

武蔵工業大学 正員 増田陣紀
片山鉄工所 西本哲也
武蔵工業大学 正員 皆川 勝

本報告は、棒の縦振動問題、Bernoulli-Euler梁およびTimoshenko梁の振動問題を有限要素離散化技法を用いて数値解析する際に生ずる、固有振動数誤差の振動次数方向の全分布特性について述べたものである。ここでは、各々の問題に対して、同一の要素形状関数および質量行列形式を用いたモデルにおいては一定の分割様式の下で、固有振動数の誤差分布が分割数によらず $n/N \equiv$ 着目する振動次数 / 全要素数 によって一義的に定まることを、数値実験的に明らかにしている。

解析対象 各々の問題に対して、ここでは図1に示すような解析対象をとりあげる。

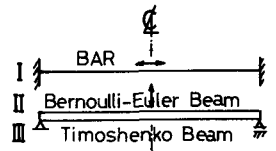


図1. 対象とする問題

Iは両端固定の棒、IIおよびIIIは単端梁である。以下の議論においては、全て対称モードのみを考慮するものとし、片側半分のみについて数値解析モデルを構成する。

検討する離散化モデル 検討する要素形状関数と質量行列形式との組合せを、表1

表1. 棒の縦振動解析モデル

形状関数	質量行列 整合(C) 集中(L)	
Lagrange 1次式(L1)	○	○
2次式(L2)	○	○
3次式(L3)	○	—
Hermite 3次式 (H)	○	○

1~3に示す(く)内は略号である)。縦振動に関しては最も一般的なL1CおよびL1L要素の他に、内部節点を有するLagrange高次要素および、節点変位に変位の微係数を含むHermite要素を考える。Bernoulli-Euler梁に対する要素は通常の梁要素である。

Timoshenko梁に対しては種々の要素が提案されているが、ここでは、曲げ変形のみによるたわみ角をLagrange2次式で補間し、全変位に関してはBernoulli-Euler梁と同様Hermite3次式で補間する1要素計7自由度の要素²⁾を対象に検討する。

表2. Bernoulli-Euler梁解析モデル

形状関数	質量行列 整合(C) 集中(L)	
Hermite 3次式(H)	○	○*

*たわみ角の自由度を統合。

各モデルの固有振動数誤差の分布 計算結果と表4および図2~6に示す。これは理論値に対する相対値 $(f_{CAL.}/f_{THEORY})$ で整理してある。計算は全て等分割として行った。Walz¹⁾はTaylor展開を用いた差分法に対する誤差評価手法を適用し、

表3. Timoshenko梁解析モデル

形状関数	質量行列
Hermite3次式 + Lagrange2次式	整合○

*TIM7要素²⁾

棒・梁・板等の有限要素の静的および動的の問題に対する誤差の大きさおよび収束性について論じ、近似的な誤差評価式を提示している。棒の縦振動問題に対するL1CおよびL1L要素に対してWalzらの手法を適用し、Walzらの省略した誤差項の σ^2 項以下も考慮すると、誤差評価式が次の式(1)および(2)のように得られる。

$$|f_{n,CAL.}/f_{n,THEORY}| = \frac{h}{n\pi h} \cdot \frac{b(1 - \cos n\pi h/l)}{(\cos n\pi h/l + 2)} \quad \text{for I-L1C要素モデル (1)}$$

$$|f_{n,CAL.}/f_{n,THEORY}| = \frac{h}{n\pi h} \cdot \frac{\sqrt{2(-\cos n\pi h/l + 1)}}{2} \quad \text{for I-L1L要素モデル (2)}$$

これらの式は、 $n/N (=n\pi h/l; h: \text{要素長})$ の関数であり、この場合計算結果と完全に一致する(表4参照)。この結果と下に、図2~5においては横軸を n/N にとっているが、誤差分布はいづれも分割数によらず一つの曲線で表わされることがわかる。なお、図6の横軸は最高次数で規準化した相対振動次数である。オ1、オ2スバツトルの誤差分布は各々、棒の縦振動に対するHC要素およびLC要素の誤差分布に酷似し、Timoshenko梁の場合にも一完全には一つの曲線とはならないが一ほぼ同一の曲線となることわかる。さらに、図2~5からわかるように、内部節点を有するI-L2とI-L3要素では系全体の外部節点数と内部節点数との比に対応する位置で、また次元の異なる自由度を有するI-HC、II-HCおよびIII-TIM7要素では同様に系全体におけるこれらの次元の異なる自由度の比に対応する位置で、誤差分布に不連続が生じ、これらの不連続点より高次側で固有振動数の誤差は急激に増大する。

1) Walz et al.: Accuracy of Finite Element Approximation to Structural Problems, NASA TN D-3728, 1970.

2) Nickel & Secor: Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, Int. J. N.M.E., Vol.5, 1972.

表4. 総振動問題 Lagrange 1 次要素 10 自由度モデルでの固有振動数計算結果と誤差評価式との比較 [f_{CAL} / f_{THEORY}]

(a) 整合質量モデル

MODE NO.	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
CALCU.	1.001	1.009	1.026	1.051	1.084	1.123	1.163	1.195	1.198	1.150
EQ.(1)	1.001	1.009	1.026	1.051	1.084	1.123	1.163	1.195	1.198	1.150

(b) 集中質量モデル

MODE NO.	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
CALCU.	1.000	0.992	0.975	0.950	0.919	0.880	0.835	0.784	0.728	0.668
EQ.(2)	0.999	0.991	0.974	0.950	0.919	0.880	0.835	0.784	0.728	0.668
Walz et al. ¹⁾	0.999	0.991	0.974	0.948	0.913	0.867	0.808	0.733	0.637	0.508

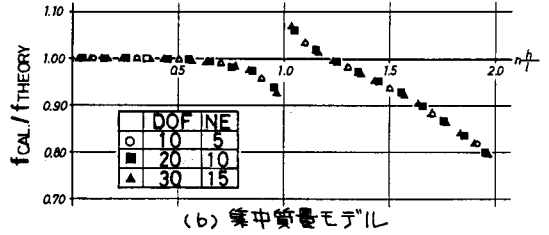
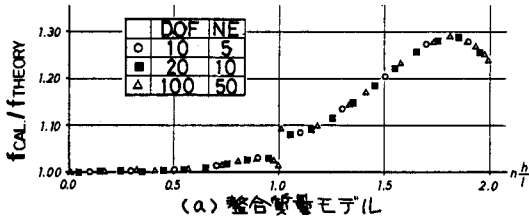


図2. 総振動問題 Lagrange 2 次モデルの固有振動数誤差分布

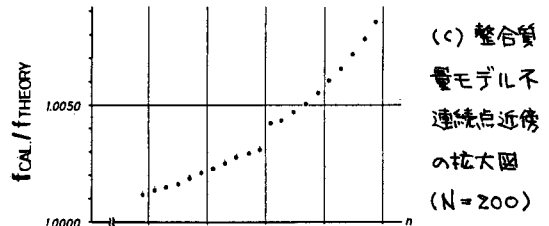
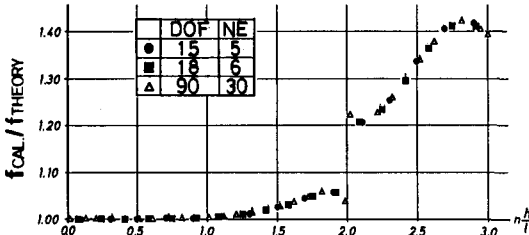


図3. 総振動問題 Lagrange 3 次モデルの固有振動数誤差分布

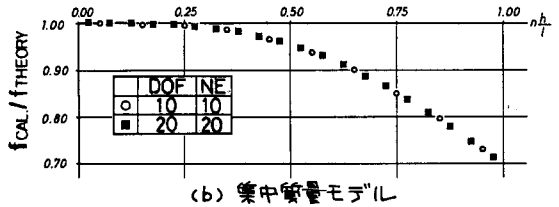
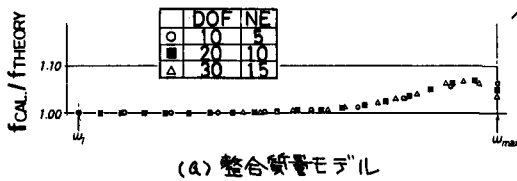


図4. 総振動問題 Hermite 3 次モデルの固有振動数誤差分布

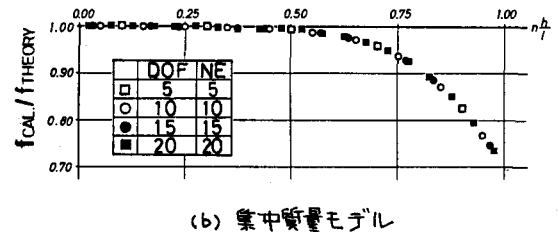
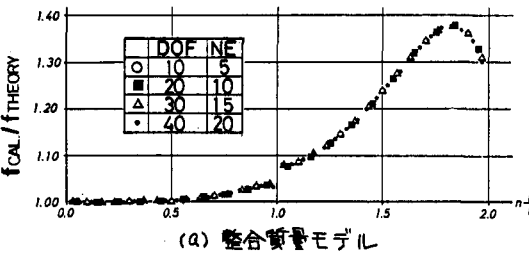


図5. Bernoulli-Euler 梁解析 Hermite 3 次モデルの固有振動数誤差分布

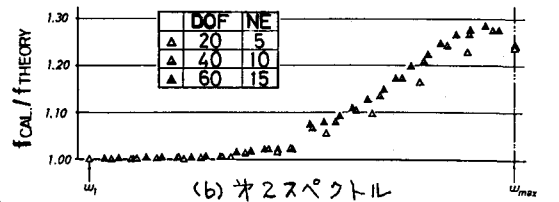
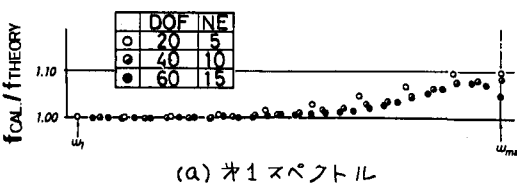


図6. Timoshenko 梁解析 TIM7 要素²⁾モデルの固有振動数誤差分布