

ひずみ軟化材および硬化材に対する弾塑性構成則と弾粘塑性構成則の適用

指導教員 皆川 勝
 学生氏名 太田 厚

1. はじめに

我が国の構造物は地震による被害をしばしば受ける。先の兵庫県南部地震を契機に、構造物の耐震補強などが進められてきている。今後は、構造物の設計あるいは維持管理上、弾性域のみではなく弾性域を超える応力あるいはひずみを受ける構造物の破壊にいたる挙動を把握することが重要であると考えられる。特に、鉄筋コンクリート構造物の弾塑性挙動を定式化する場合、応力空間での定式化では、ひずみ軟化と除荷、完全塑性載荷と中立載荷を明白に区別することが出来ない。

本研究では、軟化挙動を示す土木材料の弾塑性挙動を、ひずみ空間において定式化し精度良く推定することを試みる。また、地震時などにおけるひずみ速度を考慮することができる(弾粘塑性)を導入した平面有限要素解析システムにより、応力 ひずみ関係を考察してみる。

2. 弾塑性構成則¹⁾

等方硬化と移動硬化の二つの硬化則を組み合わせると、混合硬化則を得る。

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) = F(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}^p) - \kappa^2 (\varepsilon_p) = 0$$

この場合、載荷曲面は右図のようにあらゆる方向に移動し、また拡大する。軟化材料に対して工学的に応用するには、この混合硬化モデルの概念が有効である。

ひずみ空間における載荷関数をこの場合、次のように定義する。

$$F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \alpha_{ij}, \kappa) = 0 \quad (1)$$

ε_{ij} : 全ひずみ, ε_{ij}^p : 塑性ひずみ, α : 載荷曲面の中心座標, κ : 硬化パラメーター
 式(1)の載荷関数の適合条件式は次のように表せる。

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (2)$$

$d\alpha_{ij} = c(1-M)d\varepsilon_{ij}^p$, $d\kappa = b_{ij}d\varepsilon_{ij}^p$ より式(2)は次のように表せる。

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} c(1-M) + \frac{\partial F}{\partial \kappa} b_{ij} \right) d\varepsilon_{ij}^p = 0 \quad (3)$$

ここで、 $d\alpha_{ij} = c(1-M)d\varepsilon_{ij}^p$ は、Pragerの硬化則といい、 $d\alpha_{ij}$ が $d\varepsilon_{ij}^p$ と線形関係にあると仮定するものである。 c は与えられた材料に対して固有の加工硬化定数であり、 M は硬化の全体量に対する等方硬化の割合を定義するものである。混合硬化のパラメータ範囲を $-1 < M \leq 1$ とし、移動(移動硬化)する間に降伏曲面は広がる(等方硬化)か、または縮む(等方軟化; M が負の値のとき)かのいずれかになる。 $M = 0$ なら完全移動硬化、 $M = 1$ なら完全等方硬化を表現することができる。

式(3)に G を塑性ポテンシャルとして流れ則を適用させると次のようになり、塑性ひずみ増分を求めることができる。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl}}{-\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ab}^p} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ab}} - \frac{\partial F}{\partial \alpha_{cd}} c(1-M) \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{cd}} - \frac{\partial F}{\partial \kappa} b_{mn} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{mn}}} \quad (4)$$

G は、塑性ポテンシャル関数 $G(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \alpha_{ij}, \kappa)$ とすると、 $d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}}$ となり、 $d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)$ より、塑性ひずみ増分は次のようになる。

$$d\varepsilon_{ij}^p = [C_{ijkl}]^{-1} d\sigma_{kl} = D_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad \text{よって、} \quad d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda D_{ijkl} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad \text{となる。}$$

3. ひずみ空間におけるDrucker-Pragerの載荷関数

Drucker-Pragerの載荷関数は応力不変量によって次式のように表せる。

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0$$

ここで、 I_1 、 J_2 は、それぞれ、応力テンソルの第一不変量(平均垂直応力)、偏差応力テンソルの第二項(八面体せん断応力)、 α 、 k は、共に正の材料定数(k は硬化パラメーターで塑性ひずみの関数)である。

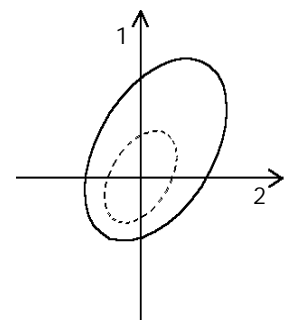


Fig.1 混合硬化

応力を生じた物体内の一点で主応力方向のおのおのに対し等角をなす平面を八面体平面といい、この平面に対する垂直応力 σ_{oct} (八面体垂直応力) は平均垂直応力に等しい。

また、この平面に作用するせん断応力 τ_{oct} (八面体せん断応力) は次式のように表わせる。

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_1 = \sigma_m, \quad \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$

応力空間において定義されている載荷関数 f を上記の式によってひずみ空間における載荷関数 F へと変換されたものを下記に表す。

$$F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) = 3\lambda\alpha(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) + \sqrt{2\mu^2(e_{ij} - e_{ij}^p)(e_{ij} - e_{ij}^p)} - \kappa = 0$$

λ : 体積弾性係数, μ : せん断弾性係数

4. 弾粘塑性構成則を導入した有限要素解析システム²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾

これまで時間非依存の弾塑性を考えてきたが、時間依存性(粘塑性: viscoplasticity)を導入する場合には、ひずみ速度を考慮した弾粘塑性として考えなければならない。特に、rate-tangent modulus法では、ひずみ速度効果を取り込める点、繰り返し計算が不要な点が有効とされている。また、粘塑性を仮定する時は基本的に負荷・除荷の判定は不要であり、この点が弾塑性に比べて数値計算上扱いやすい。

ここで、実際にFig.2のようなモデルにおける要素1, 2の応力、ひずみ変化をLadepsプログラムを使用し計算してみた。材料定数は、次に示す通りである。

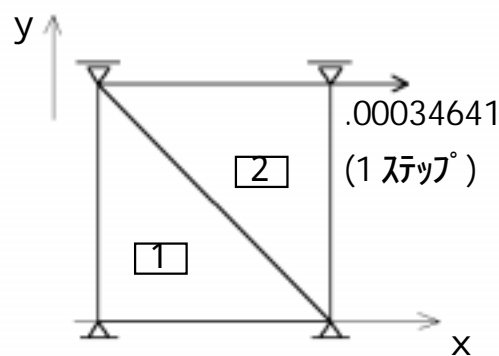


Fig.2 モデル図

ヤング率	ポアソン比	初期降伏応力	c 値	n 値	板厚	m/s	基準ひずみ速度
2.04*10 ⁴	0.333	40.8	0.002	0.1	1	0.005	0.0002

c 値、n 値は応力 - 塑性ひずみ曲線に、実験式 $\bar{\sigma}_x = c(\alpha + \varepsilon_x^p)^n$ をあてはめた時の値。

Fig.3は、せん断ひずみ(γ_{xy}), 相当塑性ひずみ($\bar{\varepsilon}^p$)を表しており、52ステップ目にして荷重反転されていることが分かる。

Fig.4は、せん断ひずみ(γ_{xy}) - せん断応力(τ_{xy})の関係を表している。また、Fig.5における荷重反転点(Q)は、Fig.4における荷重反転点(Q)と対応しており、二つのグラフは、それぞれ荷重反転後の弾性挙動を的確に表現していることがわかる。

5. まとめ

本研究では、応力空間ではなく、ひずみ空間で定式化した降伏関数を利用し、混合硬化との組み合わせを最終的な目標としてきたが、結果的には、弾粘塑性を考慮したLadepsプログラムを起動するに至った。

参考文献

- 1) 皆川勝：構造用鋼材の弾塑性履歴挙動のモデル化とその構造部材への応用、1988年論文
- 2) 山田嘉昭、横内康人：有限要素法による弾塑性解析プログラミング、培風館
- 3) 山田嘉昭：塑性・粘弾性、培風館
- 4) 色部誠、河角誠、安達洋：コンクリート構造物の塑性解析、丸善株式会社
- 5) 黒田充紀：大ひずみ弾塑性解析：黒田充紀、1997年論文

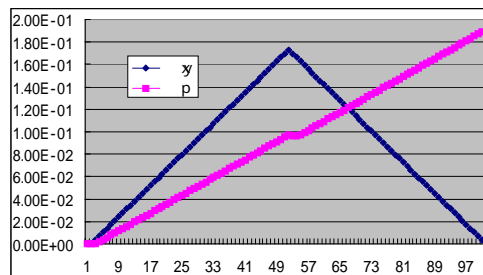


Fig.3 せん断ひずみ(γ_{xy}) - せん断応力(τ_{xy})

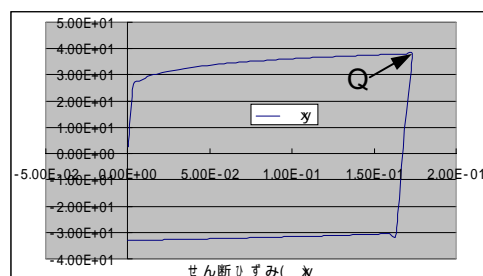


Fig.4 せん断ひずみ(γ_{xy}) - せん断応力(τ_{xy})

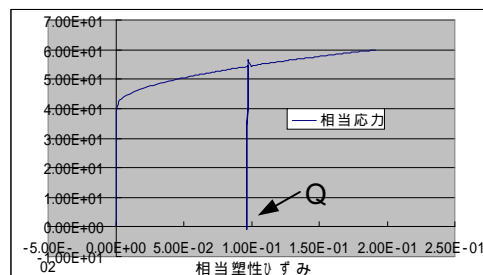


Fig.5 相当塑性ひずみ($\bar{\varepsilon}^p$) - 相当応力($\bar{\sigma}$)