

武蔵工業大学 正会員 増田陳紀
 武蔵工業大学 正会員 西脇威夫
 武蔵工業大学 正会員 皆川 勝
 武蔵工業大学 学生員 山本英男

はじめに 幾何的3次元非線形問題の定式化においては、3次元空間における有限な回転をどのように取り扱うかが重要な問題となる。吉田・増田ら¹⁾は、一連の回転の結果を一つの軸回りの回転として捉え、個々の節点の動きを直接、座標および回転角によって描き、任意の増分に対して変形後のつり合い条件を正しく表わす増分つり合い方程式(式(1))を定式化し、さらに、物理的な考察に基づく解式過程を提示し、種々の数値解析例を通じて支配方程式の妥当性を明らかにした。しかし、そこでは本質的には2次元の有限な回転を生ずる問題のみが取り扱われていた。本報告は、上記増分つり合い方程式を対象に、ベクトル則に従わない3次元空間での有限な回転を生ずる問題にも対処し得る解式過程を提案し、併せてこの問題に対する上記つり合い式の妥当性を明らかにするものである。

$$\Delta f = \mathbf{T}_{(n+1)}^T \cdot \mathbf{K}^* \cdot \left[\mathbf{T}_{(n+1)} \cdot (\Delta \mathbf{u} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Delta \mathbf{r} \end{Bmatrix}) + \Delta \mathbf{T} \cdot (\mathbf{u} + \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ -\mathbf{r} \end{Bmatrix})_{(n)} \right] + \Delta \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f}_{(n)}^* \dots \dots \dots (1)$$

提案する解式過程 文献(1)で提案された解式過程を要約すると、①まず、増分前の第nつり合い状態において $\Delta \mathbf{T}$, $\Delta \mathbf{r}$ を $\Delta \mathbf{u}$ に関し線形化し、 $\mathbf{T}_{(n+1)}$ を $\mathbf{T}_{(n)}$ で近似して第1近似解を求め、②第2近似は、 $\Delta \mathbf{T}$, $\Delta \mathbf{r}$ を増分間の平均的な率化率を用いて評価し、 $\mathbf{T}_{(n+1)}$ は第1近似点で評価して求める、③以後の反復修正過程においては、 $\Delta \mathbf{T}$, $\Delta \mathbf{r}$, $\mathbf{T}_{(n+1)}$ のいづれをも前近似点での値により評価する(式(2)参照)、となる。

$$\Delta \mathbf{u}_{k+1} = (\mathbf{T}_k^T \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{T}_k)^{-1} \cdot \left\{ \Delta f - \mathbf{T}_k^T \cdot \mathbf{K}^* \cdot \left[\mathbf{T}_k \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\Delta \mathbf{r}_k \end{Bmatrix} + \Delta \mathbf{T}_k \cdot (\mathbf{u} + \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ -\mathbf{r} \end{Bmatrix})_{(n)} \right] - \Delta \mathbf{T}_k^T \cdot \mathbf{f}_{(n)}^* \right\} \equiv \mathbf{g}(\Delta \mathbf{u}_k) \dots \dots \dots (2)$$

これを解式過程1とする。ただし、添字kは第k近似により評価した値であることを示す。この反復過程にSteffensenの反復法(方程式 $x = g(x)$ の解を求める際に、 $x_1 = x_0 - [g(x_0) - x_0]^2 / [g(g(x_0)) - 2g(x_0) + x_0] \dots$ ③の反復による方法)を導入した解式過程を解式過程2とする。ただし、第2近似解を初期値とする。すなわち、式(2)において、 $\Delta \mathbf{u}$ の各成分をxとし、初期値 $x_0 = \Delta \mathbf{u}_2$ から始まる連続した3回の近似値($\Delta \mathbf{u}_2$, $\Delta \mathbf{u}_3$, $\Delta \mathbf{u}_4$)に基づいて新たな近似値 $x_1 (= \Delta \mathbf{u}_5)$ を式(3)により求め、その値を改めて出発値 x_0 として再び式(2)の反復を行う……過程である。

本報告では、式(3)が明確な物理的意味を持たないことから、式(3)により求まる修正解(最初は $\Delta \mathbf{u}_5$)を一旦式(2)に代入して得られる近似値 $\Delta \mathbf{u}_6$ を新たな初期値としてSteffensenの反復を行う、修正Steffensenの反復法を提案する。すなわち、式(3)に替えて式(4)を用いた過程〔解式過程3〕を提案する。

$$x_1 = g(x_0) - [g(g(x_0)) - g(x_0)]^2 / [g(g(g(x_0))) - 2g(g(x_0)) + g(x_0)] \dots \dots \dots (4)$$

計算例 1. 自由端に面外鉛直荷重を受ける曲がり梁(図1)の解析 3次元空間での有限な回転を生ずる問題を取り扱った例は少ない。ここではBatheら²⁾の結果との比較を示し、本報告で提案する解式過程の特徴を示す。無次元化した荷重~変位曲線を図2に示す。本計算値〔解式過程3〕は、8要素10ステップの計算結果であり、Batheらの結果は8要素60ステップの結果である。図中一点鎖線は解式過程1による収束限界を示す。なお、解式過程3によれば、10ステップ分を一気に1増分としても同一の収束解が得られている。図3は図2に対応する幾つかの変形状態を示したものである。次に確式過程3による第7ステップの後の1増分を各解式過程で計算した反復過程における収束・発散の状況を、自由端の座標(第8つり合い状態からの偏位)により示したものが図4(a)~(c)であり、反復回数に対する不つり合い力の変化として示したものが図5である。これらより解式過程1ではつり合い点を中心としてほぼ直線状を振動的に発散してゆくのにに対し、解式過程2および3ではSteffensenの反復により振動過程を乱し、正解に収束してゆく様子がみら

れる。図6は同一収束規準下での解式過程2および3の累積反復回数(増分を図2の場合より小さくしており、第50ステップから65ステップまでの累積で、式(3)または(4)の過程も回数に含んでいる)を比較して示したものである。提案する解式過程3の反復回数は解式過程2のそれの約50%となっている。

2. 載荷順序を替えた正方形断面片持梁の曲げ解析 3次元空間における異なる2軸回りの曲げを受ける問題で理論解の明らかな例として、標記の問題をとり上げる。①初めにX方向に力Pを作用させ(結果はA)、ついでY方向に力Pを作用させた場合、②初めにY方向に力Pを作用させ(結果はB)、ついでX方向に力Pを作用させた場合、③XおよびY方向に同時に力Pを作用させた場合の各々の解析結果より変形図を図7に示す。最終的な変形形状は3者完全に一致している(C)。

おわりに 以上より、修正Steffensenの反復法の考えを導入した本解式過程の有効性ならびに、一連の回転を一つの軸回りの回転として評価する文献1)の支配方程式の3次元空間での有限な回転を生ずる問題に対する妥当性が明らかとなった。

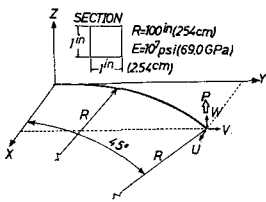


図1 解析対象1 曲がり梁の面外曲げ

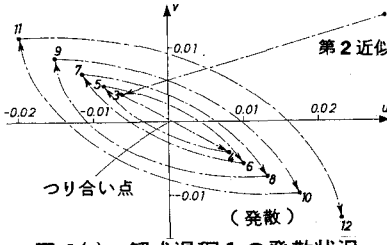


図4(a) 解式過程1の発散状況(自由端の座標)

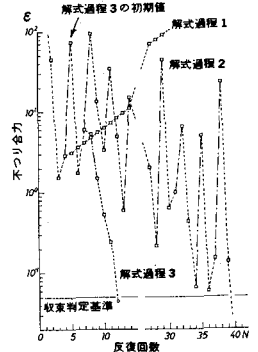


図5 不釣り合力の変化からみた収束、発散の状況

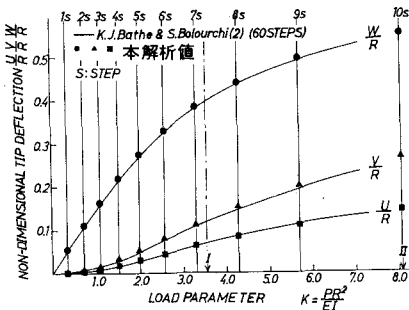


図2 自由端の荷重～変位曲線

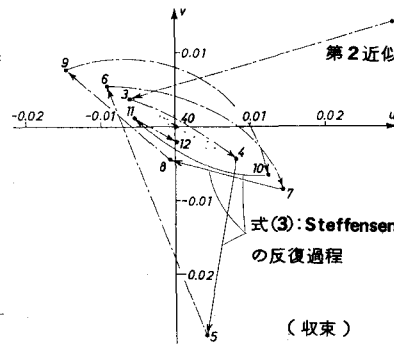


図4(b) 解式過程2の収束状況

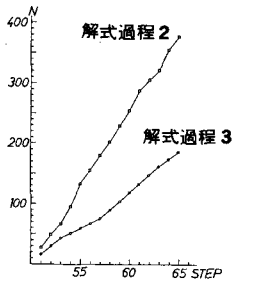


図6 累積反復回数の比較

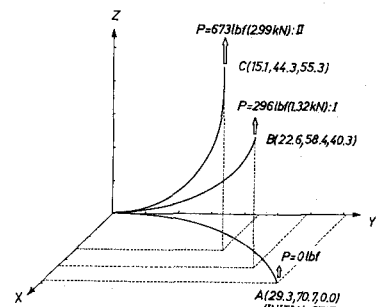


図3 変形形状の推移

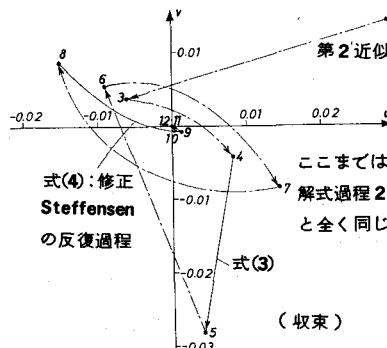


図4(c) 提案する解式過程(解式過程3)の収束状況

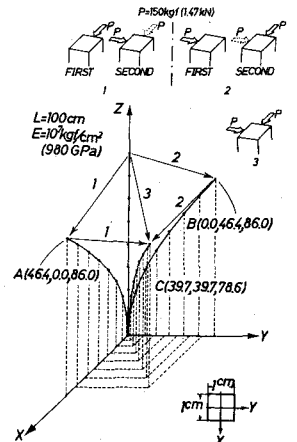


図7 解析対象2 載荷順序を替えた片持梁の曲げ変形図

参考文献 1) 吉田・増田・森本・広沢: 立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法, 土論集, 1980. 8
2) Bathe・Bolourchi: Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, I. J. N. M. E. Vol 14, 1979.