

Flexible Beam の 幾何的非線形動的応答解析

Geometrically nonlinear dynamic analysis of flexible beams

○増田陳紀¹⁾ 西脇威夫²⁾ 皆川 勝³⁾ 加藤修且⁴⁾

1. はじめに

著者らは一昨年の本シンポジウムなどにおいて、骨組構造の幾何学的非線形動的応答解析に関する論文を発表し¹⁾²⁾、静的問題に関して十分有効であることが確認されている、著者らの開発した幾何学的非線形解析法³⁾⁴⁾の動的問題への拡張を行った。ここでは、解析例として浅いアーチの動的座屈解析を取り上げた。本論文では、上記論文を基に、最近しばしば話題になる宇宙構造物を想定した大きな剛体回転と変形とを同時にともなうような問題の解析を試み、本解析方法のこの種の問題に対する適用性を確認するとともに、実用化に向けての課題を検討する。

なお、本論文においては減衰がある場合の定式化についても触れており、従来の本手法による幾何学的非線形動的応答解析をより一般化している。

2. 支配方程式およびその解法

支配方程式およびその解法は既に文献[1],[2]において報告したものと基本的に同じである。支配方程式は従来変位に基づいて定式化された変位法による有限要素法に、連続体力学で一般に用いられている位置ベクトルに基づく定式化を導入して得られたものと考えることができる。実際には、着目する時点での要素座標系での節点変位と全体座標系でのそれとの間の座標変換関係と剛体変位を考慮して構成し、これを利用することにより位置ベクトルの微分を不要としているため、その意味で簡略な定式化が行われている。以下に概略を示す。

1) 運動方程式

時刻 t における一つの要素の運動方程式は全体座標系での質量行列を $[M(t)]$ 、復元力ベクトルを $\{R(t)\}$ 、外力ベクトルを $\{F(t)\}$ 、変位ベクトルを $\{u(t)\}$ 、とすると次式のように書くことができる。ただし、上つきの \cdot は時間に関する微分を表わす。

$$\frac{d\{[M(t)]\{\dot{u}(t)\}\}}{dt} + \{R(t)\} = \{F(t)\} \quad (1)$$

式(1)の第1項は時刻 t における要素座標系での質量行列を $[M^*(t)]$ 、全体座標系から要素座標系への座標変換行列を $[T(t)]$ として次のように書きかえることができる。ただし、要素座標系は常に要素に固定され、要素とともに移動するものとする。また、肩つきの T は転置行列を表わす。

$$\begin{aligned} \frac{d\{[M(t)]\{\dot{u}(t)\}\}}{dt} &= [M(t)]\{\ddot{u}(t)\} + [\dot{M}(t)]\{\dot{u}(t)\} \\ &= \{[T(t)]^T[M^*(t)][T(t)]\}\{\ddot{u}(t)\} \\ &+ \frac{d\{[T(t)]^T[M^*(t)][T(t)]\}}{dt} \cdot \{\dot{u}(t)\} \end{aligned} \quad (2)$$

1)武蔵工業大学工学部・助教授・工博, 2)同・教授・工博, 3)同・助手・工博, 4)現・銚子電工
〒158 東京都世田谷区玉堤1-28-1

一方、式(1)の第二項は、文献[3]の静的つり合い式における内力項に減衰項を加えて次式(3)のように表わされる。

$$\begin{aligned} \{R(t)\} = & \{T(t)\}^T [K^*(t)] \{ \{T(t)\} [G] (\{u(t)\} + \{Z(t)\}) - [T(0)] [G] \{Z(0)\} \} \\ & + \{T(t)\}^T [C_s^*(t)] \frac{d \{ \{T(t)\} [G] (\{u(t)\} + \{Z(t)\}) \}}{dt} \\ & + \{T(t)\}^T [C_v^*(t)] [T(t)] \{ \dot{u}(t) \} \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、減衰は要素座標系での比例構造減衰(減衰行列 $[C_s^*(t)]$)と全体座標系での比例粘性減衰(要素座標系での減衰行列 $[C_v^*(t)]$)との和で表わされるものとする。また、 $[K^*(t)]$ は要素座標系での割線剛性行列、定数行列 $[G]$ は要素座標系の原点をその要素内の第1節点に設定するためのシフト行列、 $\{Z(t)\}^T = \langle \{x(0)\}^T - \{r(t)\}^T \rangle$ は要素の初期座標ベクトル $\{x(0)\}$ 、および時刻 t における剛体回転ベクトル $\{r(t)\}$ からなるベクトルである。式(2)および式(3)を式(1)に代入することにより支配有限要素運動方程式が得られる。

2) 運動方程式の増分形

式(1)~(3)の非線形常微分方程式を直接解くことは困難であり、実際にはいずれにしても数値積分に頼らざるを得ない。本報告では文献[3]において確立されている増分形の解法を適用することを考え、時刻 $t+\Delta t$ および時刻 t における運動方程式を差し引き、次のような増分形の運動方程式を用いる。

$$\begin{aligned} & \{T(t+\Delta t)\}^T [M^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \{ \Delta \ddot{u} \} \\ & + \{ \{T(t)\}^T [M^*(t)] [\Delta T] + [\Delta T]^T [M^*(t)] [T(t)] + [\Delta T]^T [M^*(t)] [\Delta T] \} \{ \ddot{u}(t) \} \\ & + \{T(t+\Delta t)\}^T [\Delta M^*] [T(t+\Delta t)] \{ \ddot{u}(t) \} \\ \\ & + \{ \{T(t+\Delta t)\}^T [M^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \\ & + [T(t+\Delta t)]^T [M^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \\ & + [T(t+\Delta t)]^T [M^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \} \{ \Delta \ddot{u} \} \\ & + \{ \{T(t+\Delta t)\}^T [M^*(t+\Delta t)] [\Delta T] + [T(t+\Delta t)]^T [\Delta M^*] [T(t)] \\ & + [\Delta T]^T [M^*(t+\Delta t)] [T(t)] + [T(t+\Delta t)]^T [M^*(t+\Delta t)] [\Delta T] \\ & + [T(t+\Delta t)]^T [\Delta M^*] [T(t)] + [\Delta T]^T [M^*(t)] [T(t)] \\ & + [T(t+\Delta t)]^T [M^*(t+\Delta t)] [\Delta T] + [T(t+\Delta t)]^T [\Delta M^*] [T(t)] \\ & + [\Delta T]^T [M^*(t)] [T(t)] \} \{ \ddot{u}(t) \} \\ \\ & + [T(t+\Delta t)]^T [K^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \{ \Delta u \} \\ & + [T(t+\Delta t)]^T [K^*(t+\Delta t)] \{ [T(t+\Delta t)] \{ \Delta Z \} + [\Delta T] (\{ u(t) \} + \{ Z(t) \}) \} \\ & + [T(t+\Delta t)]^T [\Delta K^*] \{ u^*(t) \} + [\Delta T]^T \{ F^*(t) \} \\ \\ & + \{ \{T(t+\Delta t)\}^T [C_s^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \} [G] (\{ \Delta \dot{u} \} + \{ \Delta Z \}) \\ & + \{ \{T(t+\Delta t)\}^T ([C_s^*(t+\Delta t)] [\Delta T] + [\Delta C_s^*] [T(t+\Delta t)]) \\ & \quad + [\Delta T]^T [C_s^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \} [G] (\{ \dot{u}(t) \} + \{ Z(t) \}) \\ & + \{ \{T(t+\Delta t)\}^T [C_s^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \} [G] (\{ \Delta u \} + \{ \Delta Z \}) \\ & + \{ \{T(t+\Delta t)\}^T ([C_s^*(t+\Delta t)] [\Delta T] + [\Delta C_s^*] [T(t+\Delta t)]) \\ & \quad + [\Delta T]^T [C_s^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \} [G] (\{ u(t) \} + \{ Z(t) \}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \{ [T(t+\Delta t)]^T [C_{v^*}(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \} \{ \Delta \ddot{u} \} \\
 &+ \{ [T(t+\Delta t)]^T [C_{v^*}(t+\Delta t)] \} \{ \Delta T \} \\
 &\quad + \{ [T(t+\Delta t)]^T \{ \Delta C_{v^*} \} [T(t+\Delta t)] \} \\
 &\quad + \{ \Delta T \}^T [C_{v^*}(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \} \{ \dot{u}(t) \} \\
 &= \{ \Delta F \}
 \end{aligned} \tag{4}$$

最初のブロックは通常の慣性項、次のブロックは要素が剛体回転することに伴う慣性項、その次のブロックは減衰を除く復元力項、残りのブロックの内初めのブロックは構造減衰の項、最後のブロックは粘性減衰項、である。

以下の展開においては簡単のため非減衰系を対象とする。ひずみが微小であれば要素分割を十分細かくすることにより、個々の要素の要素座標系での剛性行列および質量行列を線形に仮定することが可能である。さらに、質量行列 $[M^*]$ が集中質量行列でかつ単位行列の係数倍として与えられる場合には式(2)の右辺第2項の微係数は0となる。そこで、他の質量行列の場合にも、近似的にこの関係が成り立つものと仮定し、式(2)の右辺第2項が第1項に比して無視できるものとする式(4)は結局次式のように簡略化される。

$$\begin{aligned}
 &[T(t+\Delta t)]^T [M^*] [T(t+\Delta t)] \{ \Delta \ddot{u} \} \\
 &+ \{ [T(t)]^T [M^*] \{ \Delta T \} + \{ \Delta T \}^T [M^*] [T(t)] \} \\
 &+ \{ \Delta T \}^T [M^*] \{ \Delta T \} \} \{ \ddot{u}(t) \} \\
 &+ [T(t+\Delta t)]^T [K^*] [T(t+\Delta t)] \{ \Delta u \} \\
 &+ [T(t+\Delta t)]^T [K^*] \{ [T(t+\Delta t)] \{ \Delta Z \} + \{ \Delta T \} (\{ u(t) \} + \{ Z(t) \}) \} \\
 &+ \{ \Delta T \}^T \{ F^*(t) \} \\
 &= [M(t+\Delta t)] \{ \Delta \ddot{u} \} + \{ g(t+\Delta t) \} \\
 &+ [K(t+\Delta t)] \{ \Delta u \} + \{ h(t+\Delta t) \} \\
 &= \{ \Delta F \}
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 [M(t+\Delta t)] &= [T(t+\Delta t)]^T [M^*] [T(t+\Delta t)] \\
 [K(t+\Delta t)] &= [T(t+\Delta t)]^T [K^*] [T(t+\Delta t)] \\
 \{ g(t+\Delta t) \} &= \{ [T(t)]^T [M^*] \{ \Delta T \} + \{ \Delta T \}^T [M^*] [T(t)] + \{ \Delta T \}^T [M^*] \{ \Delta T \} \} \{ \ddot{u}(t) \} \\
 \{ h(t+\Delta t) \} &= [T(t+\Delta t)]^T [K^*] \{ [T(t+\Delta t)] \{ \Delta Z \} \\
 &\quad + \{ \Delta T \} (\{ u(t) \} + \{ Z(t) \}) \} + \{ \Delta T \}^T \{ F^*(t) \}
 \end{aligned} \tag{5}$$

である。

3) 運動方程式の解法¹⁾

式(5)を対象とした解法について述べる。文献[3]で提案されている2段階線形化近似とその後の反復修正計算からなる予測子-修正子型の計算方法に時間積分を組み合わせた解法を採用する。時間積分法としては最も簡単な時間積分法の一つであるNewmarkの β 法 ($\beta = \frac{1}{4}$)を用いる。すなわち、一つの時間刻み間の速度および変位を次のように仮定する。

$$\begin{aligned}
 \{ \Delta \dot{u} \} &= \{ \dot{u}(t+\Delta t) \} - \{ \dot{u}(t) \} = \{ \ddot{u}(t) \} \Delta t + \frac{1}{2} \{ \Delta \ddot{u} \} \Delta t \\
 \{ \Delta u \} &= \{ u(t+\Delta t) \} - \{ u(t) \} = \{ \dot{u}(t) \} \Delta t + \frac{1}{2} \{ \ddot{u}(t) \} \Delta t^2 + \{ \Delta \ddot{u} \} \beta \Delta t^2
 \end{aligned} \tag{6}$$

まず、式(5)を変位増分 $\{\Delta u\}$ および加速度増分 $\{\Delta \ddot{u}\}$ に関して線形化し、式(6)により変位増分を消去して加速度増分のみを未知数とする式を求める。得られた要素関係式を系全体に関して重ね合わせて加速度増分の第1近似を求め、式(6)を用いて変位増分の第1近似解を計算する。同様にして文献[3]の方法にしたがい第2近似解およびその後の反復修正解を求め、設定した収束条件を満たしたとき、次の増分段階に移行する。

3. 解析例

以下に二三の解析例を示す。

1) モーメントステップ荷重を受ける一端ヒンジはり部材の解析

一端ヒンジのはり部材がヒンジ端にモーメントステップ荷重の作用を受ける場合についての解析結果より変形状の推移を図1に示す。はり部材の諸元、モーメント荷重の大きさ、時間刻み幅などは図中に示した通りである。計算は80ステップまで行い、形状変化をより分かりやすくするため、図には各ステップごとの変形状、10ステップごとの変形状および各ステップごとの変形状を10ステップごとにまとめたものを示している。

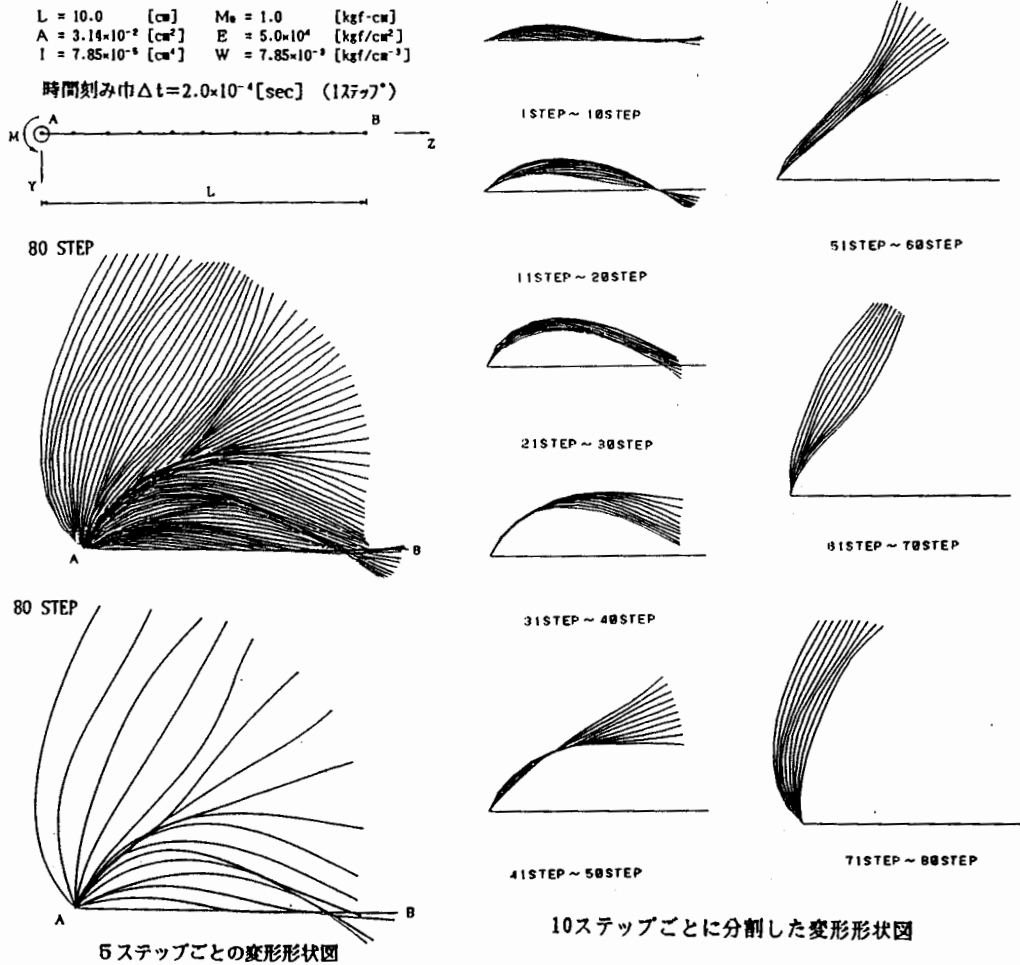
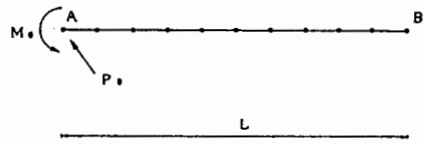
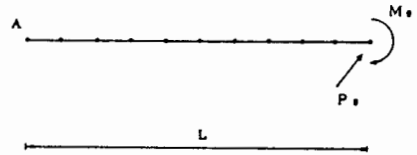


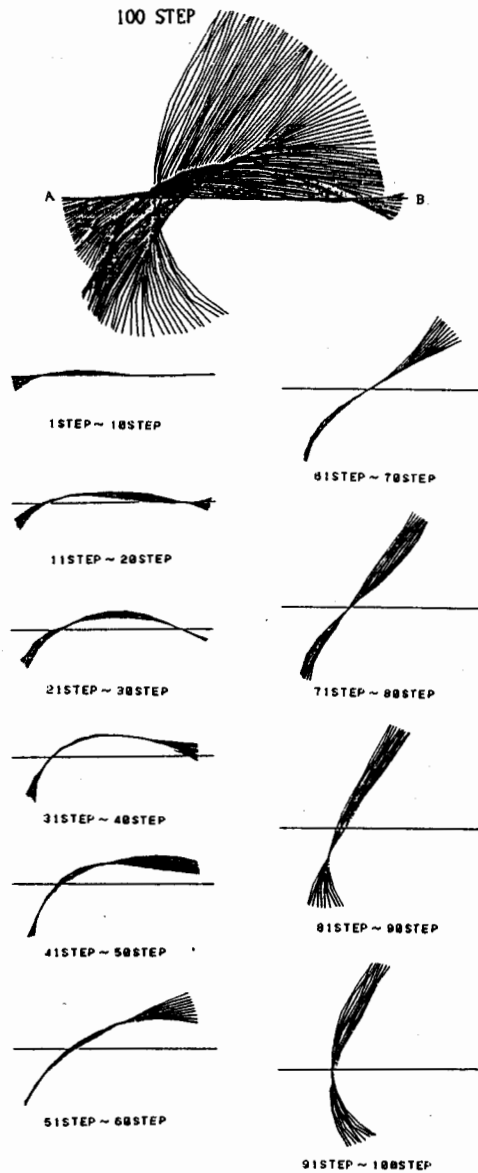
図1 モーメントステップ荷重を受ける一端ヒンジはり部材の変形状の推移



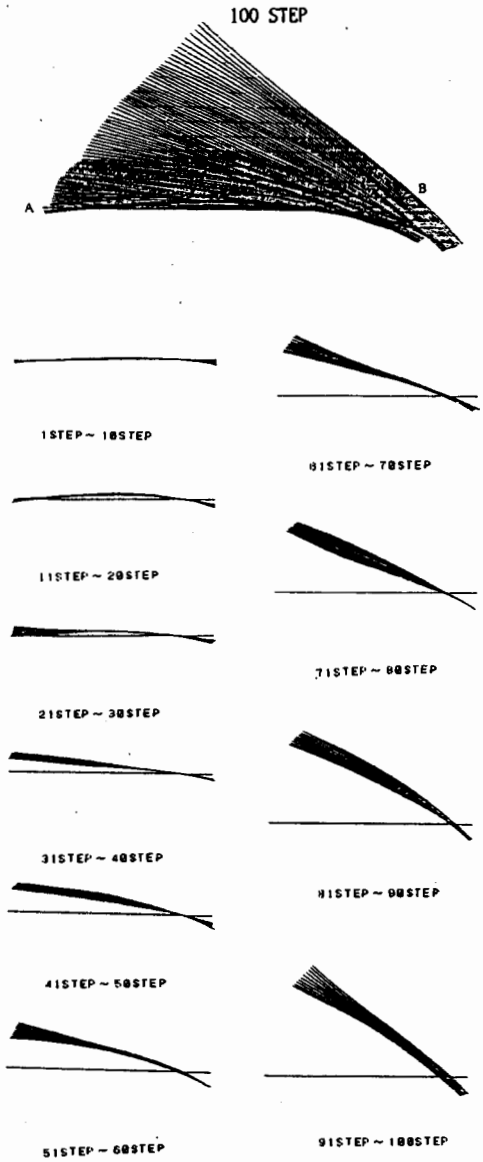
$P_0 = 0.1$ [kgf] $\tan\theta = 4/3$
 $L = 10.0$ [cm] $M_0 = 1.0$ [kgf-cm]
 $A = 3.14 \times 10^{-2}$ [cm²] $E = 5.0 \times 10^4$ [kgf/cm²]
 $I = 7.85 \times 10^{-6}$ [cm⁴] $W = 7.85 \times 10^{-3}$ [kgf/cm³]
 時間刻み巾 $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ [sec] (1ステップ)



$P_0 = 0.05$ [kgf] $\tan\theta = 4/3$
 $L = 10.0$ [cm] $M_0 = 0.25$ [kgf-cm]
 $A = 3.14 \times 10^{-2}$ [cm²] $E = 3.0 \times 10^4$ [kgf/cm²]
 $I = 7.85 \times 10^{-6}$ [cm⁴] $W = 7.85 \times 10^{-3}$ [kgf/cm³]
 時間刻み巾 $\Delta t = 2.0 \times 10^{-4}$ [sec] (1ステップ)



(a)



(b)

図2 投げ出されようとするはり部材の解析

2) 投げ出されようとするはり部材の解析

前述の一端ヒンジはり部材の支点をはずし、モーメントと同時に力が作用する場合の解析結果を同様に図2に示す。ただし、この場合も荷重はステップ荷重とする。はり部材の諸元等は図中に示した通りである。図には2つのケースの変形形状の推移が示されているが、これらははりの剛性およびステップ荷重の大きさを若干変えた結果である。この結果は、ほとんど同じ問題に対しても剛性および荷重条件のわずかな相違が応答に大きく影響することを示している。なお、図1, 2ともに変形形状の拡大は行っていない。また、いずれの計算についても収束基準は相対不釣合いノルムで0.05, 変位増分ノルムおよび加速度増分ノルムの漸近度で0.001を採用した。

4. おわりに

有限要素法による動的な非線形応答解析に関しては既に多くの研究がなされており⁵⁾、幾何学的非線形性のみならず材料非線形性までも考慮した研究も行われている⁶⁾。しかし、鍵となる関数にどのような関数を利用しているかが明示されていなかったり、不釣り合い力の評価方法が不明確であったり、根拠が明白でない計算上の技巧が用いられていたり、少なくとも公表されている文献のみでは解析の理論から実際の計算への流れが必ずしも容易には理解し得ない場合も多い。

本報告では、著者らが提案した静的な非線形解析手法³⁾に基づく幾何学的非線形動的応答解析の支配方程式およびその計算方法について述べ、具体的な数値計算例を示した。

取り上げた問題は、J.C.Simoらの文献でも扱われている一端ヒンジ棒部材の回転問題、Simoがフライングスパゲッティと呼ぶ両端自由棒部材が投げられた後の飛行形状追跡の問題に類似の問題などである。要素分割数、時間積分幅、収束基準の設定などについての検討課題が残されているが本解析方法によって大変位解析が可能であることが実証できた。ただし、先に述べたSimoらの文献では問題の諸元に不明の部分があり、一方、著者らの知る限り、彼らの他には比較の対象となる解析結果が報告されていないため、今後なんらかの実験結果との比較などにより本解析結果の妥当性を確認することが必要である。

◆ 参考文献 ◆

- 1) 増田陳紀・西脇威夫・皆川 勝・山本英男：骨組構造の幾何学的非線形動的応答解析のための一方法，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第10巻，pp.431~436，昭和61年7月。
- 2) Masuda, N., Nishiwaki, T., and Minagawa, M. : Nonlinear dynamic analysis of frame structures, Computers & Structures, Vol.27, No.1, pp.103-110, 1987.
- 3) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法，土木学会論文報告集，第288号，pp.41~55，1979年8月。
- 4) 吉田 裕・増田陳紀・森本 剛・広沢規行：立体骨組構造の増分釣り合い方程式とその解法，土木学会論文報告集，第300号，pp.21~31，1980年8月。
- 5) 例えばSimo, J.C. et al. : A Novel Approach to the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions, Electronics Research Laboratory Memorandum No. UCB/ERL M85/31, UC Berkeley, 1985.
- 6) 例えばBathe, K.J. et al. : Finite element formulations for large deformation dynamic analysis, Int J. Num. Meth. Eng., Vol.9, 353-386, 1975.

Nobutoshi MASUDA 1 Takeo NISHIWAKI 2 Masaru MINAGAWA 3
and Nobuaki KATOH 4

SUMMARY

Most papers published heretofore, which dealt with finite element nonlinear dynamic analyses, have had some incomprehensibilities as for the processes to construct practical algorithms on the theoretical bases.

The authors have published papers on geometrically nonlinear dynamic analysis of frame structures in which well established geometrically nonlinear static analysis method developed by the authors has been extended to dynamic problems. But there, numerical examples presented have been only those of dynamic buckling analyses of shallow arches.

In this paper, the formulations are summarized with a slight refinement, and large displacement dynamic analyses are conducted on flexible beams in view of space structures which has attracted special interest recently.

The formulations of the static analysis method are based on the introduction of the use of position vectors, which is common in continuum mechanics, into the finite element assembly expressions, instead of the usual use of displacements as unknowns. In practice, coordinate transformation relations between the global coordinate system and the element coordinate system at the time of consideration are constructed directly as functions of rigid body displacements of the element. This enables us to formulate rather simple equilibrium equations without any use of differentiations of position vectors.

The equations of motion are obtained basically as mere extensions of static equilibrium equations, namely, by just including the momentum term and damping term. Then an incremental form of the equations of motion is described in order to use the solution procedure established in the static analyses mentioned above.

Numerical examples presented are a rotation problem of a free-hinged-end bar and a flight configuration trace problem of a bar with free ends which J.C.Simo calls a flying spaghetti problem.

The applicability of the method for these kind of problems is confirmed. Subjects for a future study are also considered in regard to practical application.

1. Associ. Prof., 2. Prof., 3. Research Associ.
Dept. Civil Eng., Musashi Inst. of Tech., Tokyo, Japan
4. Engineer, Kandenko Co. Ltd., Tokyo, Japan.