

日本鋼構造協会第17回大会研究集会  
マトリックス解析法研究発表論文集

—故鷺津久一郎先生記念号—



日本鋼構造協会

## 有限要素法による1次元動的応答解析における離散化誤差の一検討

A STUDY ON DISCRETIZATION ERROR IN ONE DIMENSIONAL DYNAMIC ANALYSIS  
USING FINITE ELEMENT METHOD

○増田陳紀<sup>1)</sup> 西本哲也<sup>2)</sup> 西脇威夫<sup>3)</sup> 皆川 勝<sup>4)</sup>

### 1 はじめに

有限要素法等による数値解析に伴う誤差に関しては、各解法の開発とほとんど同時に研究が始められ、多くの成果が発表されてきた。動的応答解析を対象とした場合もその例外ではないが、最近では空間の離散化誤差の問題よりも時間積分法の精度の問題の方にむしろ多くの研究が為されている。しかし、空間の離散化誤差に関する従来の研究のほとんどは、分割を無限に細かくした極限における厳密解への収束性の問題を論じたものである。<sup>1)-4)</sup> Barnhill<sup>5)</sup>らがポアソンの方程式の場合に対して誤差評価式中の係数の上限値を理論的に示しているものの、このように具体的な要素分割の下での誤差の大きさそのものについて論じた研究は少ない。

本報告は、棒の縦振動、Bernoulli-Euler理論ならびにTimoshenko理論による梁の振動などの1次元の動的応答解析を対象に、用いる有限要素の形状関数、質量行列の形式(整合質量行列と集中質量行列)および分割要素数などの空間のモデル化に関する因子が動的応答解析の精度に及ぼす影響を具体的な数値計算に基づいて明らかにした結果を報告するものである。すなわち、一定の形状関数と質量行列を用いた場合、等分割様式の下では要素数によらず離散化誤差の分布特性が一義的に決定されることを明らかにし、その分布特性を次数方向に無次元化した固有振動数相対誤差分布として、各問題・各要素モデルごとに具体的に示した。

### 2 対象とする問題ならびに要素モデル

I. 棒の縦振動問題(両端固定とする)に関しては、Lagrange型の形状関数を持つモデルとして外部節点のみの1次式[1]および内部節点を有する2次式[2]・3次式[3]モデルを、またHermite型[H]の形状関数を有するモデルとして3次式モデルを各々とり上げる。各モデルとも整合質量[C]ならびに集中質量[L]を考慮する。

II. Bernoulli-Euler梁の曲げ振動問題(両端単純支持とする)に関しては、最も一般的なHermite 3次式モデル[BE]のみを対象とする。質量行列は整合・集中の両者を考慮する。

III. Timoshenko梁の振動問題(両端単純支持とする)に関しては、Nickel & Secor<sup>6)</sup>により提案された、曲げ変形のみによるたわみ角(表1中のV)をLagrange 2次式で補間し、全たわみについてBernoulli-Euler梁と同様Hermite 3次式で補間する1要素計7自由度の要素[TIM7]を対象とする。

これらの対象とする問題の支配方程式・境界条件ならびに要素モデルの一覧を、質量行列・剛性行列と共に表1に示す。なお、Lagrangeモデルに対する集中質量行列は整合質量行列の行和を対角成分とするものとする。また、集中質量Hermiteモデルの場合には、全体剛性行列から

1) 武蔵工業大学助教授・工博 2) 片山鉄工所工修(前武蔵工業大学大学院修士課程学生・工学専攻) 3) 武蔵工業大学教授・工博 4) 日助年工修

表1 対象とする問題の支配方程式・境界条件および「整合質量モデル」の1要素関係式(要素長h)

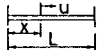
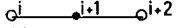

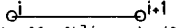
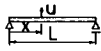
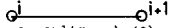
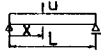
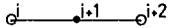
<p>棒の縦振動</p>  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; u(t,0)=u(t,L)=0$ <p>LAGRANGE 1次モデル [C1]</p> $\frac{\rho A h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_{i+1} \end{Bmatrix} + \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ <p>LAGRANGE 2次モデル [C2]</p>  $\frac{\rho A h}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_{i+1} \\ \ddot{u}_{i+2} \end{Bmatrix} + \frac{EA}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ <p>LAGRANGE 3次モデル [C3]</p>  $\frac{\rho A h}{1680} \begin{bmatrix} 128 & 99 & -36 & 19 \\ 648 & -81 & -36 & 1 \\ 648 & 99 & \ddots & \ddots \\ \text{SYM.} & 128 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_{i+1} \\ \ddot{u}_{i+2} \\ \ddot{u}_{i+3} \end{Bmatrix} + \frac{EA}{40h} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ 432 & -297 & 54 & \ddots \\ 432 & -189 & \ddots & \ddots \\ \text{SYM.} & 148 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \\ u_{i+2} \\ u_{i+3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ <p>HERMITE 3次モデル [CH]</p>  $\frac{\rho A h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 4h^2 & 13h & -3h^2 & 0 \\ 156 & -22h & 54 & -13h \\ \text{SYM.} & 4h^2 & -3h^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_i' \\ \ddot{u}_{i+1} \\ \ddot{u}_{i+1}' \end{Bmatrix} + \frac{EA}{30h} \begin{bmatrix} 36 & 3h & -36 & 3h \\ 4h^2 & -3h & -h^2 & 0 \\ -36 & 3h & 36 & -3h \\ \text{SYM.} & 4h^2 & -3h & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_i' \\ u_{i+1} \\ u_{i+1}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	<p>E: 縦弾性係数              ρ: 単位体積質量              I: 断面二次モーメント              A: 断面積              k: 巻断定数  <math>= \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}</math>              ν: ポアソン比              G: 剪断弾性係数  <math>c_0 = \sqrt{E/\rho}</math>  <math>r = \sqrt{I/A}</math>  <math>\alpha = 20 \frac{E}{KG} r^2</math>  <math>\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}</math>  <math>u' = \frac{\partial u}{\partial x}</math>  <math>\theta = \frac{\partial u}{\partial x}</math></p>
<p>BERNOULLI-EULER 梁の曲げ振動</p>  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_0^2 r^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0; u(t,0)=u(t,L)=0$ <p>HERMITE 3次モデル [CBE]</p>  $\frac{\rho A h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 4h^2 & 13h & -3h^2 & 0 \\ 156 & -22h & 54 & -13h \\ \text{SYM.} & 4h^2 & -3h^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_i' \\ \ddot{u}_{i+1} \\ \ddot{u}_{i+1}' \end{Bmatrix} + \frac{2EI}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & 3h & -6 & 3h \\ 2h^2 & -3h & h^2 & 0 \\ 6 & -3h & h^2 & 0 \\ \text{SYM.} & 2h^2 & -3h & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_i' \\ u_{i+1} \\ u_{i+1}' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	
<p>TIMOSHENKO 梁振動</p>  $r^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^2} - r^2 \left( 1 + \frac{E}{KG} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c_0^2 r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0; u(t,0)=u(t,L)=0$ <p>TIM7要素モデル [TIM7]</p>  $\frac{\rho A h}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 0 & 0 & 54 & -13h & 0 \\ 4h^2 & 13h & -3h^2 & 0 & 0 & -14r^2 & 0 \\ 0 & 56r^2 & 28r^2 & 0 & 0 & 0 & 28r^2 \\ \text{SYM.} & 224r^2 & 0 & 0 & 156 & -22h & 0 \\ & & & & & & 4h^2 \\ & & & & & & 56r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_i' \\ \ddot{v}_i \\ \ddot{u}_{i+1} \\ \ddot{u}_{i+1}' \\ \ddot{v}_{i+1} \end{Bmatrix} + \frac{KGA}{60R} \begin{bmatrix} 72 & 6h & -6h & -48h & -72 & 6h & -6h \\ 8h^2 & 7h^2 & -4h^2 & -6h & -2h^2 & -3h^2 & 0 \\ 8h^2 + 7\alpha & 4h^2 - 8\alpha & 6h & -3h^2 & -2h^2 + \alpha & 0 & 0 \\ \text{SYM.} & 32h^2 + 16\alpha & 48h & -4h^2 & 4h^2 - 8\alpha & 6h & -6h \\ & & & & & 72 & -6h \\ & & & & & & 8h^2 \\ & & & & & & 8h^2 + 7\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \theta_i \\ v_i \\ u_{i+1} \\ \theta_{i+1} \\ v_{i+1} \\ u_{i+2} \\ \theta_{i+2} \\ v_{i+2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	

表2 差分式の誤差評価手法に基づく各モデルの誤差評価式( $f_{nTH}$ : n次の固有振動数理論値,  $Nh=L$ )

<p>棒の縦振動</p> $f_{nTH} = \frac{n c_0 \pi}{L}$ <p>C1: <math>\frac{f_{nM}}{f_{nTH}} = \frac{L}{n\pi h} \sqrt{6(1 - \cos \frac{n\pi h}{L}) / (2 + \cos \frac{n\pi h}{L})}</math> (1)      L1: <math>\frac{f_{nM}}{f_{nTH}} = \frac{L}{n\pi h} \sqrt{2(1 - \cos \frac{n\pi h}{L})}</math> (2)</p> <p>C2: <math>\frac{f_{nM}}{f_{nTH}} = \frac{L}{n\pi h} \sqrt{5(-2 \cos \frac{n\pi h}{L} + 16 \cos \frac{n\pi h}{2L} - 14) / (\cos \frac{n\pi h}{L} - 2 \cos \frac{n\pi h}{2L} - 4)}</math> : 外部節点自由度に関して (3)</p> <p><math>\frac{f_{nM}}{f_{nTH}} = \frac{L}{n\pi h} \sqrt{-40(\cos \frac{n\pi h}{2L} - 1) / (4 + \cos \frac{n\pi h}{2L})}</math> : 内部 " (4)</p> <p>C3: <math>\frac{f_{nM}}{f_{nTH}} = \frac{L}{n\pi h} \sqrt{7(78 \cos \frac{n\pi h}{L} - 324 \cos \frac{2n\pi h}{3L} + 1134 \cos \frac{n\pi h}{3L} - 888) / (-19 \cos \frac{n\pi h}{L} + 36 \cos \frac{2n\pi h}{3L} - 99 \cos \frac{n\pi h}{3L} - 128)}</math> (5)</p> <p><math>\frac{f_{nM}}{f_{nTH}} = \frac{L}{n\pi h} \sqrt{90(\cos \frac{n\pi h}{2L} - \cos \frac{n\pi h}{6L}) / (-\cos \frac{n\pi h}{2L} - 9 \cos \frac{n\pi h}{6L})}</math> : 外部節点自由度に関して (6)              : 内部 "</p> <p>CH: <math>\frac{f_{nM}}{f_{nTH}} = \frac{L}{n\pi h} \sqrt{42(12 \cos \frac{n\pi h}{L} + \frac{n\pi h}{L} \sin \frac{n\pi h}{L} - 12) / (-54 \cos \frac{n\pi h}{L} - 13 \frac{n\pi h}{L} \sin \frac{n\pi h}{L} - 156)}</math> : uの自由度に関して (7)</p> <p><math>\frac{f_{nM}}{f_{nTH}} = \frac{L}{n\pi h} \sqrt{-7(6 \sin \frac{n\pi h}{L} + 2 \frac{n\pi h}{L} \cos \frac{n\pi h}{L} - 8 \frac{n\pi h}{L}) / (13 \sin \frac{n\pi h}{L} - 3 \frac{n\pi h}{L} \cos \frac{n\pi h}{L} + 4 \frac{n\pi h}{L})}</math> : u' " (8)</p>	
<p>BERNOULLI-EULER 梁の曲げ振動</p> $f_{nTH} = c_0 r \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2$ <p>CBE: <math>\frac{f_{nM}}{f_{nTH}} = \left( \frac{L}{n\pi h} \right)^2 \sqrt{-2520(2 \cos \frac{n\pi h}{L} + \frac{n\pi h}{L} \sin \frac{n\pi h}{L} - 2) / (54 \cos \frac{n\pi h}{L} + 13 \frac{n\pi h}{L} \sin \frac{n\pi h}{L} + 156)}</math> : uの自由度に関して (9)</p> <p><math>\frac{f_{nM}}{f_{nTH}} = \left( \frac{L}{n\pi h} \right)^2 \sqrt{840(-3 \sin \frac{n\pi h}{L} + \frac{n\pi h}{L} \cos \frac{n\pi h}{L} + 2 \frac{n\pi h}{L}) / (13 \sin \frac{n\pi h}{L} - 3 \frac{n\pi h}{L} \cos \frac{n\pi h}{L} + 4 \frac{n\pi h}{L})}</math> : θ " (10)</p>	

\*式(1),(2)は Tong & Pian (2) 式と一致する。

変位の1階微係数の自由度を縮合し、その上で Lagrange モデルと同様の集中質量行列を考えるものとする。

### 3 計算された固有振動数の振動次数方向の誤差分布

ここでは対称振動のみを対象とすることとし、計算は片側半分のみについて行う。各要素モデルごとに分割数を変えて計算した結果より、計算された固有振動数  $f_{NM}$  の理論解  $f_{NTH}$  に対する比  $f_{NM}/f_{NTH}$  を示したものが図1である。横軸は全区間(片側半分ではなく)に対する要素数  $N=L/h(=2NE)$  を無次元化した着目振動次数  $n$  である。なお、要素分割は全て等分割とする。

Timoshenko 梁の場合に若干ずれが存在するものの、各モデルとも固有振動数相対誤差分布は要素数によらず  $n/N$  によろ義的に決定されることが明らかである。図より得られる結論を列挙すると以下のようになる。

- 1) 内部節点を有する Lagrange 型高次要素および異なる次元の自由度を有する Hermite 型要素に対しては、誤差分布曲線に不連続点が存在し、その点を境にして相対誤差が増大する。(図(e)中には不連続点が2つ、図(g)中には不連続点が1つ存在する。また、Hermite 型の集中質量モデルに対してはここでは変位の1階微係数の自由度を縮合しているため不連続点は存在しない)。不連続点を境とした振動次数の数の比は、内部節点自由度数と外部節点自由度数との数の比などの、性質の異なる自由度数の比に一致している。
- 2) 棒の縦振動問題に対する Lagrange 3次式整合質量モデルと Hermite 3次式整合質量モデルとの結果を比較すると、後者の変域である  $0 < n/N < 2$  の領域においては、両者の固有振動数相対誤差分布はほぼ同一である。
- 3) 棒の縦振動問題に対する Lagrange 型モデルの場合、固有振動数相対誤差の最大値は、整合質量モデルでは低次要素ほど、集中質量モデルでは高次要素ほど、小さい。しかし、整合質量モデルでも、最初の不連続点まですなわち  $n/N < 1$  では、高次要素ほど小さい。
- 4) Timoshenko 梁の振動問題に対する TIM7 要素を用いた計算結果より曲げ振動が支配的な振動モードをオイスパクトル、せん断振動が支配的な振動をオイスパクトルとするとき、各々の固有振動数相対誤差分布形状は、むしろ棒の縦振動問題に対する Hermite 3次式整合質量モデルおよび Lagrange 2次式整合質量モデルによるそれらと非常に似た形状である。オイスパクトルといえども Bernoulli-Euler 梁に対する Hermite 3次式整合質量モデルの固有振動数相対誤差分布形状とはかなり異っている。
- 5) 各モデルとも  $n/N$  の変域の  $1/2$  の領域までの振動次数に対する固有振動数相対誤差はたかだか 10% であり、高次要素では 5% あるいはそれ以下である。

### 4 固有振動数誤差の理論的評価

#### 1) 差分式の誤差評価手法による評価

着目する点に関する平衡方程式を一つの差分式と看直し、隣接する要素内の自由度を中心の自由度の回りに Taylor 展開して原支配微分方程式との比較より誤差を評価する Walz<sup>1)</sup> の手法に基づき、高次項まで考慮して各モデルの固有振動数相対誤差を評価すると表2のようになる。

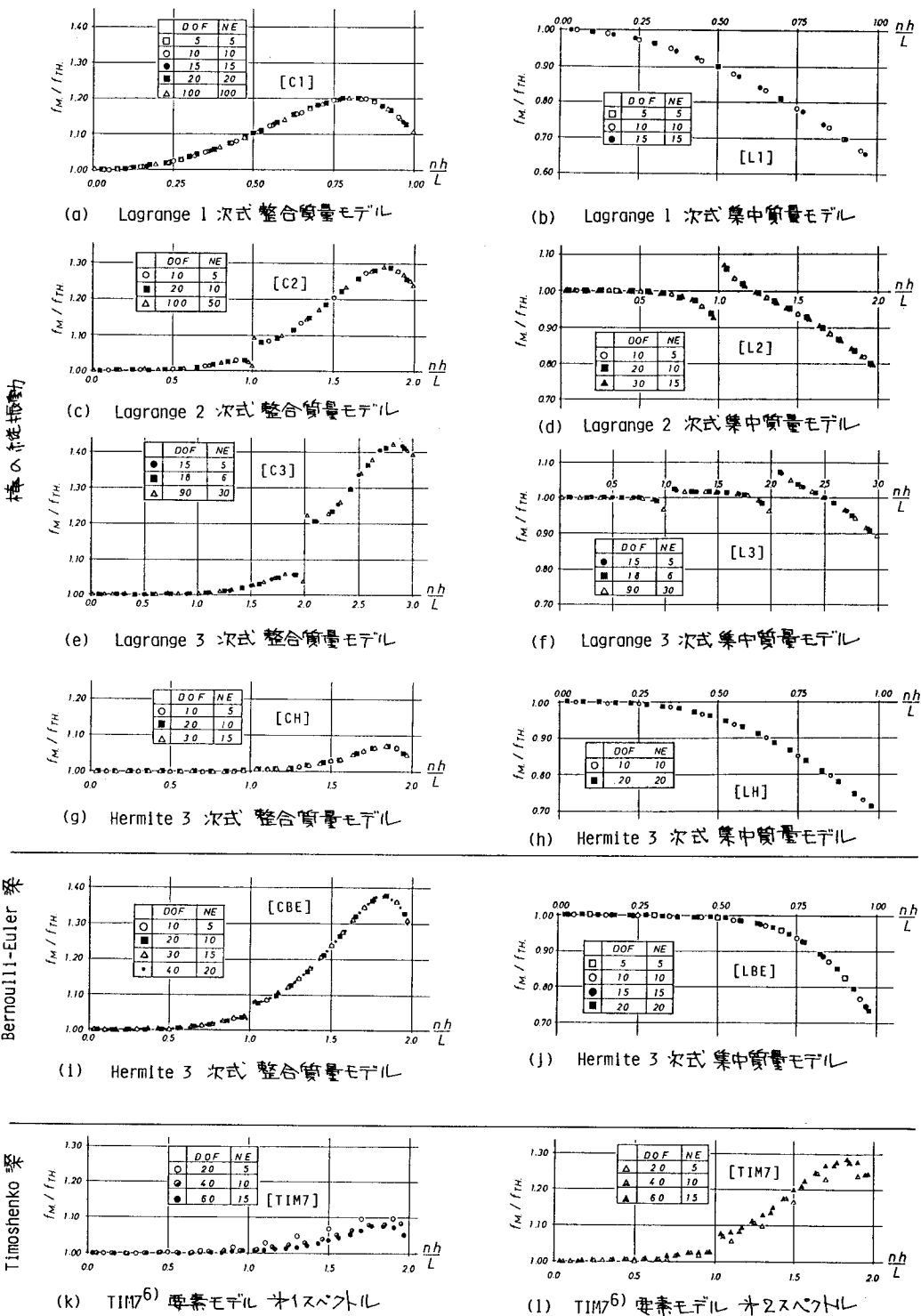


図7 各モデルの固有振動数相対誤差分布

これらの評価式と実際の数値計算結果との比較を表3および図2に示す。

縦振動問題の Lagrange 1次要素モデルによる計算結果は、この評価式による結果と完全に一致する(表3)。他のモデルの場合には、差分式の立場からは全領域に対して完全に同一の分割様式とはならないため、誤差評価式が一義的に定まらず、複数の評価式が得られる。しかし、これら複数の評価式を平均した結果は、ほぼ  $n/N$  の変域の低次より75%位の領域まで計算結果と比較的良好な一致を見せている。なお、複数の差分式を連立し、例えば[C2]モデルの場合に内部自由度 ( $u_{j\pm 1}$  または  $u_{j\pm 1}$ ) を消去して1つの差分式とし、これに関する評価式を求めなくても必ずしも計算結果と一致する結果は得られない。

2) 高次要素モデルにおいても固有振動数相対誤差分布が一義的に定まることの一つの確認

高次要素の場合には、上記のように Walz らの手法によっても誤差分布を完全には評価することはできない。ここでは、縦振動問題 Lagrange 2次式整合質量モデルの場合を対象に、3要素(片側半分について)の場合の固有振動数相対誤差のうちの2つが、1要素の場合の2つの固有振動数相対誤差と同じ値をとることを漸化式を用いて示す。

1要素の場合の固有振動数  $f^{<1>}$  は境界条件を考慮して次式により得られる。

$$\left| \begin{bmatrix} 16 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda^{<1>} \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} \right| = 0 ; \lambda^{<1>} = \frac{(2\pi)^2 \cdot 10c_0^2}{\{f^{<1>}\}^2 \cdot (L/2)^2} ; \begin{matrix} c_0: \text{波速} \\ L: \text{全長} \end{matrix}$$

ここで左辺の  $\lambda^{<1>}$  を  $\lambda$  に置き換えた式を  $I_1$  とおく。すなわち

$$I_1 = \begin{vmatrix} 16-16\lambda & 2+8\lambda \\ 2+8\lambda & 4-7\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & b \\ b & a \end{vmatrix} \quad (\text{とおく})$$

$n$ 要素の場合の対応する行列式を  $I_n$  とおくと

$$I_n = I_{n-1} \cdot I_1 + J_{n-1} \cdot K, \quad J_n = I_{n-1} \cdot d + J_{n-1} \cdot I_1$$

ただし、

$$K = \begin{vmatrix} 4-7\lambda & 2+8\lambda & -1-\lambda \\ 2+8\lambda & 16-16\lambda & 2+8\lambda \\ -1-\lambda & 2+8\lambda & 4-7\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{vmatrix} \quad (\text{とおく})$$

また、 $J_n$  は  $I_n$  に対応する行列の最後の1行1列を除いた行列の行列式である。これらより  $J_n$  を消去して、結局

$$I_n - 2I_1 \cdot I_{n-1} + (2I_1^2 - I_2) I_{n-2} = 0, \quad n \geq 3$$

を得る。ここで  $I_3$  を計算すると

$$I_3 = 2I_1 \cdot I_2 - (2I_1^2 - I_2) I_1 = I_1 \cdot (3I_2 - 2I_1^2)$$

よって、 $I_3 = 0$  とする  $\lambda$  を

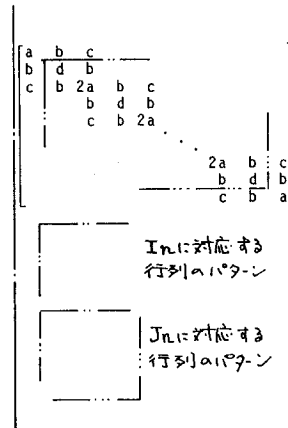
$$\lambda = \lambda^{<3>} = (2\pi / f^{<3>})^2 \cdot 10c_0^2 / (L/6)^2 = (2\pi)^2 / (f^{<3>}/6)^2 \cdot 10c_0^2 / L^2$$

とするとき、それらのうちの2つは  $I_1 = 0$  を満たす根である。一方、 $I_1 = 0$  を満たす  $\lambda$  は、

$$\lambda = \lambda^{<1>} = (2\pi / f^{<1>})^2 \cdot 10c_0^2 / (L/2)^2 = (2\pi)^2 / (f^{<1>}/2)^2 \cdot 10c_0^2 / L^2$$

によつて与えられるから

$$f^{<3>} = 3f^{<1>}$$



が得られる。棒の縦振動の場合、固有振動数は次数に比例するから、結局、3要素(全体で6要素)の固有振動数のうち次数  $n=1/2 \times 6=3$  および  $n=3/2 \times 6=9$  に対する相対誤差が各々1要素(全体で2要素)の1次および3次の固有振動数相対誤差と一致することが示された。

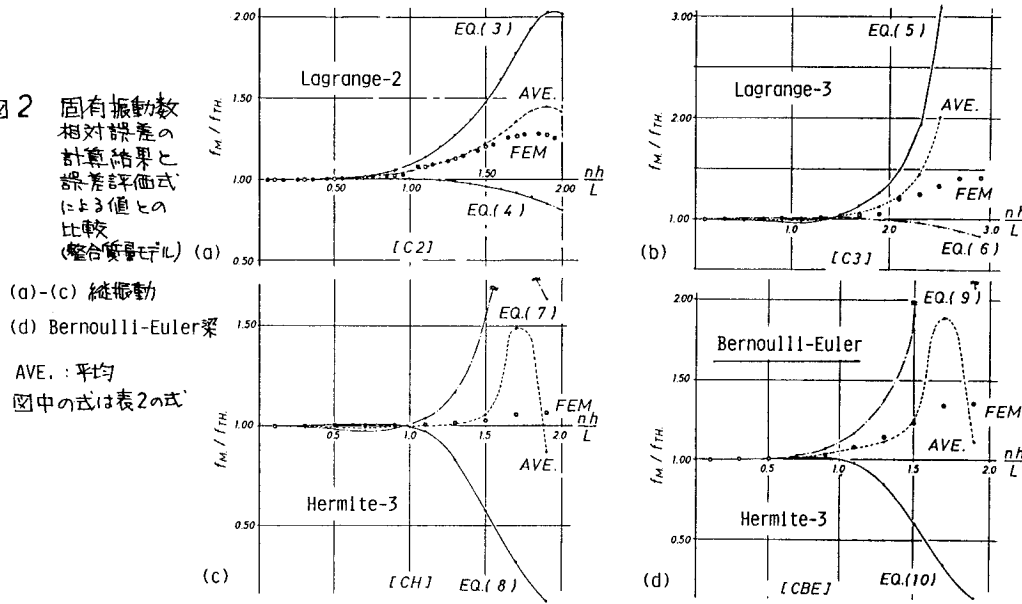
### 5 おわりに

通常の構造振動解析においては高次の振動数成分を無視できる場合が多いが、例えば衝撃力に対する過渡応答解析や局所的な波の伝播解析などの場合には、相対的に高次の振動数成分までも考慮する必要がある。動的応答計算の精度は外力項の離散化誤差を別問題とすると、結局対象とする問題の振動数成分構成との対応での解析モデルの固有振動数の精度に依存することは明らかである。そのような観点から、固有振動数の精度と要素分割数との関係を検討した。図7に示した7次元等分割という限定された条件での固有振動数相対誤差分布に関する知見は、理論解の未知な実際問題に対して必ずしも直接役立つものではない。しかし、数値計算による見かけ上の波の乱れを防ぐためなどの必要な範囲内で、どの程度の要素分割が要求されるかという問題に対する解答の一つの目安を与えることができればと考えている。

表3 縦振動問題のLagrange 1次式整合質量モデルでの固有振動数相対誤差の計算結果と誤差評価式による値との比較

$n$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	(C1: N=10)
MODEL	1.001	1.009	1.026	1.051	1.084	1.123	1.163	1.195	1.193	1.150	
EQ.(1)	1.001	1.009	1.026	1.051	1.084	1.123	1.163	1.195	1.193	1.150	

図2 固有振動数相対誤差の計算結果と誤差評価式による値との比較 (整合質量モデル)



### 参考文献

- Walz, J.E., R.E. Fulton, N.J. Cyrus, and R.J. Eppink: Accuracy of Finite Element Approximation to Structural Problems, NASA TN D-5728, 1970.
- Tong, P., T.H.H. Pian and L.L. Bucciarelli: Mode shapes and frequencies by finite element method using consistent and lumped masses, Computers & Structures, Vol. 1, pp. 623-638, 1971.
- 山本義之・徳田道明: 有限要素による剛性の収束性について, 日本造船学会論文集, 129号, pp. 119-126, 1971.
- 中沢賢: 有限要素法による形状関数とその解の収束条件について, 日本機械学会論文集, 42巻号363号, pp. 3386-3397, 1976.
- Barnhill, R.R., J.H. Brown, N. McQueen, and A.R. Mitchell: Computable finite element error bounds for Poisson's Equation, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 11, pp. 593-603, 1977.
- Nickel, R.E. and G.A. Secor: Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements, Int. J. Num. Eng., Vol. 5, pp. 243-253, 1972.

A STUDY ON DISCRETIZATION ERROR IN ONE DIMENSIONAL  
DYNAMIC ANALYSIS USING THE FINITE ELEMENT METHOD

By Nobutoshi MASUDA<sup>1</sup>, M.JSCE, Tetsuya NISHIMOTO<sup>2</sup>,  
Takeo NISHIWAKI<sup>3</sup>, M.JSCE, and Masaru MINAGAWA<sup>4</sup>, M.JSCE

SUMMARY

The accuracy of dynamic response analyses by the finite element method is closely related to that of the corresponding natural vibration frequencies of the idealized model to the vibration modes included in the problem under consideration.

In this paper, the discretization error in natural vibration frequencies are investigated for bar, Bernoulli-Euler beam and Timoshenko beam finite elements. The relation has been established between the relative error of the natural vibration frequencies and the finite element methods which use consistent and lumped mass formulation and shape functions of the type of Lagrangian and Hermitian interpolation. The study is based on direct numerical calculations but the results are compared with theoretical values estimated by classical error analyses used to evaluate finite difference methods.

Through the arrangement of the results by the order of vibrations normalized with the total structural degrees of freedom, the relative error in the natural vibration frequencies of each finite element approximations is found to be unique respectively, regardless of the number of elements, under the condition of constant size mesh division. The results of the study provide basic information on the magnitude of the discretization error and number of elements required for a desired degree of accuracy.

- 
1. Dr.Eng., Associate Prof., Dept. of Civil Eng., Musashi Inst. of Tech.
  2. M.Eng., Formerly Graduate Student of Musashi Inst. of Tech.
  3. Dr.Eng., Prof., Dept. of Civil Eng., Musashi Inst. of Tech.
  4. M.Eng., Research Associate, Dept. of Civil Eng., Musashi Inst. of Tech.