

# 幾何的非線形動的応答解析の一手法と 平面骨組解析への応用

A Numerical Method for Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis  
and its Application to Plane Frame Problems

増田陳紀\*・西脇威夫\*\*・皆川 勝\*\*\*・高橋広幸\*\*\*\*

by Nobutoshi MASUDA, Takeo NISHIWAKI, Masaru MINAGAWA and Hiroyuki TAKAHASHI

A geometrically nonlinear dynamic analysis method is presented and large displacement dynamic analyses are conducted on flexible beams in view of space structures. The proposed method is based on the static analysis method reported by Yoshida et. al., in which the governing incremental equilibrium equation is represented by the coordinates after the deformation. The governing dynamic equilibrium equation for each element is obtained from the static equation by adding the inertia term and damping term. In the solution procedure, Newmark's- $\beta$  time integration scheme is combined with the two-step approximation and iterative correction solution procedure. Numerical examples are a rotation problem of a free-hinged-end bar and a flight configuration trace problem of a flexible bar with free ends. The applicability of the method for these kind of problems is confirmed.

## 1. はじめに

宇宙構造物など、構造全体として大きな剛体運動をともしつつ大変位する軽量構造を設計しようとする場合には、幾何学的非線形動的応答解析が必要となる。有限要素法による動的非線形応答解析に関しては既に多くの研究がなされており<sup>1)</sup>、幾何学的非線形のみならず材料非線形性までも考慮した研究も行われている<sup>2)</sup>。しかし、鍵となる関数にどのような関数を利用しているかが明示されていなかったり、不釣り合い力の評価方法が不明確であったり、根拠が明白でない計算上の技巧が用いられたり、少なくとも公表されている文献のみでは解析の理論から実際の計算への流れが必ずしも容易には理解し得ない場合も多い。また、大きな剛体運動をともしつつ大変位する問題の応答解析に関しては、現在までのところ、Simoらの研究の他には公表された例が見あたらない。Simoらは、近年一連の研究を行い、3次元空間における棒部材の動的挙動を計算し得る段階にまで発展させている<sup>3)</sup>。しかしながら、Simoらの研究においては、運動方程式の定式化が数学的にかなり複雑であり、必ずしも一般に理解し易い内容とはなっていない。

著者らは以上の問題点を考慮して、理論から実際の計算までの流れが明確な応答解析法を確立することを

---

*	工博	武蔵工業大学助教授	工学部土木工学科	(〒158	東京都世田谷区玉堤1-28-1)
**	工博	武蔵工業大学教授	工学部土木工学科	(〒158	東京都世田谷区玉堤1-28-1)
***	工博	武蔵工業大学助手	工学部土木工学科	(〒158	東京都世田谷区玉堤1-28-1)
****		武蔵工業大学大学院	土木工学専攻修士課程	(〒158	東京都世田谷区玉堤1-28-1)

目的に、その第一段階として、静的問題に関して十分有効であることが確認されている、著者らの開発した座標表示に基づく幾何学的非線形解析法<sup>4)5)</sup>を非減衰形の動的問題を扱い得るように拡張し、解析例として浅いアーチの動的座屈解析を取り上げ、理論解との比較を通じて解析法の妥当性を示した<sup>6)7)</sup>。

本論文では、減衰を考慮したより一般的な定式化を行い、次いで、減衰を無視できる場合を対象に、幾つかの仮定を導入して式の簡略化を計る。最後に、大きな剛体回転と大変位とを同時に考慮すべき問題として、flexible beam の問題を取り上げ、計算結果を通して解析法の妥当性を示す。

## 2. 座標表示に基づく幾何学的非線形静的応答解析の支配方程式とその増分形<sup>4)5)</sup>

本論文では、文献[4][5]において報告された静的問題に対する幾何学的非線形解析法を基礎として、運動方程式を定式化する。文献[4][5]における全体座標系で表わされた個々の要素のつり合い方程式は次のように与えられる。なお、骨組構造を対象とする場合、ここでは部材は無載荷の初期状態において真直であり、二軸対称な一様断面を有するものとする。

$$\begin{aligned}
 \{f\} &= [T]^T \{f^*\} && \text{(節点力の座標変換)} \\
 &= [T]^T [k^*] \{u^*\} && \text{(要素座標系での節点力を要素座標系での} \\
 &&& \text{剛性方程式により表現)} \\
 &= [T]^T [k^*] ([T][G]\{a\} - [T_0][G]\{a_0\}) && \text{(要素座標系での節点変位を全体座標系で} \\
 &&& \text{の一般化座標により表現)} \\
 &= [T]^T [k^*] [T] \{q(\{u\}, \{x_0\})\} && (\{q(\{u\}, \{x_0\})\} \\
 &&& = [G]\{a\} - [T]^{-1}[T_0][G]\{a_0\} \text{とおく)} \quad (1)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\langle u \rangle = \langle \langle d \rangle \langle \theta \rangle \rangle$ 、 $\{x\}$ 、 $\langle a \rangle = \langle \langle x \rangle \langle \theta \rangle - \langle r \rangle \rangle$ 、 $\{d\}$ 、 $\{\theta\}$ 、および $\{r\}$ はそれぞれ要素の節点変位ベクトル、節点座標ベクトル、要素の節点における一般化座標ベクトル、要素の節点並進変位成分ベクトル、要素の節点回転変位成分ベクトルおよび要素の剛体回転ベクトルである。 $[k^*]$ は要素座標系での剛性行列であり、ここでは通常の線形剛性行列を用いる。 $[G]$ は要素座標系の原点をその要素内の第1節点に設定するためのシフト定数行列である。添え字 $T$ は転置行列を表わし、添え字 $0$ は変形前の初期状態に関する量を表わす。また、添え字 $*$ は要素と共に移動する要素座標系に関する量を表わす。座標変換行列は増分表示を用いた場合にも定数ではなく、その時点の一般化座標の関数となる。

上式を増分形に変形すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \{\Delta f\} &= [T + \Delta T]^T [k^*] [T + \Delta T] \{\Delta u\} \\
 &\quad + [T + \Delta T]^T [k^*] \{[T + \Delta T] \{\Delta z\} + [\Delta T][G] (\{u\} + \{z\})\} \\
 &\quad + [\Delta T]^T \{f^*\} \\
 &= [k + \Delta k] \{\Delta u\} + \{h + \Delta h\} \quad (\text{とおく}^{1)}) \quad (2)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\{z\} = \{a\} - \{u\}$  であり、また、

注1) 通常の線形剛性行列を用いると $[\Delta k^*] = [0]$ のため、式(2)のようになる。後述の式(7)のように、 $[k^* + \Delta k^*]$ の形に書き改めると、本式において $[k^*]$ を $[k^* + \Delta k^*]$ に置き換えると同時に、 $[T + \Delta T]^T [\Delta k^*] \{u^*\}$ の項を付加する必要がある。

$$\{h+\Delta h\} = [T+\Delta T]^T [k^*] \{[T+\Delta T]\{\Delta z\} + [\Delta T][G] (\{u\} + \{z\})\} + [\Delta T]^T \{f^*\} \quad (3)$$

である。記号 $\Delta$ は第 $n$ 段階のつり合い状態から第 $n+1$ 段階のつり合い状態への増分を表わす。この式において特徴的なことは、幾何学的非線形性が要素座標系での節点変位と全体座標系での節点変位との間の座標変換関係を座標および剛体回転を用いて忠実に表現すること、ならびに、増分後の座標変換関係をそのままつり合い式の中に残すこと、により考慮されていることである。なお、一連の回転の結果をある一つの軸回りの回転として捉えることにより、3次元空間での有限な回転も忠実に評価することができる。要素内に荷重が作用しない一様断面部材からなる骨組構造に対して、微小ひずみの前提が成り立つ範囲では式(2)の増分つり合い式にははり理論との対応で省略は一切なされていない。

### 3. 動的解析の支配方程式<sup>3)</sup>

支配方程式およびその解法は既に文献[6],[7]において報告したものと基本的には同じである。本論文では減衰項を考慮した一般化した関係式を導く。支配方程式は従来変位に基づいて定式化された変位法による有限要素法に、連続体力学で一般に用いられている位置ベクトルに基づく定式化を導入して得られたものと考えることができる。実際には、前節で述べたように、着目する時点での要素座標系での節点変位と全体座標系でのそれとの間の座標変換関係と剛体変位を考慮して構成し、これを利用することにより位置ベクトルの微分を不要としているため、その意味で簡略な定式化が行われている。

#### 1) 運動方程式

時刻 $t$ における一つの要素の運動方程式は全体座標系での質量行列を $[M(t)]$ ,復元力ベクトルを $\{r(t)\}$ ,外力ベクトルを $\{f(t)\}$ ,変位ベクトルを $\{u(t)\}$ ,とすると次式のように書くことができる。ただし、上つきの $\cdot$ は時間に関する微分を表わす。

$$\frac{d\{[M(t)]\{\dot{u}(t)\}\}}{dt} + \{r(t)\} = \{f(t)\} \quad (4)$$

式(4)の第1項は時刻 $t$ における要素座標系での質量行列を $[M^*(t)]$ ,全体座標系から要素座標系への座標変換行列を $[T(t)]$ として次のように書きかえることができる。ただし、前述したように、要素座標系は常に要素に固定され、要素とともに移動するものとする。

$$\begin{aligned} \frac{d\{[M(t)]\{\dot{u}(t)\}\}}{dt} &= [M(t)]\{\dot{u}(t)\} + [\dot{M}(t)]\{\dot{u}(t)\} \\ &= \{[T(t)]^T [M^*(t)] [T(t)]\} \{\dot{u}(t)\} \\ &+ \frac{d\{[T(t)]^T [M^*(t)] [T(t)]\}}{dt} \cdot \{\dot{u}(t)\} \end{aligned} \quad (5)$$

一方、式(4)の左辺第二項は、式(2)の静的つり合い式における内力項に減衰項を加えて次式(6)のように表わされる。

$$\begin{aligned} \{r(t)\} &= [T(t)]^T [k^*(t)] \{[T(t)] [G] (\{u(t)\} + \{z(t)\}) - [T(0)] [G] \{z(0)\}\} \\ &+ [T(t)]^T [C_s^*(t)] \frac{d\{[T(t)] [G] (\{u(t)\} + \{z(t)\})\}}{dt} \\ &+ [T(t)]^T [C_v^*(t)] [T(t)] \{\dot{u}(t)\} \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、減衰は要素座標系での比例構造減衰（減衰行列 $[C_s^*(t)]$ ）と全体座標系での比例粘性減衰（要素座標系での減衰行列 $[C_v^*(t)]$ ）との和で表わされるものとする。式(5)および式(6)を式(4)に代入することにより支配有限要素運動方程式が得られる。

## 2) 運動方程式の増分形

式(4)～(6)の非線形常微分方程式を直接解くことは困難であり、実際にはいずれにしても数値積分に頼らざるを得ない。本論文では文献[4][5]において確立されている増分形の解法を適用することを考え、時刻 $t+\Delta t$ および時刻 $t$ における運動方程式を差し引き、次のような増分形の運動方程式を用いる。

$$\begin{aligned}
 & [T(t+\Delta t)]^T [M^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \{\Delta \dot{u}\} \\
 & + \{ [T(t)]^T [M^*(t)] [\Delta T] + [\Delta T]^T [M^*(t)] [T(t)] + [\Delta T]^T [M^*(t)] [\Delta T] \} \{\dot{u}(t)\} \\
 & + [T(t+\Delta t)]^T [\Delta M^*] [T(t+\Delta t)] \{\dot{u}(t)\} \\
 & + \{ [\ddagger(t+\Delta t)]^T [M^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \\
 & + [T(t+\Delta t)]^T [\ddot{M}^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \\
 & + [T(t+\Delta t)]^T [M^*(t+\Delta t)] [\ddagger(t+\Delta t)] \} \{\Delta \dot{u}\} \\
 & + \{ [\ddagger(t+\Delta t)]^T [M^*(t+\Delta t)] [\Delta T] + [\ddagger(t+\Delta t)]^T [\Delta M^*] [T(t)] \\
 & + [\Delta \ddagger]^T [M^*(t+\Delta t)] [T(t)] + [T(t+\Delta t)]^T [\ddot{M}^*(t+\Delta t)] [\Delta T] \\
 & + [T(t+\Delta t)]^T [\Delta \ddot{M}^*] [T(t)] + [\Delta T]^T [\ddot{M}^*(t)] [T(t)] \\
 & + [T(t+\Delta t)]^T [M^*(t+\Delta t)] [\Delta \ddagger] + [T(t+\Delta t)]^T [\Delta M^*] [\ddagger(t)] \\
 & + [\Delta T]^T [M^*(t)] [\ddagger(t)] \} \{\dot{u}(t)\} \\
 & + [T(t+\Delta t)]^T [k^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \{\Delta u\} \\
 & + [T(t+\Delta t)]^T [k^*(t+\Delta t)] \{ [T(t+\Delta t)] \{\Delta z\} + [\Delta T] [G] (\{u(t)\} + \{z(t)\}) \} \\
 & + [T(t+\Delta t)]^T [\Delta k^*] \{u^*(t)\} + [\Delta T]^T \{f^*(t)\} \\
 & + \{ [T(t+\Delta t)]^T [C_s^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \} [G] (\{\Delta \dot{u}\} + \{\Delta \dot{z}\}) \\
 & + \{ [T(t+\Delta t)]^T ([C_s^*(t+\Delta t)] [\Delta T] + [\Delta C_s^*] [T(t+\Delta t)]) \\
 & \quad + [\Delta T]^T [C_s^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \} [G] (\{\dot{u}(t)\} + \{\dot{z}(t)\}) \\
 & + \{ [T(t+\Delta t)]^T [C_s^*(t+\Delta t)] [\ddagger(t+\Delta t)] \} [G] (\{\Delta u\} + \{\Delta z\}) \\
 & + \{ [T(t+\Delta t)]^T ([C_s^*(t+\Delta t)] [\Delta \ddagger] + [\Delta C_s^*] [\ddagger(t+\Delta t)]) \\
 & \quad + [\Delta T]^T [C_s^*(t+\Delta t)] [\ddagger(t+\Delta t)] \} [G] (\{u(t)\} + \{z(t)\}) \\
 & + \{ [T(t+\Delta t)]^T [C_v^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \} \{\Delta \dot{u}\} \\
 & + \{ [T(t+\Delta t)]^T [C_v^*(t+\Delta t)] [\Delta T] \\
 & \quad + \{ [T(t+\Delta t)]^T [\Delta C_v^*] [T(t+\Delta t)] \\
 & \quad \quad + [\Delta T]^T [C_v^*(t+\Delta t)] [T(t+\Delta t)] \} \} \{\dot{u}(t)\} \\
 & = \{\Delta f\}
 \end{aligned} \tag{7}$$

最初のブロックは通常の慣性項、次のブロックは要素が剛体回転することに伴う慣性項、その次のブロックは減衰を除く復元力項、残りのブロックの内初めのブロックは構造減衰の項、最後のブロックは粘性減衰項、である。

### 3) 簡略化した増分形運動方程式

以下の展開においては簡単のため非減衰系を対象とする。ひずみが微小であれば要素分割を十分細かくすることにより、個々の要素の要素座標系での剛性行列および質量行列を線形に仮定することが可能である。座標変換行列  $[T]$  は変位の関数であり、したがって時間の関数ではあるが、例えば極端な場合として集中質量行列を考えると、並進変位成分に関して質量行列  $[M^*]$  は単位行列を係数倍したものと等価になり、その結果、 $[T]^T [M^*] [T]$  もまた座標変換行列の直交性を考慮すると単位行列の係数倍となり、時間依存性はなくなる。そこで、回転成分ならびに他の質量行列の場合にも、近似的にこの関係が成り立つものと仮定し、式(5)の右辺第2項が第1項に比して無視できるものとするとき式(7)は結局次式のように簡略化される。

$$\begin{aligned}
 & [T(t+\Delta t)]^T [M^*] [T(t+\Delta t)] \{\Delta \ddot{u}\} \\
 & + \{ [T(t)]^T [M^*] [\Delta T] + [\Delta T]^T [M^*] [T(t)] \\
 & + [\Delta T]^T [M^*] [\Delta T] \} \{\ddot{u}(t)\} \\
 & + [T(t+\Delta t)]^T [k^*] [T(t+\Delta t)] \{\Delta u\} \\
 & + [T(t+\Delta t)]^T [k^*] \{ [T(t+\Delta t)] \{\Delta z\} + [\Delta T] (\{u(t)\} + \{z(t)\}) \} \\
 & + [\Delta T]^T \{f^*(t)\} \\
 & = [M(t+\Delta t)] \{\Delta \ddot{u}\} + \{g(t+\Delta t)\} \\
 & + [k(t+\Delta t)] \{\Delta u\} + \{h(t+\Delta t)\} \\
 & = \{\Delta f\}
 \end{aligned} \tag{8}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 [M(t+\Delta t)] &= [T(t+\Delta t)]^T [M^*] [T(t+\Delta t)] \\
 [k(t+\Delta t)] &= [T(t+\Delta t)]^T [k^*] [T(t+\Delta t)] \\
 \{g(t+\Delta t)\} &= \{ [T(t)]^T [M^*] [\Delta T] + [\Delta T]^T [M^*] [T(t)] + [\Delta T]^T [M^*] [\Delta T] \} \{\ddot{u}(t)\} \\
 \{h(t+\Delta t)\} &= [T(t+\Delta t)]^T [k^*] \{ [T(t+\Delta t)] \{\Delta z\} \\
 & \quad + [\Delta T] (\{u(t)\} + \{z(t)\}) \} + [\Delta T]^T \{f^*(t)\}
 \end{aligned} \tag{9}$$

である。

### 4. 運動方程式の解法<sup>6)7)</sup>

文献[4]では、式(2)で記述される系に対する有効な解法として、二段階線形化近似とそれに続く反復修正計算からなる予測子-修正子型の計算方法を提案している。ここでも同様な解法を採用する。しかし、本問題の場合、式(8)が支配方程式であり加速度項が含まれているため、時間積分が必要となる。ここでは最も簡単な時間積分法の一つである Newmark の  $\beta$  法 ( $\beta=1/4$ ) を使い、これと二段階近似反復修正計算法とを組合せて以下のような解法を構成する。

なお、Newmark の  $\beta$  法では、連続する時間ステップの間の速度および変位を次のように仮定する。

$$\begin{aligned}
 \{\Delta \dot{u}\} &= \{\dot{u}(t+\Delta t)\} - \{\dot{u}(t)\} = \{\ddot{u}(t)\} \Delta t + \frac{1}{2} \{\Delta \ddot{u}\} \Delta t \\
 \{\Delta u\} &= \{u(t+\Delta t)\} - \{u(t)\} = \{\dot{u}(t)\} \Delta t + \frac{1}{2} \{\ddot{u}(t)\} \Delta t^2 + \{\Delta \ddot{u}\} \beta \Delta t^2
 \end{aligned} \tag{10}$$

1)第1近似解の計算

先ず、式(8)における増分項を時刻 $t$ におけるつり合い点で変位増分 $\{\Delta u\}_t$ に関して線形化し、座標変換行列は時刻 $t$ におけるつり合い点での値を用いて評価する([4][5]参照)。これにより次式を得る。

$$\begin{aligned} \{\Delta f\} &= [T(t)]^T [M^*] [T(t)] \{\Delta \ddot{u}\}_t \\ &+ \{[(\partial [T]^T / \partial \{u\}^T) [M^*] [T] \{\ddot{u}\} + [T]^T [M^*] (\partial [T] / \partial \{u\}^T) \{\ddot{u}\}] \\ &\quad + [T]^T [k^*] [T] + [T]^T [k^*] \{[T] (\partial \{z\} / \partial \{u\}^T) + (\partial [T] / \partial \{u\}^T) (\{u\} + \{z\})\} \\ &\quad + (\partial [T]^T / \partial \{u\}^T) \{f^*\}]_{(t)} \{\Delta u\}_t \\ &= [M(t)] \{\Delta \ddot{u}\}_t + [[M'] + [k] + [k']]_{(t)} \{\Delta u\}_t \quad (\text{とおく}) \end{aligned} \quad (11)$$

ここに

$$\begin{aligned} [M(t)] &= [T(t)]^T [M^*] [T(t)] \\ [M']_{(t)} &= [(\partial [T]^T / \partial \{u\}^T) [M^*] [T] \{\ddot{u}\} + [T]^T [M^*] (\partial [T] / \partial \{u\}^T) \{\ddot{u}\}]_{(t)} \\ [k]_{(t)} &= [T(t)]^T [k^*] [T(t)] \\ [k']_{(t)} &= [[T]^T [k^*] \{[T] (\partial \{z\} / \partial \{u\}^T) + (\partial [T] / \partial \{u\}^T) (\{u\} + \{z\})\} \\ &\quad + (\partial [T]^T / \partial \{u\}^T) \{f^*\}]_{(t)} \end{aligned} \quad (12)$$

である。次に、上式の $\{\Delta u\}_t$ に式(10)を代入して変位増分を消去し、加速度増分のみを未知数とする次式を求める。

$$\{\Delta f\} = [[M] + ([M'] + [k] + [k'])]_{(t)} \{\Delta \ddot{u}\}_t + [[M'] + [k] + [k']]_{(t)} \{ \{\dot{u}\} \Delta t + \{\ddot{u}\} \Delta t^2 / 2 \}_{(t)} \quad (13)$$

このようにして得られた要素関係式を系全体に関して重ね合わせて $\{\Delta \ddot{u}\}_t$ に関して解き、その結果を式(9)および(10)に代入し、変位および速度増分ベクトルの第1近似解 $\{\Delta u\}_t$ および $\{\Delta \dot{u}\}_t$ を求める。得られた第1近似解に対応するつり合い経路上の点を $(t + \Delta t)'$ 点、また $(t)$ 点と $(t + \Delta t)'$ 点との中点を $(t + \Delta t / 2)'$ 点とする。

2)第2近似解の計算

次に第1近似解をもとにして第2近似解 $\{\Delta \ddot{u}\}_{t_1}$ 、 $\{\Delta u\}_{t_1}$ および $\{\Delta \dot{u}\}_{t_1}$ を求める。その過程は第1近似解を求める過程とほとんど同じであるが、増分項の線形化は $I$ 点ではなく、 $I'$ 点で行う。すなわち、式(11)に対応する式は次のようになる。

$$\{\Delta f\} = [M]_{t_1} \{\Delta \ddot{u}\}_{t_1} + [[M''] + [k] + [k'']]_{t_1} \{\Delta u\}_{t_1} \quad (\text{とおく}) \quad (14)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [M'']_{t_1} &= [(\partial [T]^T / \partial \{u\}^T)_{t_1} \cdot [M^*] [T]_{t_1} \{\ddot{u}(t)\} + [T]_{t_1}^T [M^*] (\partial [T] / \partial \{u\}^T)_{t_1} \{\ddot{u}(t)\}] \\ [k'']_{t_1} &= [[T]_{t_1}^T [k^*] \{[T]_{t_1} (\partial \{z\} / \partial \{u\}^T)_{t_1} + (\partial [T] / \partial \{u\}^T)_{t_1} (\{u(t)\} + \{z(t)\})\} \\ &\quad + (\partial [T]^T / \partial \{u\}^T)_{t_1} \cdot \{f^*(t)\}] \end{aligned} \quad (15)$$

である。ただし、添え字  $i$  は I 点における評価を、 $i'$  は I' 点における線形化を表わし、また、記号  $(t)$  は時刻  $t$  における値であることを示すものである。以下、第 1 近似解を求める過程と同様にして変位増分を消去すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \{\Delta f\} = & \{[M]_i + ([M'] + [k] + [k'])\}_i \Delta t^2/4 \{\Delta \ddot{u}\}_i \\ & + \{[M'] + [k] + [k']\}_{i'} \{\dot{u}\}_i \Delta t + \{\ddot{u}\}_i \Delta t^2/2 \quad (16) \end{aligned}$$

得られる第 2 近似解に対応する点を II 点とする。

### 3) 第 3 近似以降の反復修正解の計算

第 2 近似解までが得られたところで、以後増分項の線形化は行わず、増分項も座標変換行列と同様に一つ前の反復計算で得られた近似解を用いて次のように評価する。

$$\begin{aligned} [\Delta T]_k = & [T(t + \Delta t)]_k - [T(t)] = [T]_k - [T(t)] \quad (\text{とする}) \\ [\Delta z]_k = & \{z(t + \Delta t)\}_k - \{z(t)\} = \{z\}_k - \{z(t)\} \quad (\text{とする}) \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、添え字  $k$  は第  $k$  近似を表わすものとする。これを式(8)に代入すると、式(11)、(14)と対応する第  $k+1$  近似解を求めるための、加速度増分および変位増分に関する線形式が次のように得られる。

$$\{\Delta f\} = [M]_k \{\Delta \ddot{u}\}_{k+1} + [k]_k \{\Delta u\}_{k+1} + \{g\}_k + \{h\}_k \quad (18)$$

ただし、

$$\begin{aligned} [M]_k = & [T]_k^T [M^*] [T]_k \\ [k]_k = & [T]_k^T [k^*] [T]_k \\ \{g\}_k = & \{[T(t)]^T [M^*] [\Delta T]_k + [\Delta T]_k^T [M^*] [T(t)] + [\Delta T]_k^T [M^*] [\Delta T]_k\} \{\ddot{u}(t)\} \\ \{h\}_k = & [T]_k^T \{[k^*] \{[T]_k \{\Delta z\}_k + [\Delta T]_k (\{u(t)\} + \{z(t)\})\} + [\Delta T]_k^T \{f^*(t)\} \} \end{aligned} \quad (19)$$

であり、これらの項は既知項として取り扱われる。

式(10)を代入して加速度項のみを残せば、最終的に次式を得る。

$$\{\Delta f\} - \{[k]_k \{\dot{u}\}_i \Delta t + \{\ddot{u}\}_i \Delta t^2/2\}(t) + \{g\}_k + \{h\}_k = \{[M]_k + [k]_k \Delta t^2/4\} \{\Delta \ddot{u}\}_{k+1} \quad (20)$$

式(20)の反復計算を、解が設定した収束条件を満足するまで繰り返して、次の増分段階（時間ステップ）に移行する。

## 5. 計算例

本解析法は、立体骨組構造および立体薄肉構造に対しても適用可能であるが<sup>(4)5)</sup>、本論文においては棒部材を対象とした簡単な計算例を示す。

1) ステップ荷重が作用する浅い2部材トラスの計算

浅い2部材トラスの頂点に鉛直ステップ荷重が作用するときの動的応答解析の結果を図1に示す。諸元は図中に示した通りである。縦軸はステップ荷重の大きさであり、横軸は頂点の最大応答鉛直変位である。このような簡単な問題の場合、最大応答時には系は停止し、外力のポテンシャルの減少量が歪みエネルギーの増分量に等しくなり理論解が容易に得られる。その結果と本計算結果とは良く一致している。なお、細い実線は静的な荷重-変位関係である。

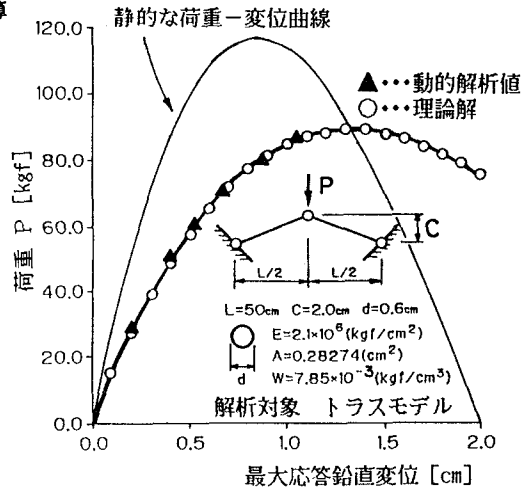


図1 動的ステップ荷重と最大鉛直変位の関係

2) 偏心軸方向荷重を受ける柱の座屈計算

ここでは文献[9]で取り上げられている軸線からδだけ偏心した荷重を受ける柱の動的座屈問題を扱う。Lindberg と Florence は偏心軸方向荷重Pが急激に作用する場合のたわみの理論解（ただし、せん断変形，回転慣性の影響を無視している）を、次のように与えている<sup>10)</sup>。

$$w(\xi, \tau) = \frac{2\delta}{\pi r} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\eta(1-\eta^2)} \left[ \frac{\cos P_n \tau - 1}{\cosh P_n \tau} \right] \sin(\eta \xi) \Delta \eta \quad (21)$$

ここで、

$$\xi = \frac{S \cdot x}{r}, \quad \tau = \frac{S^2 c t}{r}, \quad \eta = \frac{n \pi}{\ell}, \quad P_n = \eta |1 - \eta^2|^{1/2}, \quad \Delta \eta = \frac{2 \pi}{\ell}$$

$$r^2 = \frac{I}{A}, \quad S^2 = \frac{P}{EA}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad \ell = \frac{S \cdot L}{r}, \quad w = \frac{y}{r}$$

E, A, I, ρ, L, P, t, および x はそれぞれヤング率，断面積，断面二次モーメント，密度，柱の長さ，荷重，時間，および軸方向の座標である。なお、式(21)における【】の中は、η < 1 のとき: cosh (P<sub>n</sub>τ) - 1, η > 1 のとき: cos (P<sub>n</sub>τ) - 1, である。式(21)で示された変位 w は無次元化された変位であり、したがって、これに r を乗じたものが実変位となる。

提案した解析方法の妥当性を検証するために、Lindberg らが与えた理論解との比較を行なった。解析対象は図2に示す通りである。解析結果として、時刻 t=0.004, 0.006, 0.008,

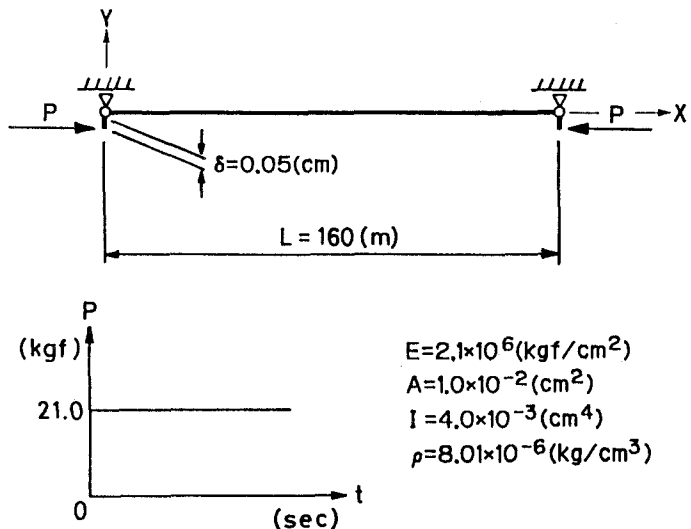


図2 偏心軸方向荷重を受ける柱の解析条件



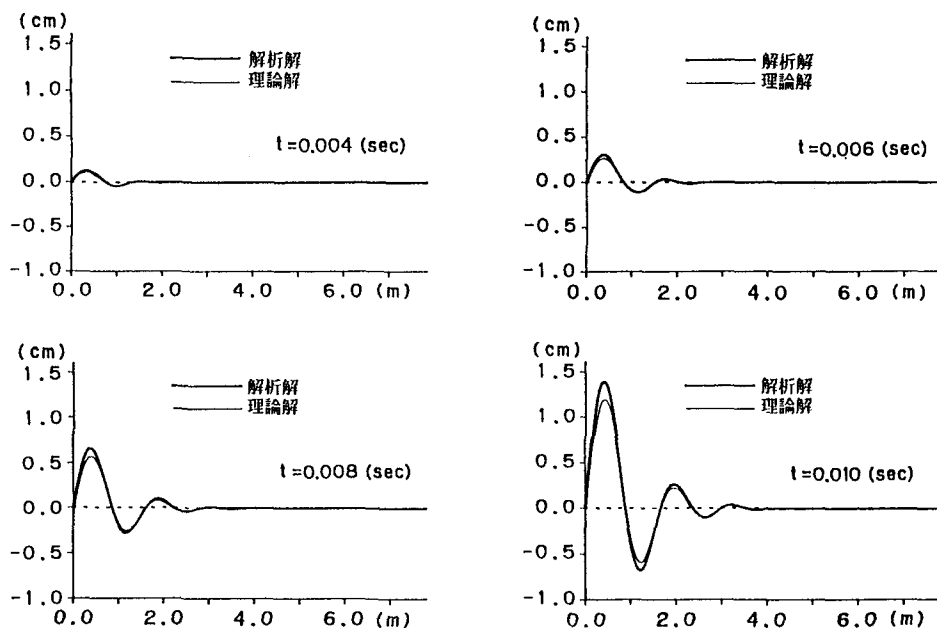


図3 Y軸方向の変位分布の比較

0.010[sec]におけるY軸方向の変位の比較を図3に示す。なお、図3においてY軸方向の変位を200倍に拡大している。本解析に用いた時間刻み幅 $\Delta t$ は0.001[sec]であり、式(21)の計算に用いた $n$ の最大値は9999である。本解析方法は波の腹の部分でやや大きな値を与えている他は理論解とよく一致している。

### 3) 投げ出されたはり部材の計算

両端自由のはりの一端にモーメントと力が作用する場合の時刻 $t=0.0050$ [sec]までの解析結果を図4に示す。ただし、荷重は0.0025[sec]までステップ荷重で作用し、その後は作用しない。はり部材の諸元等は図中に示した通りである。なお、図4において変形状の拡大は行っていない。また、収束基準は相対不釣合いカノルムで0.001、変位増分ノルムおよび加速度増分ノルムの漸近度で0.000001を採用した。

### 6. おわりに

本論文では、著者らが提案した座標表示に基づく静的な非線形解析手法を基本とした、幾何学的非線形動的解析の支配方程式およびその計算方法について述べ、具体的な数値計算例を示した。支配方程式

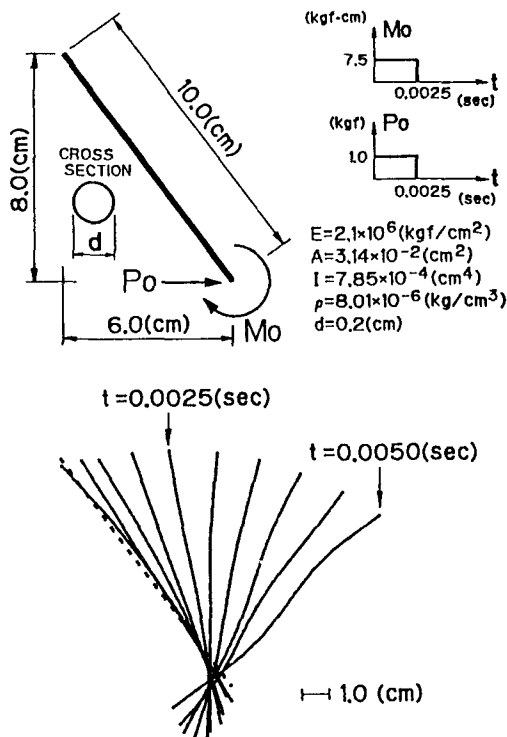


図4 投げ出されたはりの変形状の推移

としては減衰を考慮した一般的な形を提示したが、具体的な計算方法は減衰を無視できる場合を対象に簡略化した方程式に対するものを示した。構造全体としての大きな剛体回転と大変位とを生じる問題として具体的に取り上げたものは、文献[1]において扱われている問題に類似の問題である。同文献には問題の質量などの諸元に不明の部分があるため、計算結果の比較を行っておらず、また、要素分割数、時間積分幅、収束基準の設定などについて詳細な検討を行っていないが、この種の研究がわが国においては現在までのところあまり行われていないことを考えると、本解析方法によって大変位解析が可能であることを実証しただけでも意義があることと考える。

本研究の一部に文部省科学研究費補助金の援助を受けたこと、および本論文中の計算は武蔵工業大学情報処理センターおよび東京大学大型計算機センターを利用して行ったことを付記する。

#### ◆ 参考文献 ◆

- 1) 例えば Simo, J. C. and Vu-quoc, L : A Novel Approach to the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions, Electronics Research Laboratory Memorandum No.UCB/ERL M85/31,UC Berkeley, 1985.
- 2) 例えば Bathe, K. J., Ramm, E. and Wilson, E.L. : Finite element formulations for large deformation dynamic analysis, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.9, pp.353-386, 1975.
- 3) Simo, J. C. and Vu-quoc, L : On the dynamics in space of rods undergoing large motions - A geometrically exact approach, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.66, pp.125-161, 1988.
- 4) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法，土木学会論文報告集，第288号，pp.41～55，1979年8月．
- 5) 吉田 裕・増田陳紀・森本 剛・広沢規行：立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法，土木学会論文報告集，第300号，pp.21～31，1980年8月．
- 6) 増田陳紀・西脇威夫・皆川 勝・山本英男：骨組構造の幾何学的非線形動的応答解析のための一方法，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第10巻，pp.431～436，昭和61年7月．
- 7) Masuda,N., Nishiwaki,T., and Minagawa,M. : Nonlinear dynamic analysis of frame structures, Computers & Structures, Vol.27, No.1, pp.103-110, 1987.
- 8) 増田陳紀・西脇威夫・皆川勝・加藤修且：Flexible Beam の幾何学的非線形動的応答解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第12巻，pp.413-418，昭和63年7月．
- 9) 吉田 裕，岡本誠一郎：動的非線形構造解析に関する研究の最近の動向，日本機械学会RC89研究分科会第5小委員会委員会資料，昭和63年6月23日．
- 10) H.E. Lindberg and A.L. Florence : Dynamic Pulse Buckling, MARTINUS NIJHOFF PUBLISHERS, pp.11-33, 1987.

(1988年10月12日受付)