

構造工学における数値解析法シンポジウム論文集
第 10 卷

Proceedings of Symposium on
Computational Methods in Structural Engineering
and Related Fields
Volume, 10

昭和61年7月

日本鋼構造協会

骨組構造の幾何学的非線形動的応答解析のための一方法
Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of Space Frames

1) 2) 3) 4)
○増田陳紀・西脇威夫・皆川 勝・山本英男

1. はじめに

構造物にある大きさの荷重が作用するとき、それが静的に載荷する場合には安定が保たれるとしても、動的載荷である場合には不安定となることがあり得る。すなわち、最大変位応答を荷重の大きさの関数と考えたとき、荷重のわずかな増加に対して応答が急激に増大するような現象が生じ得る。このような動的不安定問題を対象とする場合、あるいは、動的不安定現象が起こらないとしても、構造物の形状・寸法および荷重条件などによっては、静的荷重載荷の場合と同様に、動的応答解析においても幾何学的非線形性を考慮することが必要となる。しかし、幾何学的非線形性を考慮した動的応答解析法に関する研究は、平面構造を対象とした場合いくつか行われてきているものの、立体構造を対象としてはこれまでほとんどなされていない。その理由の一つは、この種の研究そのものが係数励振振動問題など特定の問題を除くと一般的には未だ発展段階にあることにある。一方、三次元空間での有限な回転を伴う問題の解析が、静的解析においても一般的には容易でないことも事実であり、むしろこれが第一の理由とも考えられる。

本研究では、三次元空間における動的不安定現象を論ずることを念頭において、三次元空間での有限な回転を伴う問題にも対処可能な骨組構造の三次元動的応答解析法を提案する。数値解析例によって、初めに、著者の一人が吉田・松田らと共に開発した座標表示に基づく三次元非線形静的解析法[1],[2] (以下、著者名の頭文字を並べてYMM法と呼ぶ)が三次元空間での有限な回転を伴う問題に対しても有効な解析法であることを示し、次いでYMM法に基づいて誘導した運動方程式の妥当性を検証する。

2. YMM法の増分つり合い方程式の増分型運動方程式への拡張

基礎となるYMM法の要素増分つり合い式は次式で与えられる[1],[2]。なお、部材は無載荷の初期状態では真直であり、二軸対称な一様断面を有するものとする。

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{T}_{(n+1)}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T}_{(n+1)} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{T}_{(n+1)}^T \mathbf{K}^* [\mathbf{t}_{(n+1)} \Delta \mathbf{z} + \Delta \mathbf{I} (\mathbf{u}_{(n)} + \mathbf{z}_{(n)})] + \Delta \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f}_{(n)}^* \\ = \mathbf{K}_{(n+1)} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{h}_{(n+1)} \quad (\text{と置く}) \quad (1)$$

ここに、 \mathbf{f} および \mathbf{u} は各々全体座標系での要素節点力ベクトルおよび節点変位ベクトルであり、 \mathbf{f}^* および \mathbf{u}^* は要素座標系での対応するベクトルである。 \mathbf{T} は全体座標系から要素座標系への座標変換ベクトルである。また、 $\mathbf{z}^T = \langle \mathbf{x}_{(n)}^T, -\mathbf{r}^T \rangle$ であり、 \mathbf{x} は要素節点座標ベクトル ($\mathbf{x}_{(n)}$ は初期状態での要素節点座標ベクトル)、 \mathbf{r} は要素剛体回転ベクトルである。 \mathbf{K}^* は要素座標系での剛性行列であり、ここで対象とする立体骨組の場合、通常の12×12の線形の骨組要素剛性行列である。さらに、 $\mathbf{T}, (n), \Delta$ は行列の転置、第nつり合い段階および第nつり合い段階から第(n+1)つり合い段階までの増分を各々表わす記号である。

YMM法の特徴は、上式のように剛性行列自身には微小ひずみを前提とした線形剛性行列を用い、幾何学的非線形性は要素座標系での節点変位と全体座標系での節点変位との間の座標変換関係を座標および剛体回転を用いて忠実に表現することならびに、増分後の座標変換行列をそのままつり合い式の中に残していることにある。また、三次元空間での有限な回転は、一連の回転の結果を常に一つの軸回りの回転として捉えることにより取り扱っており、したがって要素内に荷重が作用しない一様断面部材からなる骨組構造に対して、微小ひずみの前提が成り立つ範囲では式(1)の増分つり合い式にははり理論との対応で一切の省略はなされ

1)武蔵工業大学・工学部・助教授, 2)同・教授, 3)同・助手, 4)東京都足立区

東京都世田谷区玉堤1-28-1(☎158)

ていない。これを動的つり合い式に拡張するためには、運動量変化率の項ならびに減衰項を加えれば良いが、ここでは簡単のため減衰作用のない系を考えることとする。このとき、要素の増分型運動方程式が次式のよう
 に得られる。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f} = & \mathbf{I}_{(n+1)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{I}_{(n+1)} \ddot{\mathbf{u}}_{(n+1)} - \mathbf{I}_{(n)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{I}_{(n)} \ddot{\mathbf{u}}_{(n)} \\ & + d(\mathbf{I}_{(n+1)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{I}_{(n+1)}) / dt \dot{\mathbf{u}}_{(n+1)} - d(\mathbf{I}_{(n)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{I}_{(n)}) / dt \dot{\mathbf{u}}_{(n)} \\ & + \mathbf{k}_{(n+1)} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{h}_{(n+1)} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 \mathbf{M}^* は要素座標系での質量行列であり、 $*$ は時間微分を表わす。また、ここでは時間刻み幅 Δt を一定とし、添字 (n) は時刻 $n\Delta t$ を表わすものとする。

上式において、第1行は質量行列と加速度ベクトルの積を表わし、第2行は質量行列の時間微分と速度ベクトルの積の増分を表わしており、第3行は式(1)の右辺として与えられている復元力項である。

座標変換行列 \mathbf{I} は変位の関数であり、したがって時間の関数ではあるが、例えば極端な場合として集中質量行列を考えると、並進変位成分に関して \mathbf{M}^* は単位行列を係数倍したものと等しくなり、その結果、 $\mathbf{I}_{(n)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{I}_{(n)}$ もまた座標変換行列の直交性を考慮すると単位行列の係数倍となり、時間依存性はなくなる。つまり第2行は意味を持たなくなる。この結果が回転成分ならびに整合質量の場合にも近似的に成り立ち、第2行は第1行に比し無視できるものと仮定して第2行を削除すると、結局次式が得られる。これが本研究における要素の増分型運動方程式である。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f} = & \mathbf{I}_{(n+1)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{I}_{(n+1)} \Delta \ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{I}_{(n+1)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{I}_{(n+1)} - \mathbf{I}_{(n)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{I}_{(n)}] \ddot{\mathbf{u}}_{(n)} \\ & + \mathbf{k}_{(n+1)} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{h}_{(n+1)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} = & \mathbf{M}_{(n+1)} \Delta \ddot{\mathbf{u}} + [\Delta \mathbf{T}^T \mathbf{M}^* \mathbf{I}_{(n)} + \mathbf{I}_{(n)}^T \mathbf{M}^* \Delta \mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}^T \mathbf{M}^* \Delta \mathbf{T}] \ddot{\mathbf{u}}_{(n)} \\ & + \mathbf{k}_{(n+1)} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{h}_{(n+1)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

上式において、座標変換行列 \mathbf{I} および増分量 $\Delta \mathbf{T}$ 、 $\Delta \mathbf{z}$ および $\Delta \ddot{\mathbf{u}}$ は変位増分 $\Delta \mathbf{u}$ の関数であり、他は既知量である。

3. 運動方程式の解法

文献[1]では式(1)で記述される系に対する有効な解法として、二段階線形化近似とそれに続く反復修正計算からなる予測子-修正子型の計算方法を提案している。ここでも同様な解法を採用する。しかし本問題の場合、式(3)が支配方程式であり加速度項が含まれているため、時間積分が必要となる。ここでは最も簡単な時間積分法の一つであるNewmarkの β 法($\beta=1/4$)を用い、これと二段階近似反復修正計算法とを組合わせて以下のような解法を構成する。

Newmarkの β 法では、連続する時間ステップ間の速度および変位を次のように仮定している。

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_{(n+1)} - \dot{\mathbf{u}}_{(n)} = \dot{\mathbf{u}}_{(n)} \Delta t + \Delta \ddot{\mathbf{u}} \Delta t / 2 \quad (4)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{(n+1)} - \mathbf{u}_{(n)} = \dot{\mathbf{u}}_{(n)} \Delta t + \ddot{\mathbf{u}}_{(n)} \Delta t^2 / 2 + \Delta \ddot{\mathbf{u}} \beta \Delta t^2 \quad (5)$$

1) 第1近似解の計算

まず、式(3.2)における増分項を第 n つり合い点で変位増分 $\Delta \mathbf{u}$ に関して線形化し、座標変換行列は第 n つり合い点での値を用いて評価する([1],[2]参照)。これにより次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f} = & (\mathbf{T}^T \mathbf{M}^* \mathbf{I})_{(n)} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_1 + \{ (\partial \mathbf{T}^T / \partial \mathbf{u}^T) \mathbf{M}^* \mathbf{I} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{T}^T \mathbf{M}^* (\partial \mathbf{T} / \partial \mathbf{u}^T) \ddot{\mathbf{u}} \} + (\mathbf{T}^T \mathbf{k}^* \mathbf{T}) \\ & + (\mathbf{T}^T \mathbf{k}^* (\mathbf{T} (\partial \mathbf{z} / \partial \mathbf{u}^T) + (\partial \mathbf{T} / \partial \mathbf{u}^T) (\mathbf{u} + \mathbf{z}))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial \mathbf{u}^T} \right)_{(n)} \mathbf{f}^* \Big]_{(n)} \Delta \mathbf{u}_1 \\
 & = \mathbf{M}_{(n)} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_1 + \left[\mathbf{M}' + \mathbf{k} + \mathbf{k}' \right]_{(n)} \Delta \mathbf{u}_1 \quad (\text{とおく}) \tag{6}
 \end{aligned}$$

次に、上式の $\Delta \mathbf{u}_1$ に式(5)を代入して変位増分を消去し、加速度増分のみを未知数とする次式を求める。

$$\Delta \mathbf{f} = \left(\mathbf{M} + (\mathbf{M}' + \mathbf{k} + \mathbf{k}') \right)_{(n)} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_1 + (\mathbf{M}' + \mathbf{k} + \mathbf{k}')_{(n)} (\dot{\mathbf{u}} \Delta t + \ddot{\mathbf{u}} \Delta t^2 / 2)_{(n)} \tag{7}$$

このようにして得られた要素関係式を系全体に関して重ね合わせて $\Delta \ddot{\mathbf{u}}_1$ に関して解き、その結果を式(4)および式(5)に代入し、変位および速度増分ベクトルの第1近似解 $\Delta \mathbf{u}_1$ および $\Delta \dot{\mathbf{u}}_1$ を求める。得られた第1近似解に対応する点を $(n+1)'$ 点、また (n) 点と $(n+1)'$ 点の中点を $(n+1/2)'$ 点とする。

2) 第2近似解の計算

次に第1近似解をもとにして第2近似解 $\Delta \ddot{\mathbf{u}}_{11}$ 、 $\Delta \dot{\mathbf{u}}_{11}$ および $\Delta \mathbf{u}_{11}$ を求める。その過程は第1近似解を求める過程とほとんど同じであるが、増分項の線形化は $(n+1)'$ 点ではなく $(n+1/2)'$ 点で行う。すなわち、式(6)に対応する式は次のようになる。

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{M}_1 \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{11} + (\mathbf{M}'' + \mathbf{k} + \mathbf{k}')_1 \Delta \mathbf{u}_{11} \tag{8.a}$$

$$\text{ここに } \mathbf{M}'' = \left(\frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial \mathbf{u}^T} \right)_{(n+1/2)'} \mathbf{M}^* \mathbf{T}_1 \ddot{\mathbf{u}}_{(n)} + \mathbf{T}_1^T \mathbf{M}^* \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}^T} \right)_{(n+1/2)'} \ddot{\mathbf{u}}_{(n)} \tag{8.b}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}'' = & \mathbf{T}_1^T \mathbf{k}^* \left[\mathbf{T}_1 \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{u}^T} \right)_{(n+1/2)'} + \left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}^T} \right)_{(n+1/2)'} (\mathbf{u}_{(n)} + \mathbf{z}_{(n)}) \right] \\
 & + \left(\frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial \mathbf{u}^T} \right)_{(n+1/2)'} \mathbf{f}^*_{(n)} \tag{8.c}
 \end{aligned}$$

である。ただし添字 1 は $(n+1)'$ 点における評価であることを示すものである。以下第1近似解を求める過程と同様にして、得られる第2近似解に対応する点を $(n+1)''$ 点とする。

3) 第3近似以降の反復修正解の計算

第2近似解までが得られたところで、以後増分項の線形化は行わず、増分項も座標変換行列と同様に一つ前の反復計算で得られた近似解を用いて次のように評価する。

$$\Delta \mathbf{T}_k = \mathbf{T}_{(n+1)k} - \mathbf{T}_{(n)} = \mathbf{T}_k - \mathbf{T}_{(n)} \quad (\text{とする}) \tag{9.a}$$

$$\Delta \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_{(n+1)k} - \mathbf{z}_{(n)} = \mathbf{z}_k - \mathbf{T}_{(n)} \quad (\text{とする}) \tag{9.b}$$

ここに、添字 k 、 $(n+1)k$ は第 k 近似を表わすものとする。これを式(3.1)に代入すると、式(6)、(8.a)と対応する第 $k+1$ 近似解を求めるための線形化された式が次のように得られる。

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{M}_k \Delta \ddot{\mathbf{u}}_{k+1} + \mathbf{k}_k \Delta \mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{q}_k + \mathbf{h}_k \tag{10.a}$$

$$\text{ただし } \mathbf{q}_k = \left\{ (\mathbf{T}^T \mathbf{M}^* \mathbf{T})_k - (\mathbf{T}^T \mathbf{M}^* \mathbf{T})_{(n)} \right\} \ddot{\mathbf{u}}_{(n)} \tag{10.b}$$

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{T}_k^T \mathbf{k}^* \left[\mathbf{T}_k \Delta \mathbf{z}_k + \Delta \mathbf{T}_k (\mathbf{u}_{(n)} + \mathbf{z}_{(n)}) \right] + \Delta \mathbf{T}_k^T \mathbf{f}^*_{(n)} \tag{10.c}$$

であり、これらの項は既知項となる。

式(10)の反復計算を、解が設定した収束条件を満足するまで繰り返して、次の増分段階に移行する。

以上が提案する運動方程式の解法である。

4. 三次元空間での有限な回転を伴う問題に対するYMM法の有効性の検証

この種の問題で理論解の明らかとなっている問題は少なく、また比較の対象となり得る数値解析例も多くない。ここでは、先ず理論解の明らかな問題を取り上げ、次いでBatheら[3]により提示された自由端に静的な面外鉛直荷重を受ける正方形断面片持曲がり梁の解析を行い、Batheらの結果との比較を通じてYMM法の妥当性を検証する。

1) 荷重順序を替えた正方形断面片持梁の曲げ解析による検証

正方形断面片持梁の断面主軸方向にX, Y軸を取り、長手方向にZ軸を定める。先端に作用する荷重として次の3ケースを考える。①初めにX方向に大きさPの荷重が作用し、次いでY方向に大きさPの荷重が作用する場合、②初めにY方向、次いでX方向に各々大きさPの荷重が作用する場合、③これらの荷重がXおよびY方向に同時に作用する場合である。これらの3ケースに対する変形形状を図1に示す。荷重順序によらず最終的な変形形状は完全に一致しており、三次元空間における異なる二軸回りの曲げを受ける問題に対しても本解析法が有効であることを示している。

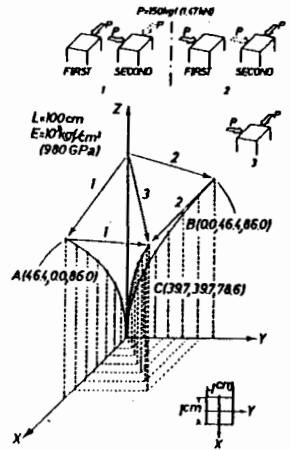


図1 荷重順序を替えた片持梁の曲げ変形図

2) 片持曲がり梁の解析による検証

図2に示す正方形断面を有する片持曲がり梁の先端に面外方向荷重を作用させる。このときの荷重作用点の荷重方向ならびに他の二軸方向の変位と荷重との関係を無次元化して図3に示す。図4は変形形状の推移を示したものである。図3

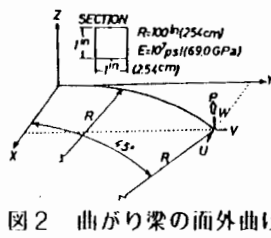


図2 曲がり梁の面外曲げ

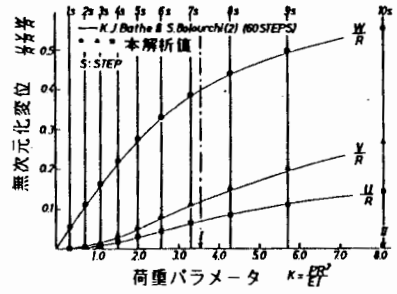


図3 自由端の荷重-変位曲線

中に実線で示されたBatheらの結果と本解析結果は良く一致している。Batheらの結果は8要素60ステップによるものであり、本解析結果は8要素10ステップの結果である。また、本解析結果は3-3)に示した反復修正計算過程に修正したSteffensenの反復法を導入して得られた結果であり、3-3)に示した反復修正計算過程そのものを用いた場合、この問題では図2中に一点鎖線で示した段階まで求められた後、発散して収束解は得られていない。修正したSteffensenの反復法は4-3)に示す通りである。なお、Batheらは二次元空間における有限変位問題ではあるが、自由端に集中モーメントを受ける片持梁の解析を行い、理論解との比較を通じて彼らの解法の妥当性を検討している。それらの結果と本解析法による結果との比較を図5に示す。図は自由端の荷重-変位曲線を示したものであり、実線が理論解、破線がBatheらによる20要素90ステップでの計算結果、○, △, □印で示したものが8要素8ステップでの本解析法による計算結果である。本解析結果は全領域にわたり理論解と良く一致しており、Batheらの結果も荷重端のたわみ角が90°となる変形程度までは理論解と一致している。

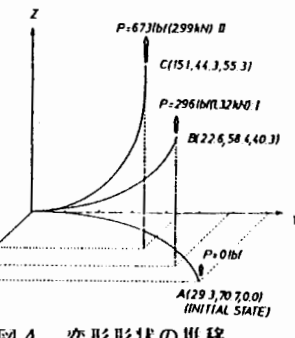


図4 変形形状の推移

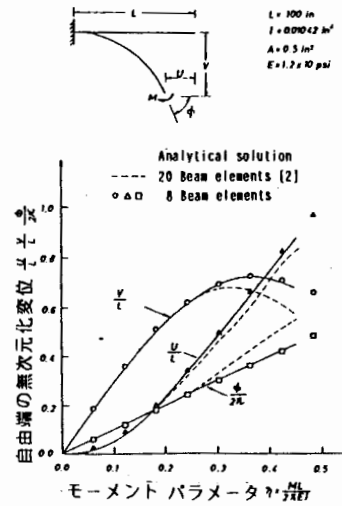


図5 自由端に集中モーメントを受ける片持梁の荷重-変位曲線

3) 修正Steffensenの反復解法[4]

式(10)を ΔU_{k+1} について解くと次の反復式が得られる。

$$\Delta U_{k+1} = K_k^{-1} (\Delta f - h_k) = G (\Delta U_k) \quad (\text{とおく}) \quad (11)$$

ただし、ここでは静的問題を対象としている。式(11)をもとに $G (\Delta U_k)$ を出発値としてSteffensenの反

復法を適用すると次のようになる。

$$\Delta u_{k+4} = g(\Delta u_k) - [g(g(\Delta u_k)) - g(\Delta u_k)]^2 / [g(g(g(\Delta u_k))) - 2g(g(\Delta u_k)) + g(\Delta u_k)] = s(\Delta u_k) \quad (12)$$

(とおく)

$k=2$ を出発値として、 $\Delta u_k, \Delta u_{j+1} = g(\Delta u_j); j=k, k+1, k+2, \Delta u_{k+3} = s(\Delta u_k)$ を求め、次いで $k+3$ を出発値として同様の計算を行う。この方法を修正Steffensenの反復法と呼ぶ。Steffensenの反復法との相違は新たな反復の出発点を式(12)の出力としての Δu_{k+3} ではなく、一旦もとのつり合い式に戻った上で $g(\Delta u_{k+3})$ とすることにある。修正Steffensenの反復法もまたSteffensenの反復法と同じく2次の収束性を有する。

5. 数値解析例—浅いアーチの動的座屈解析—

提案した動的応答解析法は、三次元空間での動的応答を解析することを念頭に置いたものであるが、その妥当性を検討するための解析例はほとんど得られていない。ここでは検討の第一段階として、浅いアーチの面内動的座屈問題を取り上げ、Plautら[5]による結果との比較を行う[6]。解析対象は図6に示す諸元を有する2ヒンジアーチであり、中央に図7に示すようなステップ荷重が作用するときの強制振動を解析する。アーチの初期状態における形状は図中に示すような正弦波形状である。ステップ荷重の大きさを変化させて応答解析を行い、各節点の初期高さの総和に対する各節点のたわみの総和の比で定義する無次元化平均変位 Δ の時間的変化を求めた結果を図8に示す。この結果は4要素を用いて時間刻み $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ secとした場合の結果である。

Budiansky・Roth[7]は、荷重の小さな増加に対して最大応答に急激な変化が生ずる状態を動的不安定と定義しており、この定義に基づいてPlautらの求めた動的座屈荷重は $P_c = 126.8\text{kgf}$ である。一方、静的座屈荷重は $P_s = 163.7\text{kgf}$ と得られている。本解析法により4要素および8要素を用いてモデル化したときの各荷重に対する無次元化平均変位 Δ の最大値を求めると図9に示すようになる。また、応答周期と荷重の大きさの関係は図10のように得られる。なお、図9に示した破線は、通常のはりの幾何剛性を用いて幾何学的非線形性を評価し、連続する3ステップ間で剛性が一定として、線形系に対するChanの方法による時間積分を行った場合の結果である。これらの結果から動的座屈荷重を求めると図11および表1に示す通りとなり、Plautらの結果と良く一致する。

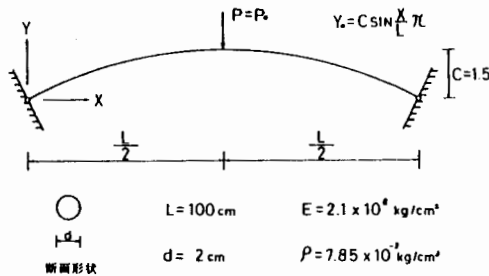


図6 解析対象

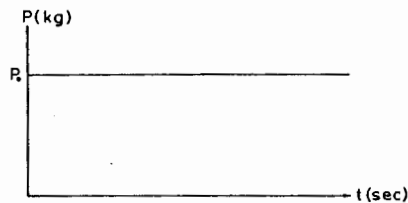


図7 荷重条件

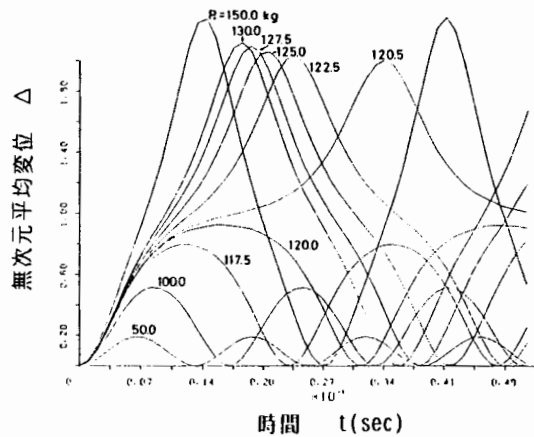


図8 時間応答履歴

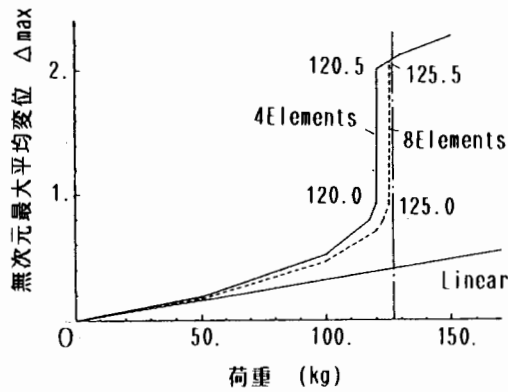


図9 荷重-最大応答関係

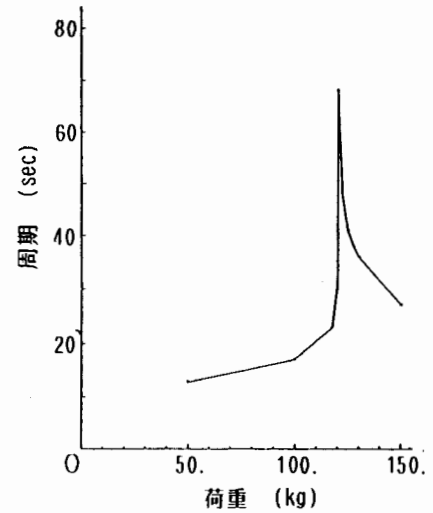


図10 荷重-周期関係

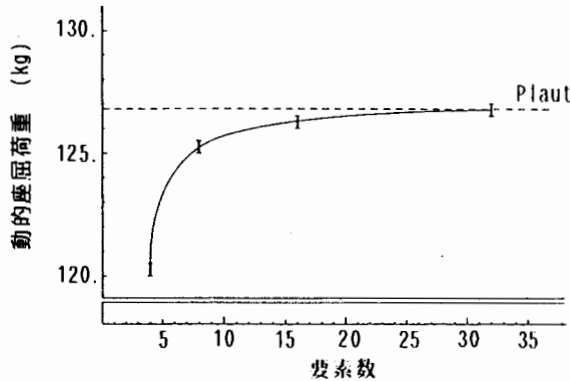


図11 要素数と動的座屈荷重の関係

表1 各要素数に対する動的座屈荷重とPlautらの結果との比較

要素数	動的座屈重 (kg)	Plautの示す値との相違(%)
4	120.0 ~ 120.5	5.4 ~ 5.0
8	125.0 ~ 125.5	1.4 ~ 1.0
16	126.0 ~ 126.5	0.6 ~ 0.2
32	126.5 ~ 127.0	0.2 ~ 0.0

6. おわりに

動的応答解析の対象とした問題が非常に浅いアーチの面内振動問題であり、より幾何学的非線形性が強い問題および三次元的非線形性を有する問題に対して、質量行列の時間微分項を省略した影響がどの程度生ずるかなどについての検討がさらに必要である。しかし、少なくともここで示した問題に関しては、提案するYMM法に基づいた非線形動的応答解析法が十分有効であることが示されたと考える。なお、ここでは時間積分に関してはNewmarkのB法を採用したが、他の時間積分法を用いることももちろん可能である。

最後に、本研究の一部に文部省科学研究費補助金(昭和59~60年度)・一般研究(c)の給付を受けたことを記し、謝意を表する。

参考文献

- 1) 吉田裕・増田陳紀・松田隆：有限要素離散化モデルの大変位解析法，JSSCマトリックス解析法研究発表論文集，pp.225-230，1979年。
- 2) 吉田裕・増田陳紀・森木剛・広沢規行：立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法，土木学会論文報告集，第300号，pp.21-31，1980年。
- 3) Bathe, K.J. and Bolourch, S.: Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 14, pp. 961-986, 1979.
- 4) 増田陳紀・西脇威夫・皆川勝・山本英男：3次元空間における有限な回転を生ずる一輪部材の解析のための一反復解法，土木学会年次学術講演会講演概要集，1-149，pp.297-298，1982年。
- 5) Gregory, W.E. Jr. and Plaut, R.H.: Dynamic stability boundaries for shallow arches, Proc. ASCE, EM6, pp. 1036-1050, 1982.
- 6) 山本英男・西脇威夫・増田陳紀・皆川勝：骨組構造の幾何的非線形動的応答解析のための一方法とアーチの動的座屈解析への適用例，土木学会年次学術講演会講演概要集，1-37，pp.73-74，1985。
- 7) Budiansky, B. and Roth, R.S.: Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells, NASA TND-1510, pp. 597-606, 1962.

Nobutoshi MASUDA 1, Takeo NISHIWAKI 2,
 Masaru MINAGAWA 3, Hideo YAMAMOTO 4

SUMMARY

A geometrically nonlinear dynamic analysis method is presented for frames which may be subjected to finite rotations in 3-dimensional space. The proposed method has its base on the method reported by Yoshida et al. In the method, governing incremental static equilibrium equation is represented by the coordinates itself rather than conventional displacements. With this equation and the corrective-iterative solution process also proposed, many kinds of geometrically nonlinear problems in the statics were analyzed satisfactorily.

The governing dynamic equilibrium equation for each member is obtained from the static equation by adding the inertia term, thus:

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{T}_{(n+1)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{T}_{(n+1)} \Delta \ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{T}_{(n+1)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{T}_{(n+1)} - \mathbf{T}_{(n)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{T}_{(n)}] \ddot{\mathbf{u}}_{(n)} \\ + \mathbf{T}_{(n+1)}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T}_{(n+1)} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{T}_{(n+1)}^T \mathbf{K}^* [\mathbf{T}_{(n+1)} \Delta \mathbf{z} + \Delta \mathbf{T} (\mathbf{u}_{(n)} + \mathbf{z}_{(n)})] + \Delta \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f}_{(n)}^*$$

where, \mathbf{T} is the coordinates transformation matrix from global to member coordinates system, \mathbf{f}^* is the member nodal forces vector, \mathbf{K}^* is the conventional linear stiffness matrix, \mathbf{M}^* is the conventional mass matrix in its member coordinates system, \mathbf{r} is the rigid body rotation vector, (n) indicates the n-th equilibrium point, and Δ is a prefix to represent increment. In practice, the two-step approximation & iterative correction solution procedure developed for static analysis is adopted and combined with a modified Steffensen's iterative process.

A numerical example of a curved cantilever beam under lateral loads illustrates the effectiveness of the proposed method in the field of finite rotations in 3-dimensional space. Among compared are Runge-Kutta type solution processes and a process using original Steffensen's iteration. The former gave divergent solution after certain amount of displacements are obtained. And the effectiveness of the latter was about half of the proposed method in the sense of computational time. In order to examine the applicability of the proposed nonlinear dynamic analysis method, it is applied to shallow arches to investigate the dynamic stability. Forced vibration analyses of two-hinged shallow arches under central step loading are conducted with several loading amplitudes. The results are compared with those given by Gregory and Plaut in 1982, who used Galerkin method, and show good correspondence. The effect of the number of members on the accuracy is also examined.

1. M. JSCE, Assoc. Prof., 2. M. JSCE, Prof., 3. M. JSCE, Research Assoc.

Dept. of Civil Eng., Musashi Inst. of Tech., Tokyo.

4. M. JSCE, Engineer, Adachi-ku, Tokyo.