I-267　空間のモデル化と動的応答解析の精度についての一考察

武蔵工業大学　正　員　増田陳紀
武蔵工業大学　正　員　皆川　勝
武蔵工業大学　学生員　西本哲也

1. はじめに　衝撃などによる系の応答を数値解析的に解こうとするとき、系の空間的モデル化に際して生ずる離散化誤差のために、たとえ時間積分を厳密に行ったとしても、得られる応答結果はモデル化する前の実際の系の応答とは異ったものとなる。本小文は、時間積分の精度の問題とは別に、有限要素法などを用いた空間的モデル化における離散化誤差が、系の動的応答解析の精度に及ぼす影響を、1次元の波動方程式を対象として数値実験的に検討した結果を報告するものである。

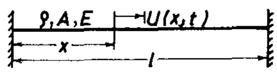

図1 対象とする系
(両端固定の棒の縦振動問題)

2. 対象とする系　たとえば、図1に示す両端を固定された長さlの一様な棒の縦振動問題が、ここで対象とする系の1例である。この系の支配方程式は、uを位置xの変位、tを時間、Aを断面積、ρを密度、Eを縦弾性係数とするとき、周知のように次式で与えられる。

$\rho A dx\, \partial^2 u/\partial x^2 = EA dx\, \partial^2 u/\partial t^2$　または　$\partial^2 u/\partial t^2 = c^2 \partial^2 u/\partial x^2$; $c=\sqrt{E/\rho}$

また、この場合の境界条件は　$u(0,t)=u(l,t)=0$　である。

表1 数値計算の対象とするモデル

1/2対称部分に対し	形状関数	質量行列 分布	質量行列 集中
5質点	1次式	5−1C	5−1L
	3次式	5−3C	5−3L
10質点	1次式	10−1C	10−1L

3. 対象構造のモデル化　ここでは、系の固有値の精度に及ぼす自由度数および形状関数の影響を検討するために、図1の構造の1/2対称部分を5等分割した5質点モデルおよび10等分割した10質点モデルを考える。形状関数としては、5質点モデルについては1次式および3次式、10質点モデルについては1次式を考慮し、それぞれ、集中質量行列および分布質量行列を用いたモデルとする(表1参照)。境界条件は固定端で$u=0$とし、応答計算に際しての初期条件は、1次式モデルに対して図2(a)、3次式モデルに対して図2(b)に示す条件を与える。

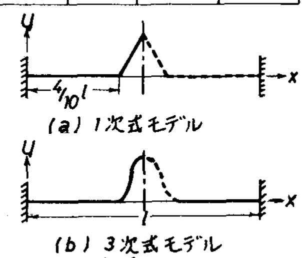

図2. 初期条件

4. 数値実験結果および考察　各モデルの応答計算結果を図3～5に示す。図3は、5質点1次式モデルの各質点の応答を、集中質量行列を用いた場合と分布質量行列を用いた場合とについて比較して示したもので、横軸は時間軸である。図中、直線の三角波で示されているのは、図2(a)の初期条件に対する理論解である。同様に図4は、5質点3次式モデルについて分布質量行列を用いた場合の各質点の応答結果である。集中質量行列を用いた場合の応答は応答の初期の部分だけ点線で示してある。また、細線は、固定端の境界条件を　$u=\partial u/\partial x=0$　としたときの結果であり、図6の一部である。図5は、10質点1次式分布質量モデルについての、5質点モデルに対応する各質点の応答結果である。これらの結果より、いずれのモデルにおいても時間の経過とともに、応答波形の解析解からのずれが増大してゆくのがわかる。　各モデルの固有振動数の理論解との比を示したものが図7であるが、周知のごとく、集中質量行列を用いた場合にはモデルの固有振動数は3次式モデルの高次の振動数を除いて実際より小さくなり、すなわち周期が伸び、分布質量行列を用いた場合には逆に周期が短かくなっていることがわかる。また、同じ自由度数で比較したとき、前者の誤差が大きいことも明らかである。　固有振動数の理論解は図8に縦線で示すように、最低次の振動数をその間隔として等間隔で無限に並ぶのに対し、各モデルの固有振動数は図7および図8にも見られるように高次の振動数になるほど対応する理論解との誤差が大きくなる。したがって、変形の初期条件に系の高次の振動モードを含むとき、その初期形状が離散化モデルの固有振動モードにより正しく表わされるとしても、高次の固有振動数の相対的に

大きな離散化誤差によって各固有振動数間の調和が崩れ、時間の進行と共に高次の振動モードが序々に分離して表われる形になって、実際の系の応答との誤差を拡大してゆくことになる。

ここで対象としたモデルの中では、形状関数を3次式とし、分布質量行列を用いたモデルが最も固有振動数に誤差が少なく(図8参照)、したがって応答計算結果も理論解を最も良く近似している(図4参照)。これは、対象とする変位分布形状の時間的推移を最も良く表わし得るモデルであることを意味している。いいかえれば、波形の任意の部分について空間メッシュのサイズで切断したとき、その部分の形状を各モデルがどの程度精度良く表現できるかということが、応答計算の精度を決定するものと考えられる。

5. おわりに

高次モードを無視し得ないような問題をある程度細かな挙動までも数値解析的に把握しようとする場合には、単に時間積分の時間刻み幅を高次の固有振動数との対応で決定するだけではなく、系の空間のモデル化の段階においても各固有振動数間の調和が保てるように留意することが必要と思われる。

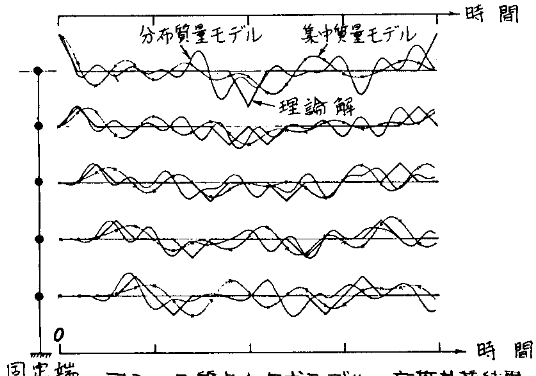

図3. 5質点1次式モデルの応答計算結果

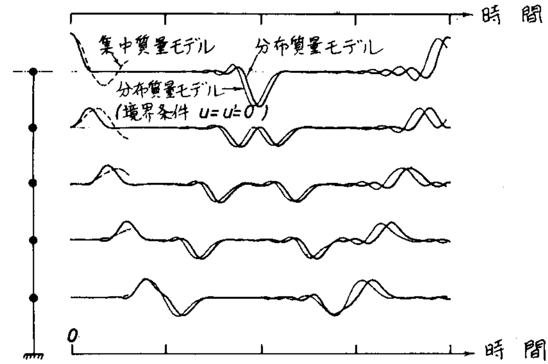

図4. 5質点3次式モデルの応答計算結果

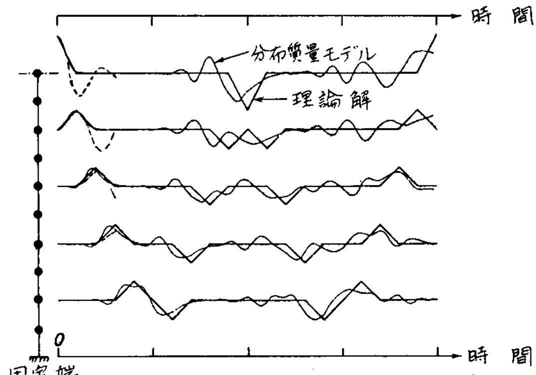

図5. 10質点1次式モデルの応答計算結果

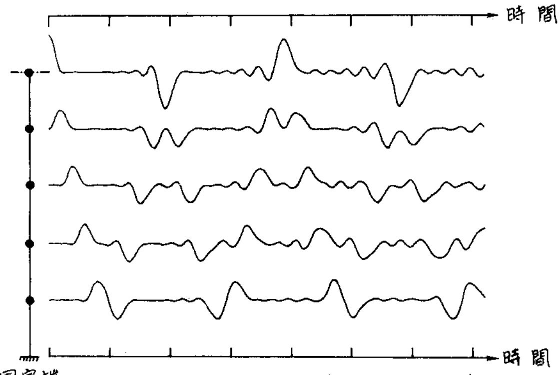

図6. 5-3Cモデルの応答($u(0,t)=\partial u/\partial x(0,t)=0$)

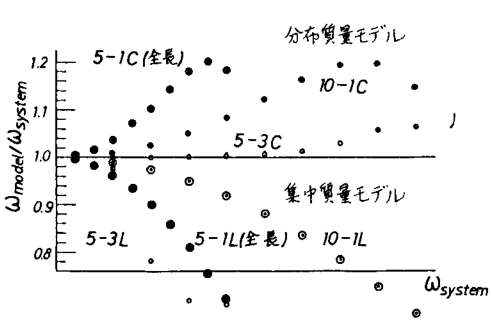

図7. 各モデルの固有振動数の理論値との比較図(理論値との比)

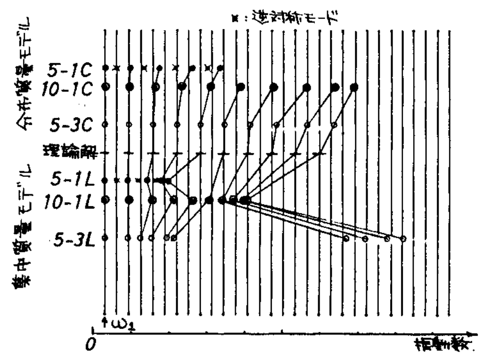

図8. 各モデルの固有振動数の理論値との比較図(固有値分布)