

# ひずみ軟化材料に対する構成則の ひずみ空間における定式化

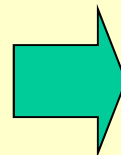
指導教員 皆川 勝

学生氏名 市川 岳

# 1. はじめに

- ・構造物に使用している土木材料の塑性域を考慮した設計が必要とされている。
- ・現在有限要素プログラムを用いた数値シミュレーションは構造解析の多くの分野で広く利用されているが、強い材料非線形性を持つ構造物の解析に対して一般的に信頼できる結果を得られる段階には至っていないと思われる。

材料の有する  
塑性域の考慮



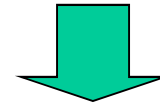
構造解析

非線形挙動を示す土木材料の応力-ひずみ関係を厳密に表現しうる構成則が必要となる

# 本研究の目的

土木材料として  
広く用いられている

:コンクリートや土等の非線形挙動

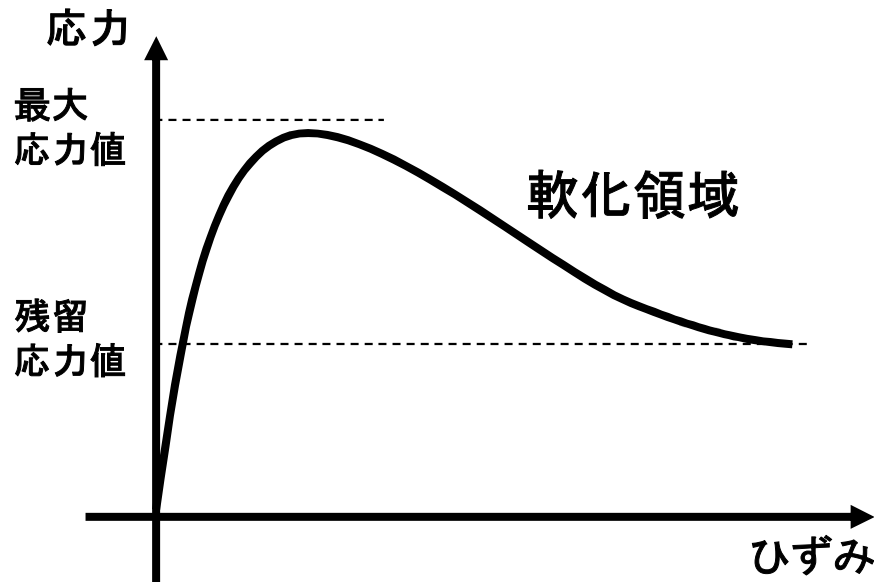


ひずみ軟化挙動に着目

## 弾塑性挙動を推定する

- ・応力を状態量とした場合、ひずみを状態量とした場合でそれぞれの載荷規準を比較しひずみ空間で定式化することの有効性を明確にする
- ・降伏関数をひずみ空間で定式化し増分形の応力-ひずみ関係式を導く
- ・得られた応力-ひずみ関係式を幾つかの状態に適用させ、数値計算を行う

## 2. ひずみ軟化挙動



単軸圧縮状態における  
ひずみ軟化材料の応力-ひずみ関係

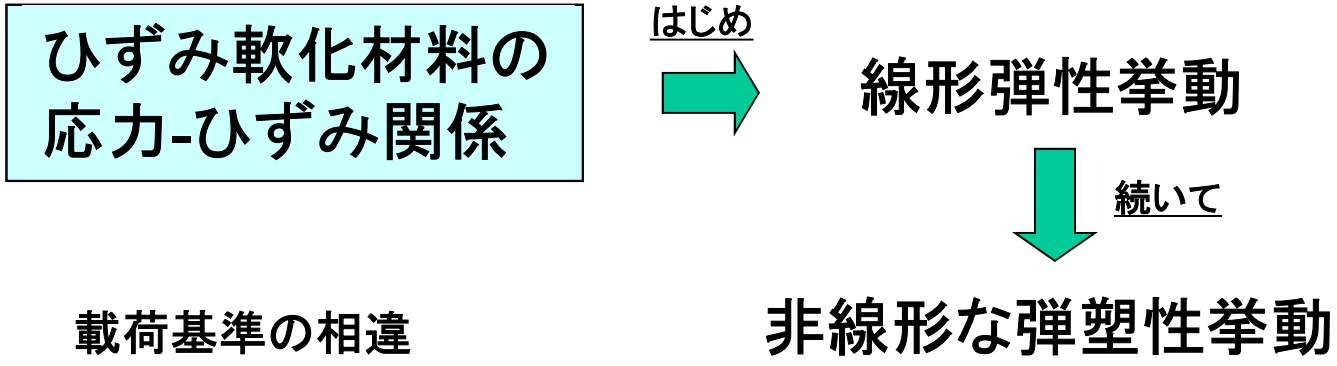
### 特徴

・最大応力値に達した後に見られる勾配が負となる応力-ひずみ挙動である

・ひずみ軟化挙動を示す材料は不均質な材料であるので、局所的に生ずる不安定性が全体としての強度を低下させる

・広範囲にわたるひびわれ発生により変形は増大するが同時に多くのエネルギーが吸収されるので材料は安定化する

### 3. 載荷規準の検討



載荷基準の相違

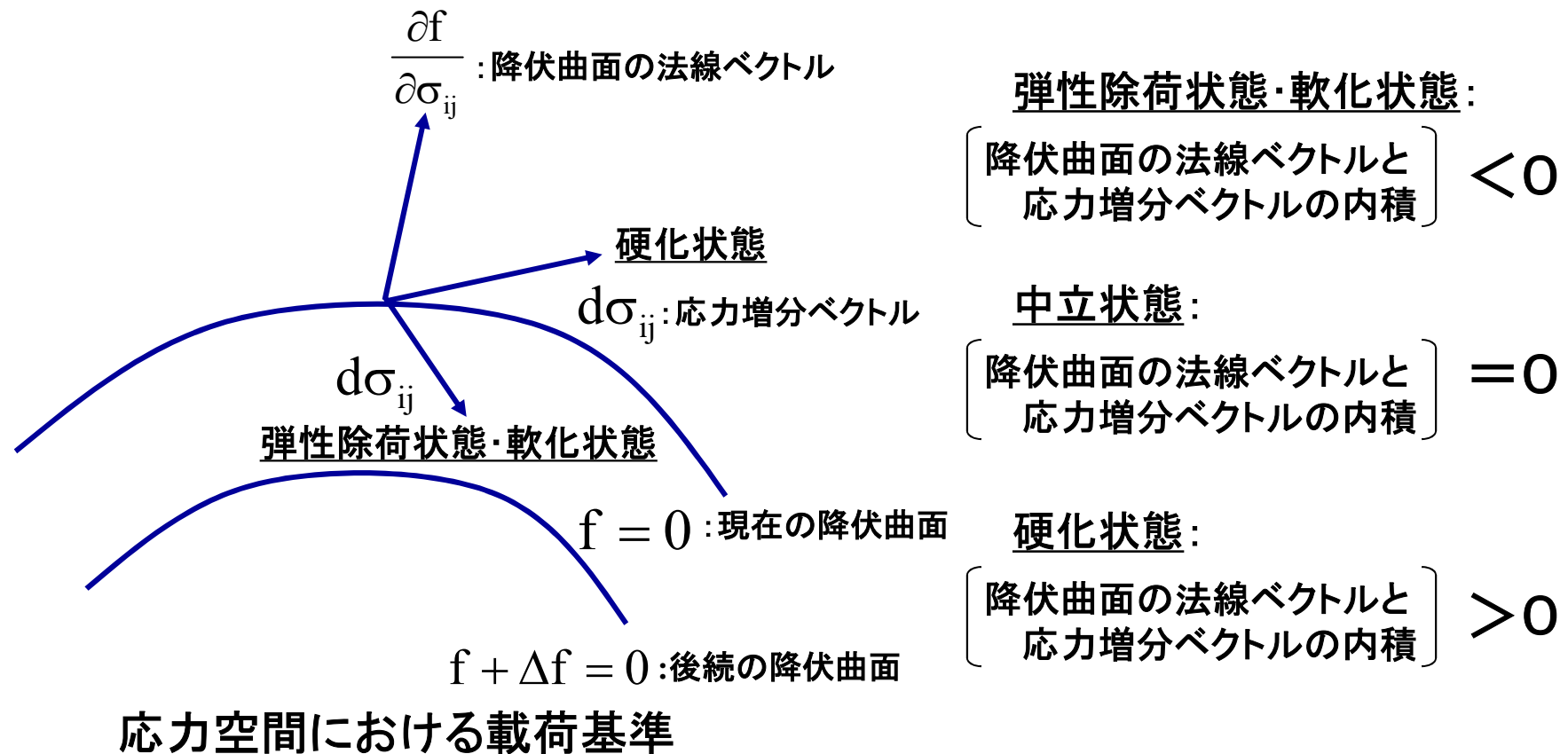
応力を状態量とした 載荷基準	ひずみを状態量とした 載荷基準
弾性除荷 状態 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$	弾性除荷 状態 $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} < 0$
中立状態 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$	中立状態 $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = 0$
塑性載荷 状態(硬化) $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$	塑性載荷 状態(硬化) $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} > 0$
塑性載荷 状態(軟化) $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$	塑性載荷 状態(軟化) $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} > 0$

応力を状態量としたとき

負荷状態, 除荷状態, および  
中立状態を判別する載荷基準  
に矛盾を生じる

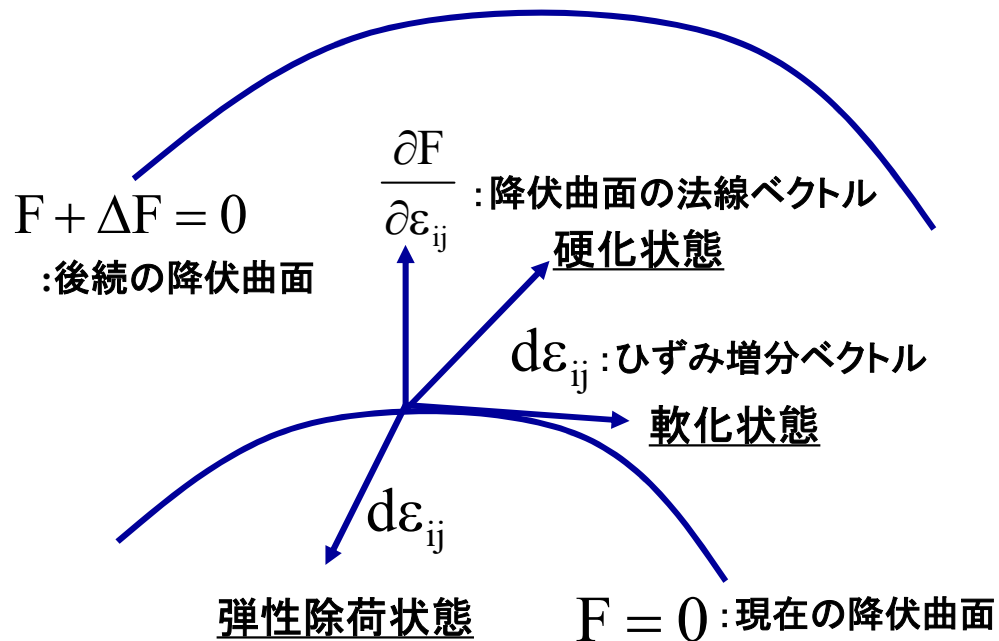
### 3. 1 応力を状態量とした降伏関数の载荷基準

- ・軟化域において後続の降伏曲面は内側に配置



### 3. 2 ひずみを状態量とした降伏関数の载荷基準

- ・軟化域において後続の降伏曲面は外側に配置



ひずみ空間における载荷基準

弾性除荷状態:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{降伏曲面の法線ベクトルと} \\ \text{ひずみ増分ベクトルの内積} \end{array} \right] < 0$$

中立状態:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{降伏曲面の法線ベクトルと} \\ \text{ひずみ増分ベクトルの内積} \end{array} \right] = 0$$

硬化状態・軟化状態:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{降伏曲面の法線ベクトルと} \\ \text{ひずみ増分ベクトルの内積} \end{array} \right] > 0$$

応力を状態量とした降伏関数による载荷基準



弾性除荷状態と軟化状態を  
载荷基準により区別することが不可能



応力空間で定義した降伏曲面はひずみ軟化現象を  
モデル化するには不適當

本研究では

ひずみ空間において降伏関数を定義



## 4. ひずみ空間における構成則の定式化

### a) ひずみ空間における降伏関数

応力を状態量とした降伏関数:  $f(\sigma_{ij}, \kappa) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{応力 } \sigma_{ij} \\ \text{ひずみの} \\ \text{弾性成分 } \varepsilon_{ij}^e \end{array} \right\} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad \underline{\varepsilon_{ij}} = \varepsilon_{ij}^e + \underline{\varepsilon_{ij}^p}$$

全ひずみ      ひずみの塑性成分

$$\underline{\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p)}$$

ひずみを状態量とした降伏関数:

$$f = f[C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p), \kappa] = F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) = 0$$

## b) 弾塑性構成式

ひずみ空間における降伏関数:  $F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) = 0$

$$\text{適合条件式: } dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0$$

$$\text{流れ則: } d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

### 増分形の応力-ひずみ関係式

$$d\sigma_{ij} = [C_{ijkl}^{e-p}] d\varepsilon_{kl} = \left( C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}}}{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ab}} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ab}} - \frac{\partial F}{\partial \kappa} b_{cd} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{cd}}} \right) \cdot d\varepsilon_{kl}$$

## 5. 適用例

### ひずみを状態量とした von Misesの降伏関数とDrucker-Pragerの降伏関数

von Misesの降伏関数:  $F(J_2, \kappa) = J_2 - \kappa - k^2 = 0$

Drucker-Pragerの降伏関数:  $F(I_1, J_2, \kappa) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \kappa - k = 0$

ここで  $I_1 = 3K(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{ii}^p)$

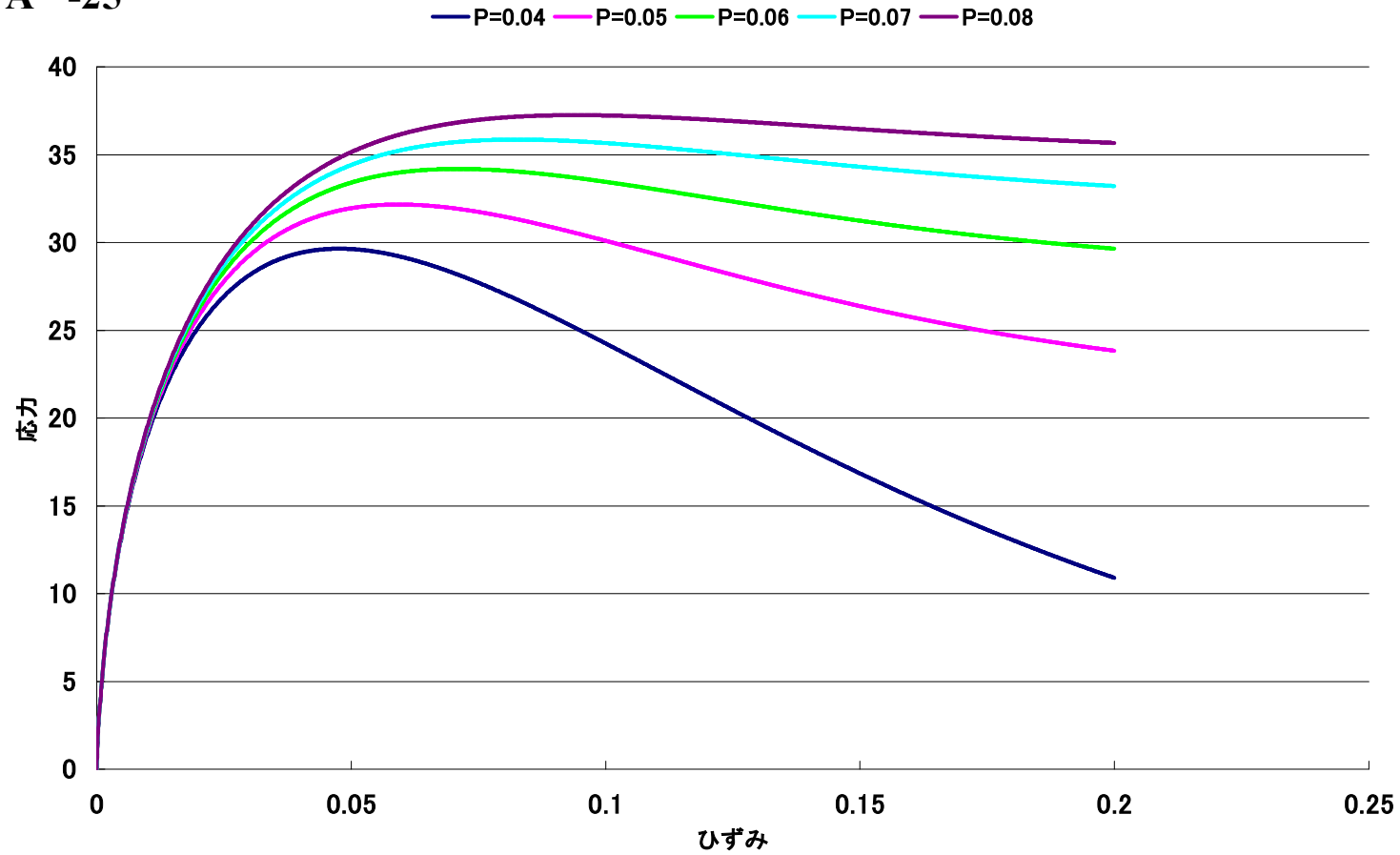
$$J_2 = 2\mu^2 (e_{ij} - e_{ij}^p)(e_{ij} - e_{ij}^p) - \kappa - k = 0$$

ひずみ空間で定義したの二つの降伏関数を用いて  
単軸応力状態での応力-ひずみ関係をシュミレートする

# パラメータ P の変化に対する挙動の変化 (von Misesの降伏関数)

H=20000

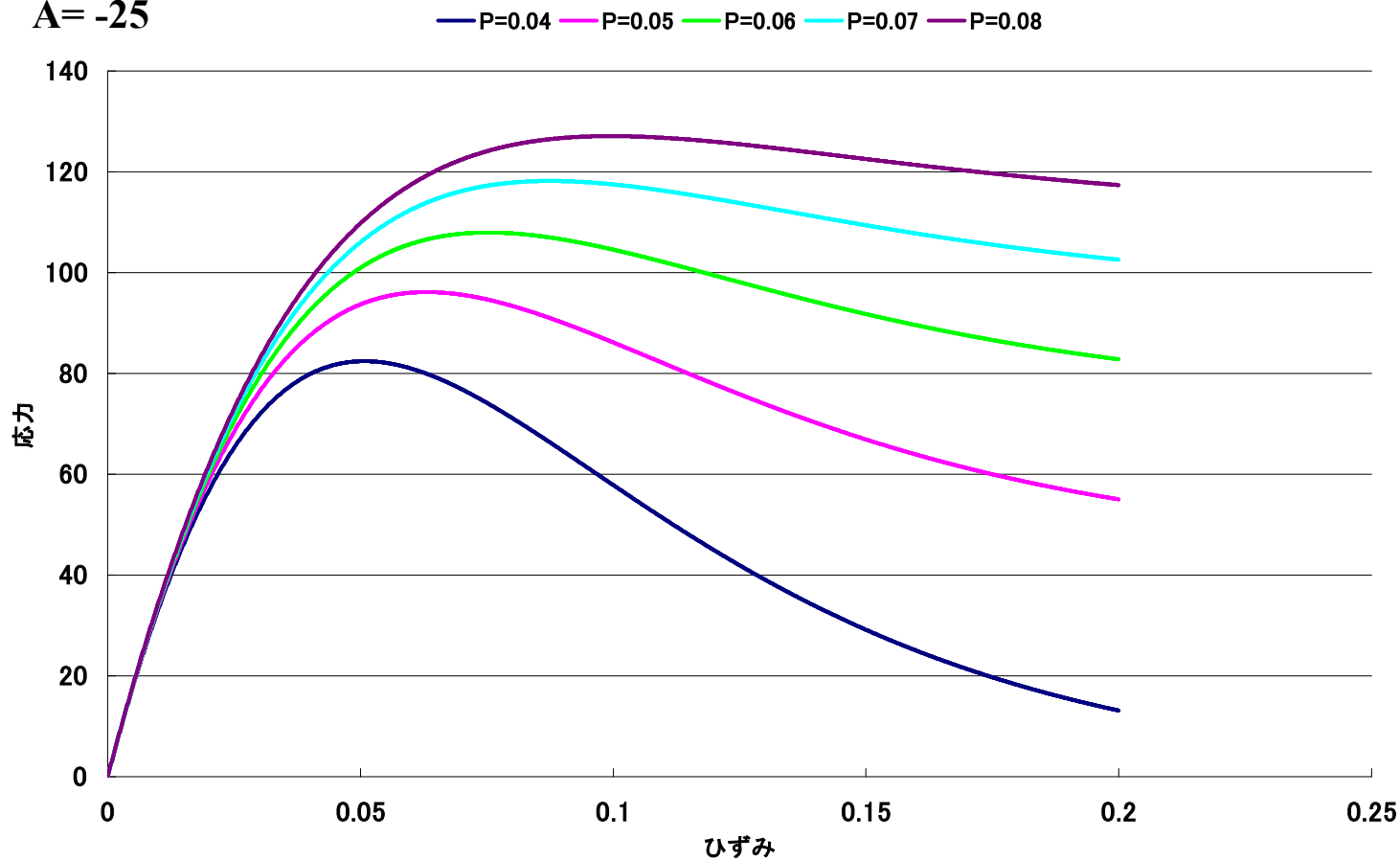
A= -25



# パラメータ P の変化に対する挙動の変化 (Drucker-Pragerの降伏関数)

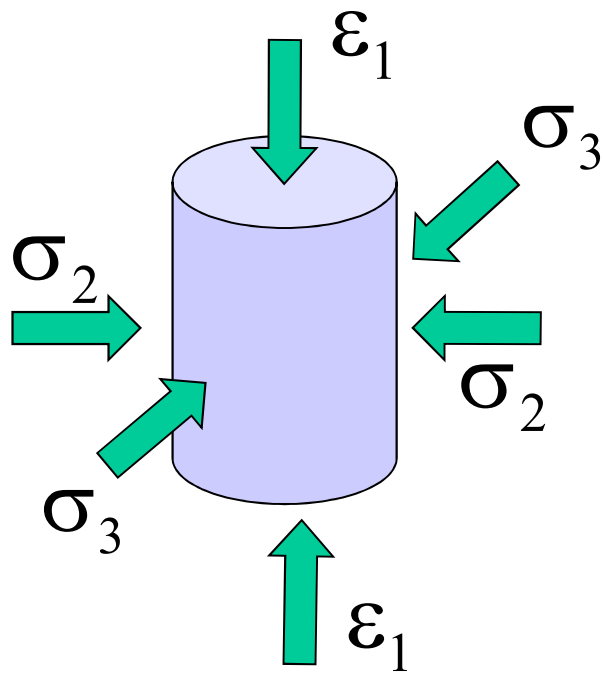
H=20000

A= -25



# 多軸応力状態への適用

- ・ 図に示すような拘束圧を加えた条件で軸方向にひずみを与えた状態を考える



応力-ひずみ関係式:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

$\sigma_2, \sigma_3, \epsilon_1$  : 既知

$\sigma_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  : 未知

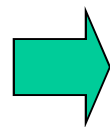
ここで

未知の応力成分:  $\sigma_A$       既知の応力成分:  $\sigma_B$

未知のひずみ成分:  $\varepsilon_B$       既知のひずみ成分:  $\varepsilon_A$

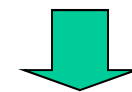
$$\begin{bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{AA} & C_{AB} \\ C_{BA} & C_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_A = C_{AA} \cdot \varepsilon_A + C_{AB} \cdot \varepsilon_B \\ \sigma_B = C_{BA} \cdot \varepsilon_A + C_{BB} \cdot \varepsilon_B \end{cases}$$



未知のひずみ成分:

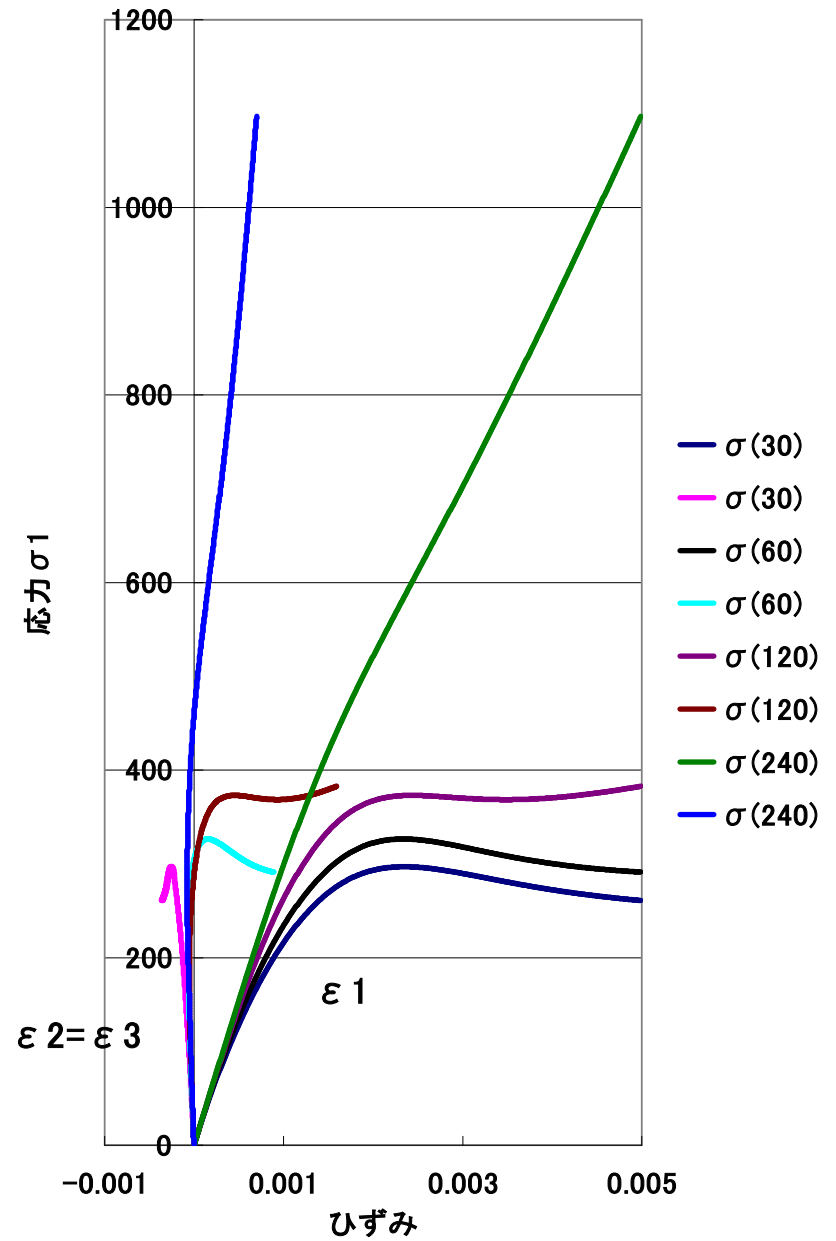
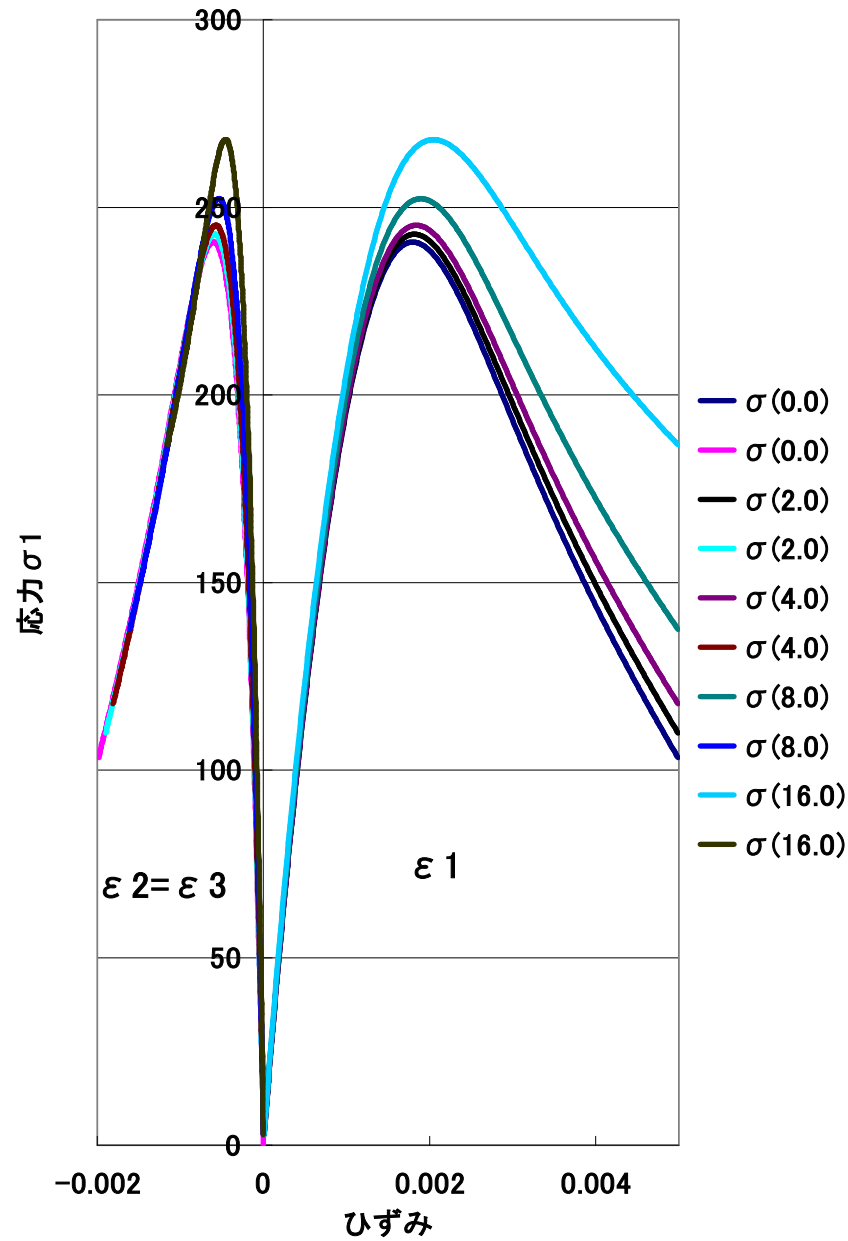
$$\varepsilon_B = C_{BB}^{-1} \cdot [\sigma_B - C_{BA} \cdot \varepsilon_A]$$



未知の応力成分

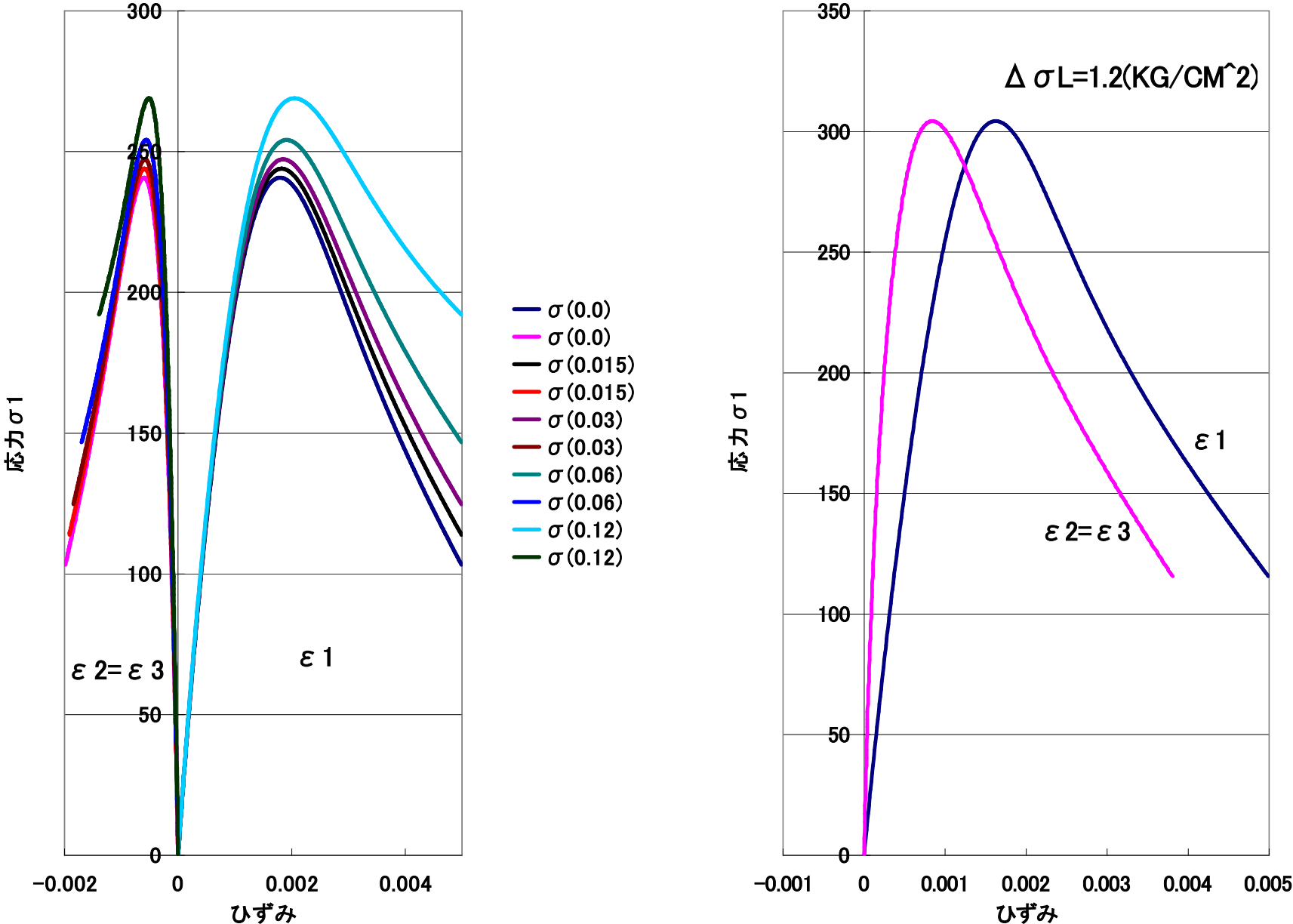
以上の流れで、von Misesの  
降伏関数を用いて数値計算を行った

# 側圧一定による計算結果





# 側圧漸増による計算結果



# 考察

## 側圧を一定とした場合

- 側圧を一定とした条件では、側圧を大きくするに従いピーク応力が上昇するとともに、材料が硬化するという一般に認められる結果を得た。
- 側圧が軸力の10%を超えると次第に横ひずみが減少し、圧縮に転ずるとともに、ピーク応力が上昇してついには軟化現象を示さなくなった。

## 側圧を漸増させた場合

- 側圧を一定速度で漸増させた条件では、定性的には側圧一定とした場合と同様の傾向を示す。
- 漸増させた側圧が極端に大きくなると、横ひずみが圧縮に転ずるが、側圧一定としたときのような軟化挙動が焼失するような現象は現れなかった。

## 6.まとめ

- 応力空間及びひずみ空間における塑性理論による応力-ひずみ増分関係の定式化の違いについて検討し、ひずみ空間で定式化を行った場合には載荷規準の判定が明確となることを示した。
- ひずみを状態量とした降伏関数および塑性ポテンシャル関数を流れ則に導入し、ひずみ空間での増分形応力-ひずみ関係式を誘導した。
- 誘導した増分形応力-ひずみ関係式にvon Misesの降伏関数、Drucker-Pragerの降伏関数を単軸圧縮状態で適用させ、ひずみ軟化挙動を表現できることを表現した。
- 得られた増分形応力-ひずみ関係式を多軸状態へと拡張し、von Misesの降伏関数を適用させ、種々の側圧載荷状態での応力-ひずみ関係を定性的ではあるが表現しうることを示した。

## 課題

応力量が絶対値であるのに対し、ひずみ量は材料またはその製造過程などの要因により異なる値であることを考慮に入れる必要がある。