土木学会第42回年次学術講演会（昭和62年9月）

PS I－2　有限要素法による幾何学的非線形動的応答解析の定式化

東京工業大学　正員　吉田　裕
武蔵工業大学　正員○増田陳紀

1．はじめに　有限要素法による動的非線形解析に関しては既に多くの研究がなされており[1]、幾何学的非線形性のみならず材料非線形性までも考慮した研究も行われている[2]。しかし、鍵となる関数にどのような関数を利用しているかが明示されていなかったり、不つり合い力の評価方法が不明確であったり、根拠が明白でない計算上の技巧が用いられていたりで、少なくとも公表されている文献のみでは解析の理論から実際の計算への流れが必ずしも容易には理解し得ない場合も多い。

本報告では、著者らが提案した静的な非線形解析手法[3]に基づく幾何学的非線形動的応答解析の支配方程式を導き、さらにその計算方法について述べる。基礎となる非線形解析手法は、従来変位に基づいて定式化されていた有限要素法に、連続体力学で一般的に用いられている位置ベクトルに基づく定式化を導入したものと考えることができる。実際には、着目する時点での要素座標系での節点変位と全体座標系でのそれとの間の座標変換関係を剛体変位を考慮して構成し、これを利用することにより位置ベクトルの微分を不要としているため、その意味で簡略な定式化が行われている。

2．運動方程式　時刻 t における一つの要素の運動方程式は全体座標系での質量行列を $M(t)$、復元力ベクトルを $R(t)$、外力ベクトルを $F(t)$、変位ベクトルを $u(t)$ とすると次式のように書くことができる。ただし上つきの・は時間に関する微分を表す。

$$d\{M(t)\,u(t)\}/dt + R(t) = F(t) \tag{1}$$

式(1)の第1項は、時刻 t における要素座標系での質量行列を $M*(t)$、全体座標系から要素座標系への座標変換行列を $T(t)$ として次のように書きかえることができる。ただし、' は転置行列を表す。

$$d\{M(t)u(t)\}/dt = M(t)\dot{u}(t) + \dot{M}(t)u(t) = \{T'(t)M*(t)T(t)\}\dot{u}(t) + d\{T'(t)M*(t)T(t)\}/dt\cdot u(t) \tag{2}$$

一方、式(1)の第2項は、簡単のために減衰項を無視すると、文献[3]の静的つり合い式における内力項がそのまま対応し式(3)のように表される。

$$R(t) = T'(t)K*(t)[\{T(t)G(u(t)+z(t))\}-\{T(0)Gz(0)\}] \tag{3}$$

ただし、$K*(t)$ は要素座標系でのその時点の割線剛性行列、定数行列 G は要素座標系の原点をその要素内の第1節点に設定するためのシフト行列、$z'(t)=\langle x'(0)\ \ -r'(t)\rangle$ は要素の初期座標ベクトル $x(0)$ および時刻 t における剛体回転ベクトル $r(t)$ からなるベクトルである。

式(2)および(3)を式(1)に代入することにより提案する運動方程式が得られる。

3．増分形の運動方程式　式(1)～(3)の非線形常微分方程式を直接解くことも考えられるが、実際にはいづれにしても数値積分を行なうので、本報告では文献[3]において確立されている増分形の解法を適用することを考える。そのため、ここでは増分形の運動方程式を導く。

時刻 t＋Δt および時刻 t における運動方程式を差し引き変形すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
&\{T'(n+1)M*(n+1)T(n+1)\}\Delta\ddot{u} + \{T'(n)M*(n)\Delta T+\Delta T'\cdot M*(n)T(n)+\Delta T'\cdot M*(n)\Delta T(n)\}\ddot{u}(n)\\
&+\{T'(n+1)\Delta M*\cdot T(n+1)\}\ddot{u}(n)\\
&+\{\dot{T}'(n+1)M*(n+1)T(n+1)+T'(n+1)\dot{M}*(n+1)T(n+1)+T'(n+1)M*(n+1)\dot{T}(n+1)\}\Delta\dot{u}\\
&+\{\dot{T}'(n+1)M*(n+1)\Delta T+\dot{T}'(n+1)\Delta M*\cdot T(n)+\Delta\dot{T}'\cdot M*\cdot T(n)+T'(n+1)\dot{M}*(n+1)\Delta T+T'(n+1)\Delta\dot{M}*\cdot T(n)\\
&\quad+\Delta T'\cdot\dot{M}*(n)T(n)+T'(n+1)M*(n+1)\Delta\dot{T}+T'(n+1)\Delta M*\cdot\dot{T}(n)+\Delta T'\cdot M*(n)\dot{T}(n)\}\dot{u}(n)\\
&+\{T'(n+1)K*(n+1)T(n+1)\}\Delta u\\
&+[T'(n+1)K*(n+1)\{T(n+1)\Delta z+\Delta T(u(n)+z(n))\}] + T'(n+1)\Delta K*\cdot u*(n) + \Delta T'\cdot F*(n)\\
&=\Delta F
\end{aligned} \tag{4}$$

式(4)が時刻 t から $t+\Delta t$ までの Δt 時間増分間における一つの要素の増分形運動方程式である。最初の2行は通常の慣性項、次の3行は要素が剛体回転することに伴う慣性項、残りの2行は復元力項である。

ひずみが微少であれば要素分割を十分細かくすることにより、個々の要素の要素座標系での剛性行列および質量行列を線形に仮定することが可能である。 さらに、式(2)の右辺第2項が第1項に比して無視できる程度に時間刻み幅を十分小さく取れば、 式(4)は結局次式のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\{\mathbf{T}'(n+1)\mathbf{M}*\cdot\mathbf{T}(n+1)\}\Delta\ddot{\mathbf{u}}\\
&+\{\mathbf{T}'(n)\mathbf{M}*\cdot\Delta\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}'\cdot\mathbf{M}*\cdot\mathbf{T}(n)+\Delta\mathbf{T}'\cdot\mathbf{M}*\cdot\mathbf{T}(n)\}\ddot{\mathbf{u}}(n)\\
&+\{\mathbf{T}'(n+1)\mathbf{K}*\cdot\mathbf{T}(n+1)\}\Delta\mathbf{u}\\
&+[\mathbf{T}'(n+1)\mathbf{K}*\cdot\{\mathbf{T}(n+1)\Delta\mathbf{z}+\Delta\mathbf{T}(\mathbf{u}(n)+\mathbf{z}(n))\}]\\
&+\Delta\mathbf{T}'\cdot\mathbf{F}*(n)\\
&=\mathbf{M}(n+1)\Delta\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{g}(n+1)\\
&+\mathbf{K}(n+1)\Delta\mathbf{u}+\mathbf{h}(n+1)\\
&=\Delta\mathbf{F} \qquad\qquad (5)
\end{aligned}
$$

ここに、$\mathbf{M}(n+1)=\{\mathbf{T}'(n+1)\mathbf{M}*\cdot\mathbf{T}(n+1)\}$

$\mathbf{K}(n+1)=\{\mathbf{T}'(n+1)\mathbf{K}*\cdot\mathbf{T}(n+1)\}$

$\mathbf{g}(n+1)=\{\mathbf{T}'(n)\mathbf{M}*\cdot\Delta\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}'\cdot\mathbf{M}*\cdot\mathbf{T}(n)+\Delta\mathbf{T}'\cdot\mathbf{M}*\cdot\mathbf{T}(n)\}\ddot{\mathbf{u}}(n)$

$\mathbf{h}(n+1)=[\mathbf{T}'(n+1)\mathbf{K}*\cdot\{\mathbf{T}(n+1)\Delta\mathbf{z}+\Delta\mathbf{T}(\mathbf{u}(n)+\mathbf{z}(n))\}]+\Delta\mathbf{T}'\cdot\mathbf{F}*(n)$ である。

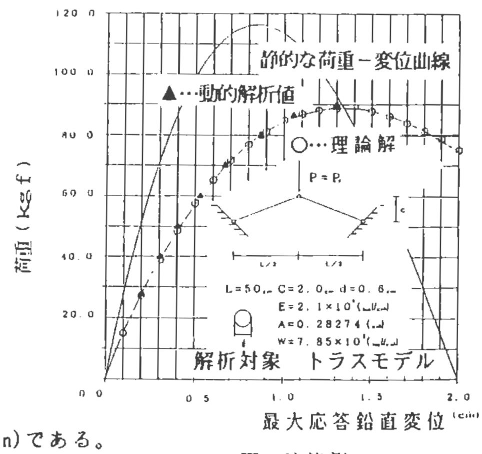

図 計算例

4．運動方程式の解法[4]　ここでは、式(5)を対象とした解法を述べる。文献[3]で提案されている2段階線形化近似とその後の反復修正計算からなる予測子－修正子型の計算方法に時間積分を組合せた解法を採用する。時間積分法としては最も簡単な時間積分法の一つである Newmarkの β 法（$\beta=1/4$）を用いる。すなわち、一つの時間刻み間の速度および変位を次のように仮定する。

$$\Delta\dot{\mathbf{u}}=\dot{\mathbf{u}}(n+1)-\dot{\mathbf{u}}(n)=\ddot{\mathbf{u}}(n)\Delta t+\Delta\ddot{\mathbf{u}}\Delta t/2$$

$$\Delta\mathbf{u}=\mathbf{u}(n+1)-\mathbf{u}(n)=\dot{\mathbf{u}}(n)\Delta t+\ddot{\mathbf{u}}(n)\Delta t^2/2+\Delta\ddot{\mathbf{u}}\beta\Delta t^2 \quad (6)$$

まず、式(5)を変位増分 $\Delta\mathbf{u}$ および加速度増分 $\Delta\ddot{\mathbf{u}}$ に関して線形化し、式(6)により変位増分を消去して加速度増分のみを未知数とする式を求める。得られた要素関係式を系全体に関して重ね合せて加速度増分の第1近似解を求め、 式(6)を用いて変位増分の第1近似解を計算する。 同様にして文献[3]の方法にしたがい第2近似解およびその後の反復修正解を求め、設定した収束条件を満たしたとき、次の増分段階に移行する。

5．計算例　浅いトラスの頂点に鉛直ステップ荷重が作用するときの 式(5)に基づく動的応答解析の結果を図に示す。縦軸はステップ荷重の大きさであり、横軸は頂点の最大応答鉛直変位である。このような簡単な問題の場合、最大応答時に系は停止し外力のポテンシャルの減少量がひずみエネルギの増分量に等しくなり、理論解が容易に得られる。その結果と本解析結果とは良く一致している。なお、実線は静的な荷重～変位関係である。

6．おわりに　本報告では、近年多くの研究者により採用されている座標表示による幾何学的非線形有限要素解析の魁と考えられる文献[3]の解析手法を、 動的応答解析に拡張した。計算例としては非常に単純な平面トラスのみを取り上げたが、ここに示した支配方程式は骨組のみならず板殻構造に対しても有効である。

参考文献 [1]例えばSimo,J.C.et al.:A Novel Approach to the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions, Electronics Research LaboratoryMemorandum No.UCB/ERL M85/31,UC Berceley,1985. [2]例えばBathe,K.J.et al.:Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis,Int J.Num.Meth.Eng.,Vol.9,353-386,1975. [3]吉田裕・増田陳紀・松田隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法、土木学会論文報告集、第288号、41-55、1979年8月。[4]増田陳紀・西脇威夫・皆川勝・山本英男：骨組構造の幾何学的非線形動的応答解析のための一方法、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、第10巻、431-436、昭和61年7月。