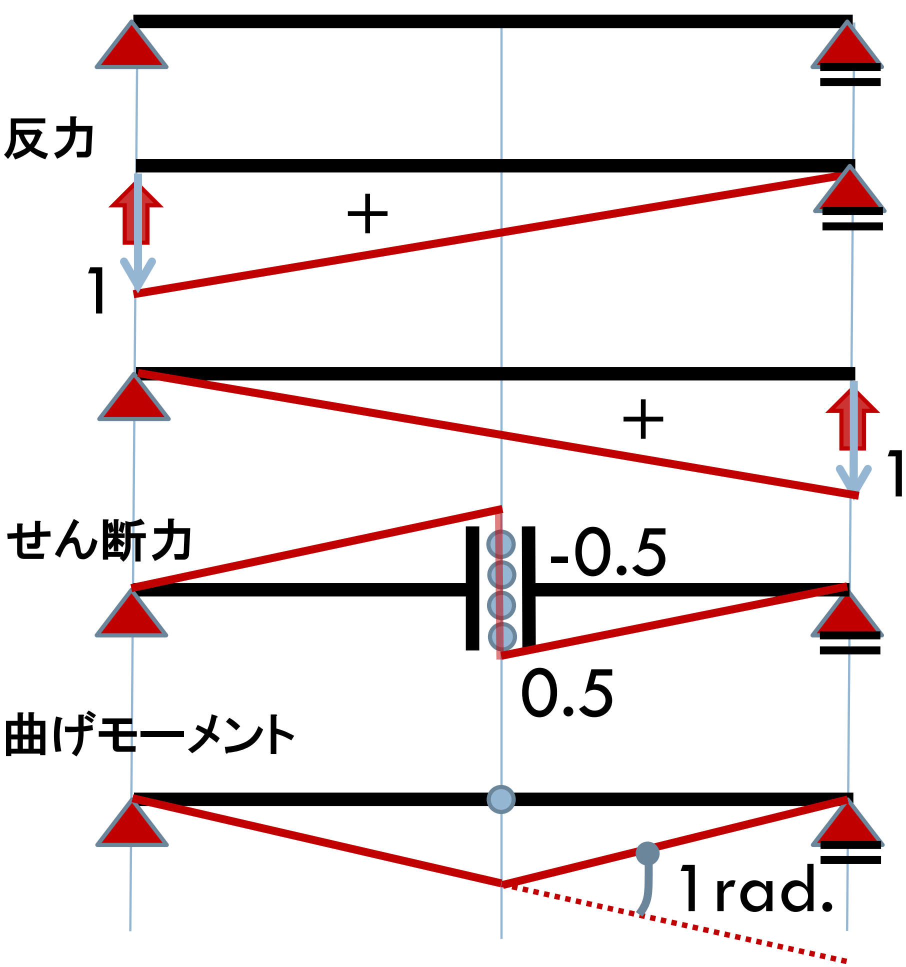
$$= \sum A_i q_i + \sum \delta_i P_i$$

力学量の絶対値最大となる載荷位置を求める

集中荷重 → 縦距の絶対値が最大

分布荷重 → 影響面積が最大

影響線の描き方（お勧め）

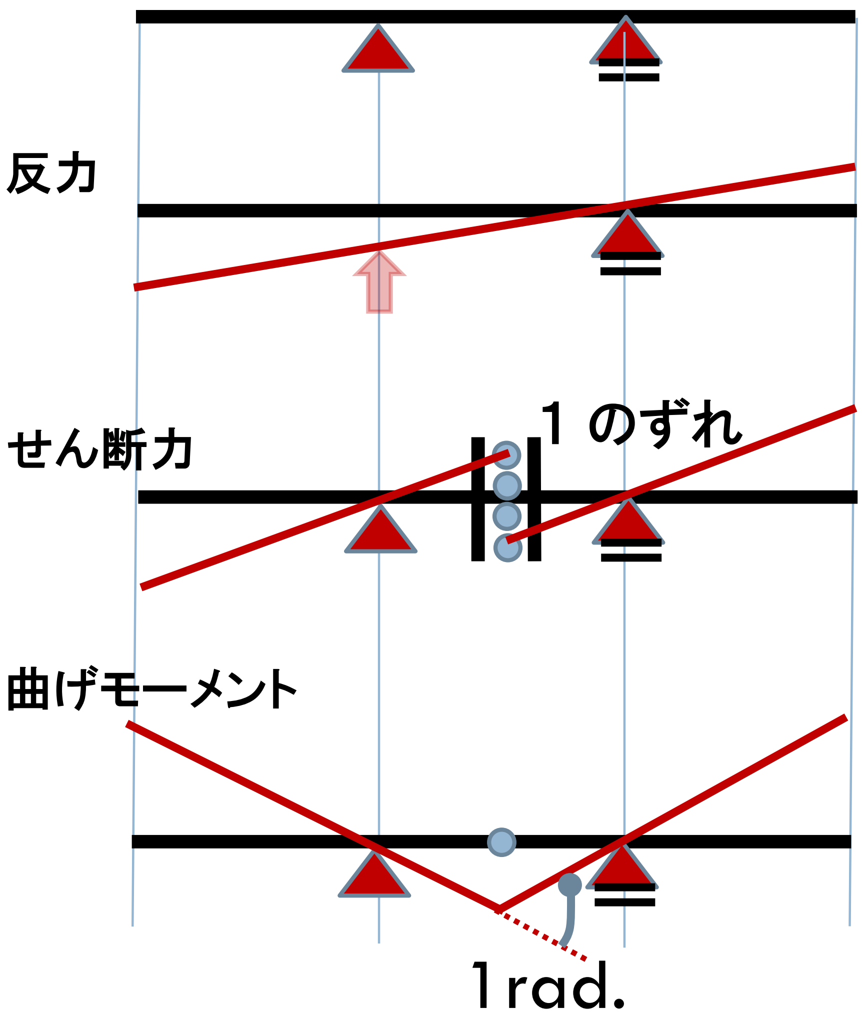


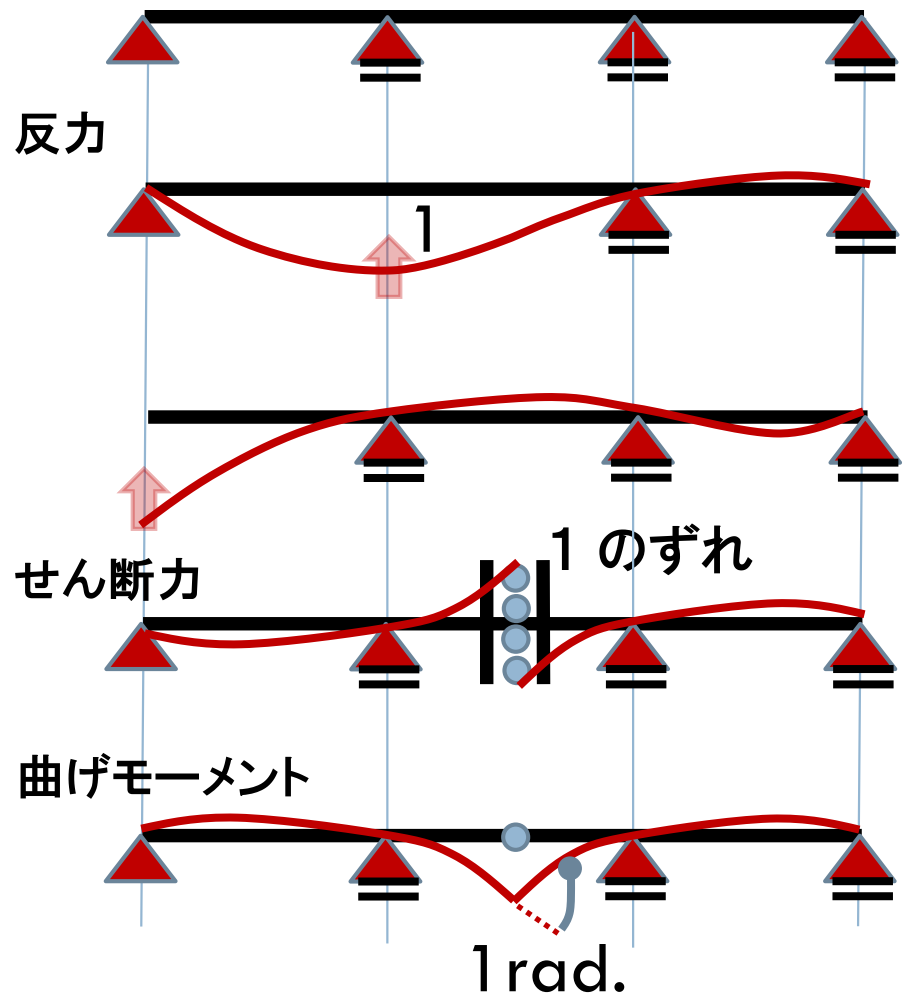
仮想
- その力学力が生じない仮想構造

強制
- その力学力と逆向きの1.0の強制変位

変位
- この変位形状が影響線

不静定はりの影響線も描ける.





128

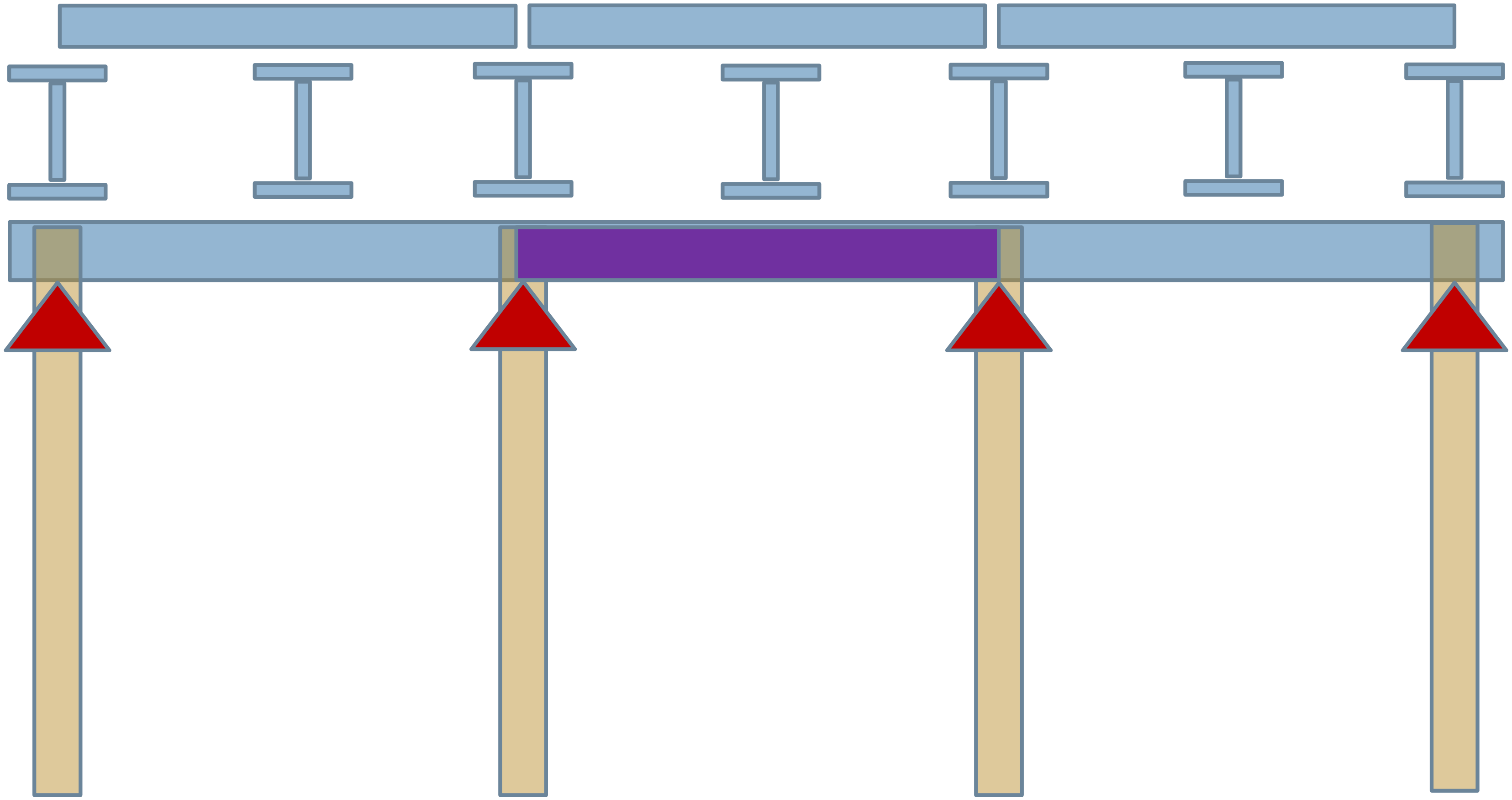
設計演習にむけた構造力学のポイント

演習における対象構造

- 設計演習Ⅰ　鋼構造物（仮設構台）の設計
  各種の荷重を受ける単純梁としての解析
  →曲げ応力度、せん断応力度、たわみ等の算定
  （本講義で学習した方法により）
- 設計演習Ⅱ　RC構造物（逆T型擁壁）の設計
  各種の荷重を受ける片持ち梁として解析
  →曲げ応力度、せん断応力度の算定
  （RCは複合材料。応力度算定式は演習にて。）

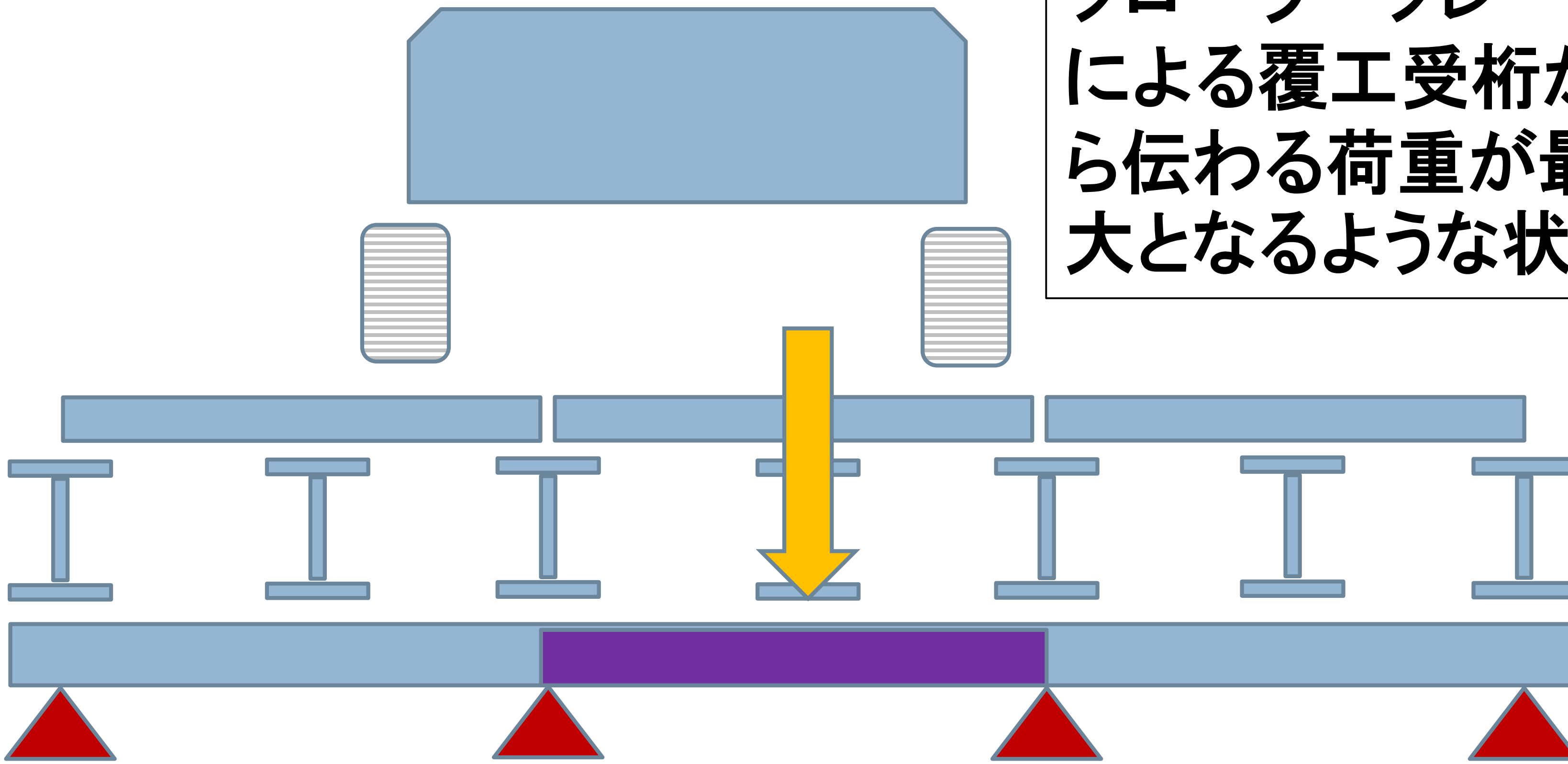
設計演習Ⅰ 鋼構造物（仮設構台）の設計

仮設構台の桁受のモデル化



仮設構台の桁受のモデル化

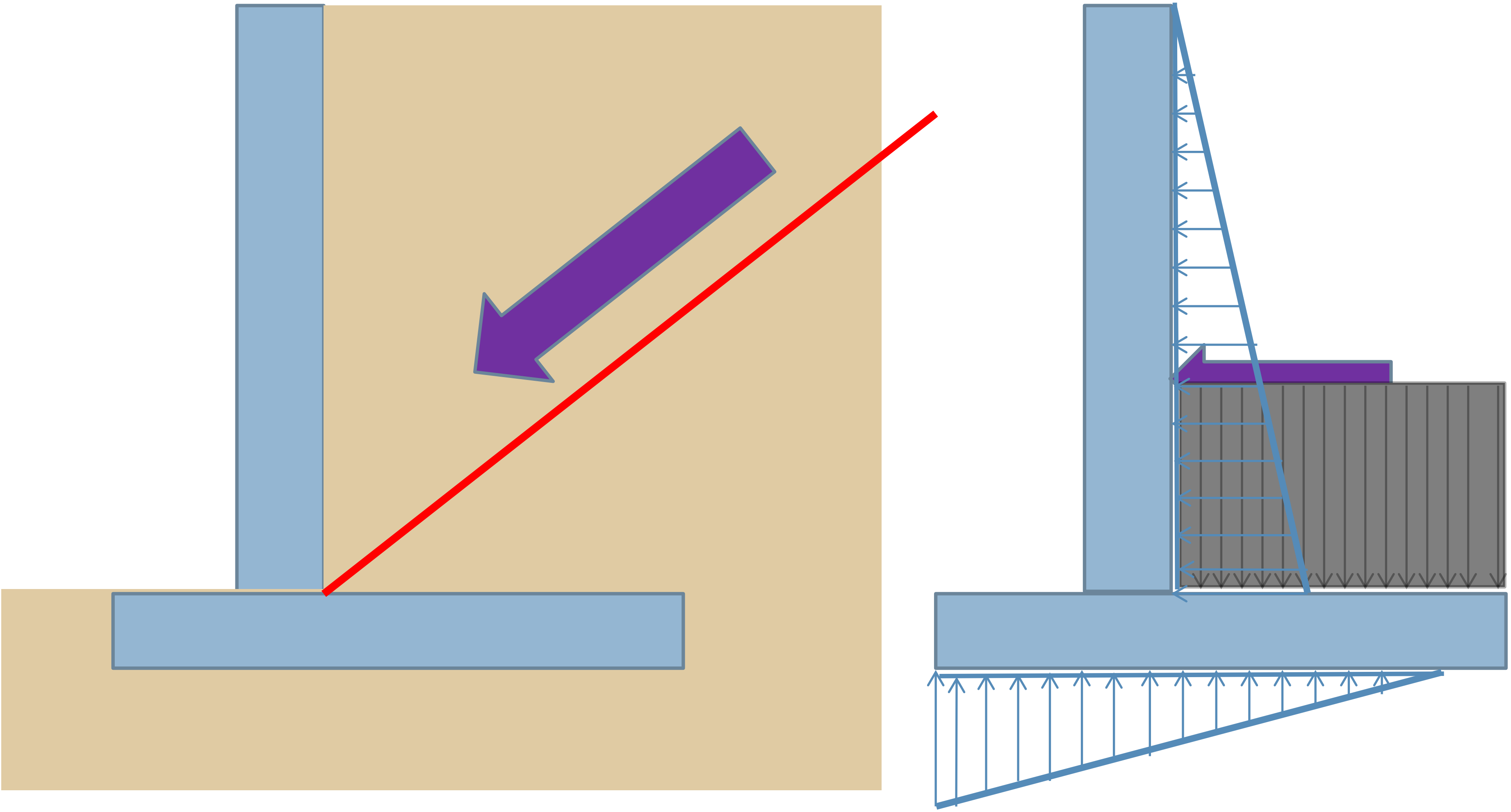
クローラークレーンによる覆工受桁から伝わる荷重が最大となるような状況



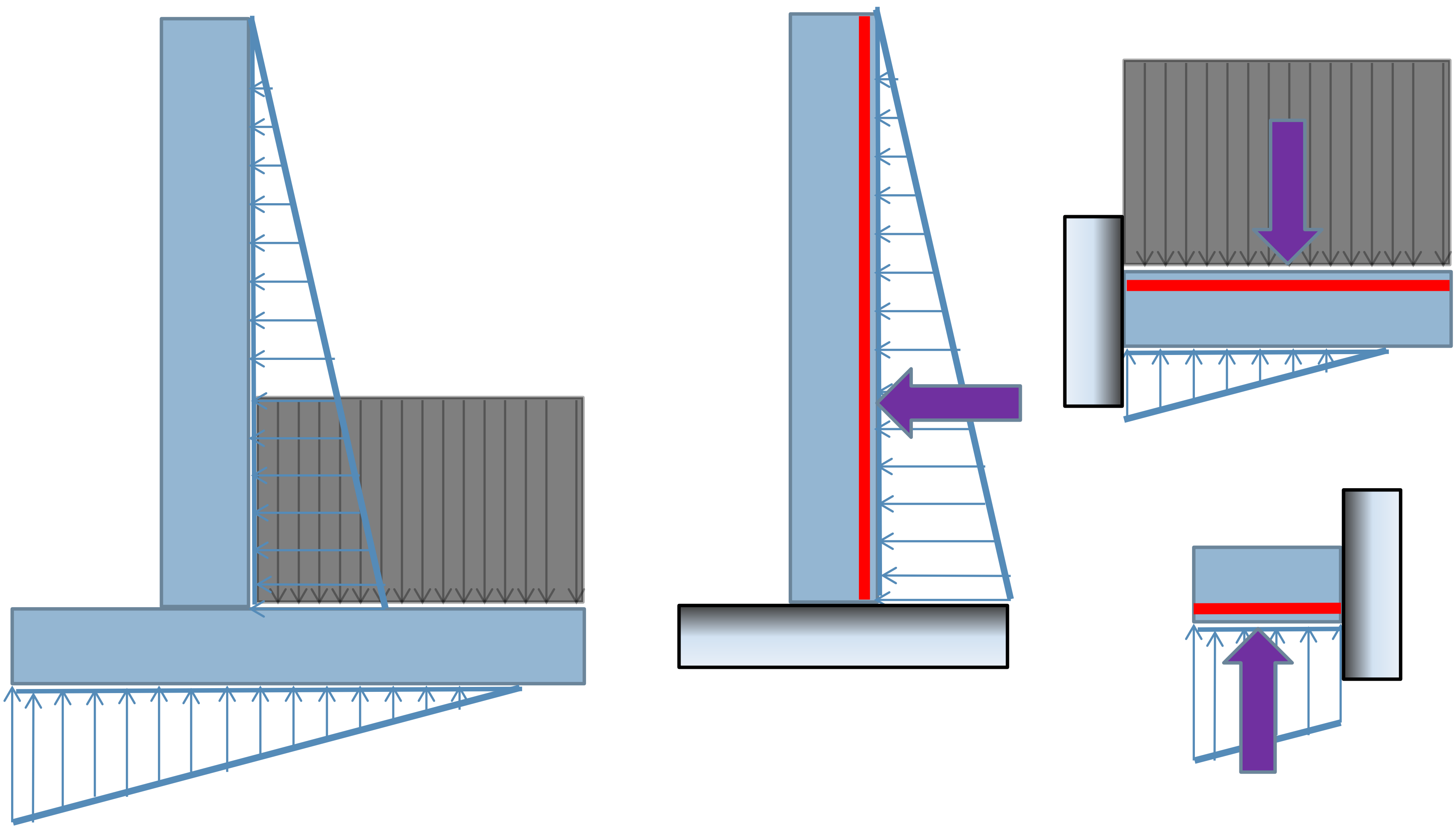
設計演習Ⅱ RC構造物（逆T型擁壁）の設計

逆T型擁壁のモデル化

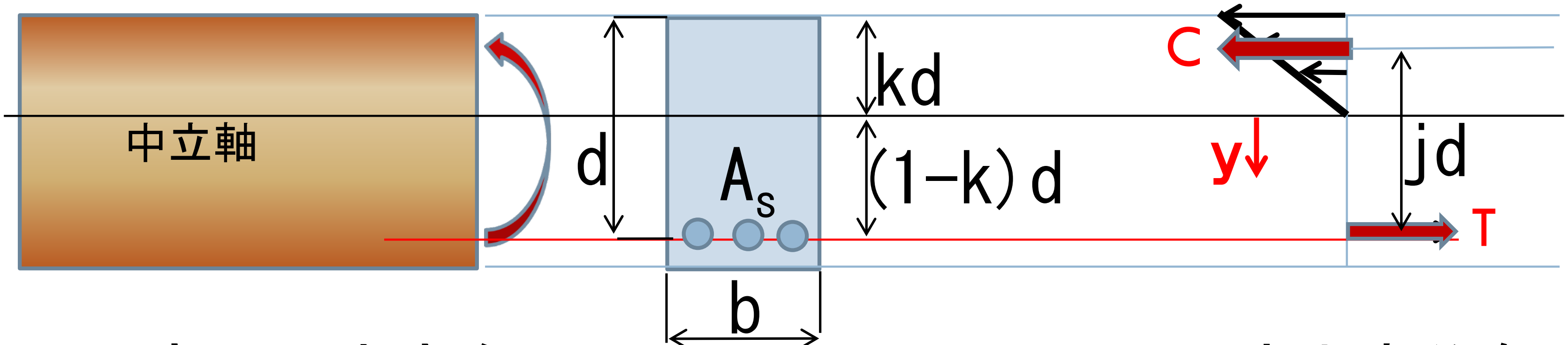
（旧 武蔵工業大学）
東京都市大学
TOKYO CITY UNIVERSITY



逆T型擁壁のモデル化



曲げを受ける矩形RC梁の応力度



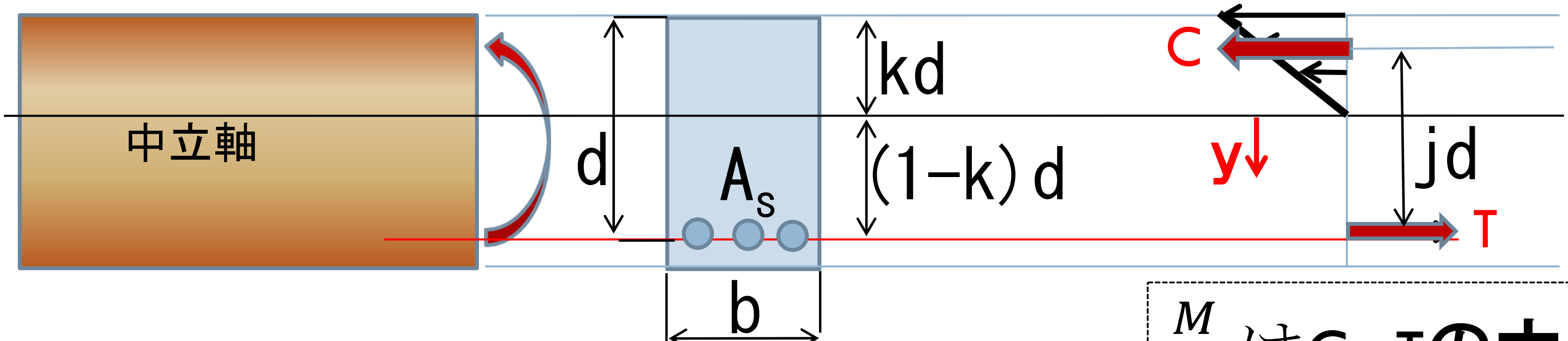
梁の一部（長さ方向）　　断面　　応力度分布

仮定1. コンクリートは圧縮のみに抵抗. 引張応力度は無視する.
仮定2. 鉄筋はヤング率の比をnとし, n倍の面積のコンクリートと同じとみなす.

$$C = \frac{M}{I}\int_0^{kd} ydA = \frac{M}{I}\int_0^{kd} ybdy = \frac{Mb}{I}\frac{k^2d^2}{2}$$

$$T = \frac{M}{I}(1-k)dA_s n \qquad p = \frac{A_s}{bd}, \ n=15$$

曲げを受ける矩形RC梁の応力度



$\frac{M}{jd}$ はC=Tの大きさ

$T = C$より　$k^2 + 2npk - np = 0$

解くと　$k = -np + \sqrt{(np)^2 + 2np}$

一方　$jd = d - \frac{kd}{3}$ より $j = 1 - \frac{k}{3}$

$$\sigma_s = \frac{M}{jd}\frac{1}{A_s} \qquad \sigma_c = \frac{M}{jd}\frac{1}{kd\frac{b}{2}}$$

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s jd}$$

$$\sigma_c = \frac{2M}{kbjd^2}$$

参考にした書籍

- 﨑元達郎：基本を学ぶ構造力学―静定から不静定の初歩まで―，森北出版
- 﨑元達郎：第2版　構造力学（上），（下），森北出版，2012.11.
- Ｍ.サルバドリー，Ｒ．ヘラー（望月重訳）：建築の構造，鹿島出版会，1968.2.

お疲れ様でした.