Misesの降伏関数を用いたひずみ軟化材料に対する構成則

指導教員　皆川　勝
学生氏名　杉山　貴昭

1.はじめに

先の兵庫県南部地震を契機に、構造物の耐震補強などが進められてきている。今後は、構造物の設計あるいは維持管理上、弾性域のみではなく弾性域を超える応力、あるいはひずみを受ける構造物の破壊にいたる挙動を把握することが重要であると考えられる。本研究では、Kiousis[1)]や水野[2)]らによって提案された手法により、形状が単純であるVon　Misesの降伏関数を用いてひずみ空間において定式化し、これを用いた応力-ひずみ関係式を導き、ひずみ軟化材料の弾塑性挙動を推定しようとするものである。

2.応力-ひずみ関係式

本研究では、応力空間における定式化では軟化と除荷、完全塑性状態と中立載荷状態の判定ができないこと、また仕事量によって判定しようとすると硬化と除荷の区別がつかないという問題があることから、ひずみ空間において定式化を行った。

降伏関数を $F(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ij}^{p},\kappa)$ =0と定義した時、適合条件式は以下のようになる、

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} d\varepsilon_{ij}^{p} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \qquad (1)$$

ここで、 ε_{ij} は全ひずみ、 ε_{ij}^{p} は塑性ひずみ、κはKiousisによる硬化パラメータ[1)]である。式(1)に $d\kappa = b_{ij} d\varepsilon_{ij}^{p}$ を代入し、 $G = G(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ij}^{p})$ を塑性ポテンシャルとして式(2)の流れ則を適用し、 $d\lambda$ について解くと式(3)が求まる。

$$\text{流れ側：}\ d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad (2)$$

$$d\lambda = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}}{-\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ab}^{p}} \dfrac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ab}} - \dfrac{\partial F}{\partial \kappa} b_{cd} \dfrac{\partial G}{\partial \varepsilon_{cd}}} \qquad (3)$$

式(3)を式(2)に代入し、さらに式(4)の増分形式に代入してひずみ増分-応力増分関係式(5)を得る。

$$\{\dot{\sigma}\} = [C]\{\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^{p}\} \qquad (4)$$

$$\{\dot{\sigma}\} = \left[C^{e-p}\right]\{\dot{\varepsilon}\} \qquad (5)$$

$$\left[C^{e-p}\right] = [C] - \frac{[C]\left\{\dfrac{\partial G}{\partial \varepsilon}\right\}\left\{\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right\}^{T}}{\left\{\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right\}^{T}\left\{\dfrac{\partial G}{\partial \varepsilon}\right\} - \dfrac{\partial F}{\partial \kappa}\{b\}^{T}\left\{\dfrac{\partial G}{\partial \varepsilon}\right\}} \qquad (6)$$

3.Misesの載荷関数の適用

Von　Misesの降伏関数を、ひずみを状態量として定義すると次式となる、

$$F\left(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ij}^{p},\kappa\right) = 2\mu^{2}\left(e_{ij} - e_{ij}^{p}\right)\left(e_{ij} - e_{ij}^{p}\right) - \kappa - k^{2} \qquad (7)$$

ここで、 μ はせん弾性係数を表している。この、式(7)を式(6)に適用し数値計算を行う。この時、応力増分とひずみ増分はそれぞれ6成分にて計算を行う。

また、計算過程において以下の式(8)を採用した。

$$\{b\}^{T}\left\{\frac{\partial G}{\partial \varepsilon}\right\} = He^{Ax}\left(1 - \frac{x}{P}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \varepsilon}\frac{\partial G}{\partial \varepsilon}\right)^{1/2}$$

$$x = x\left(e_{ij}^{p}\right) = \int_{o}^{t}\left(\frac{1}{2}\dot{e}_{ij}^{p}\dot{e}_{ij}^{p}\right)^{1/2} dt \qquad (8)$$

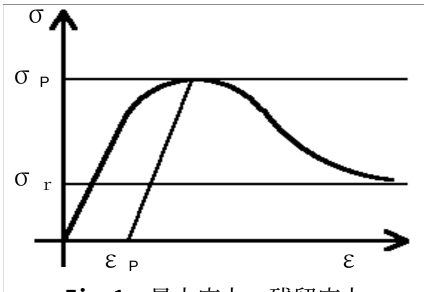

Fig.1　最大応力、残留応力

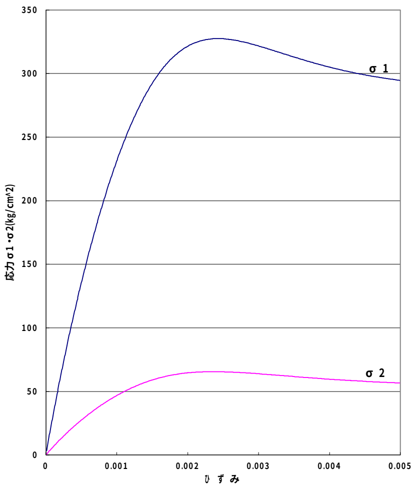

Fig.2　横方向のひずみを拘束

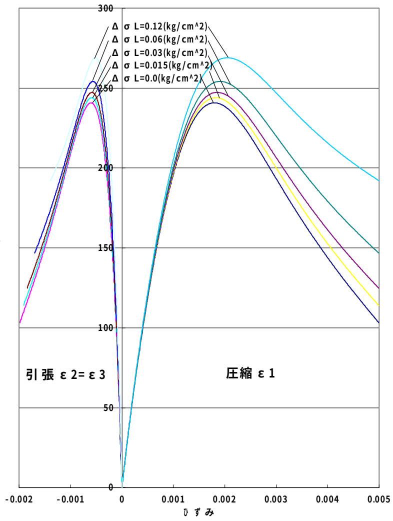

Fig.3　側圧漸増型の一例

ここで、H・AはFig.1に表す最大応力値σ_pと残留応力値σ_rから求まるパラメータであり、Pは残留ひずみε_pから求まるパラメータである。

4.数値計算

4.1.横方向ひずみ拘束載荷

まず、軸方向のみのひずみ増分を与え、計算を行った。この時の応力-ひずみ関係をFig.2に示す。

応力は、横ひずみを拘束したことから、軸方向、横方向それぞれに発生した。側圧の大きさは軸方向のピーク応力の10%以上になっている。

4.2.任意のひずみ・応力増分制御載荷

次に、拘束圧を与えた条件下で、軸方向にひずみ増分を載荷する状態を考える。例えば、未知の応力をσ_A、既知の応力をσ_B、未知のひずみをε_B、既知のひずみをε_Aとすると式(5)は以下のように表す事が出来る。

$$\begin{Bmatrix}\sigma_A\\ \sigma_B\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_A & C_B\\ C_C & C_D\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_A\\ \varepsilon_B\end{Bmatrix} \qquad (9)$$

上式を展開して以下の式を得る。

$$\begin{aligned}\sigma_A&=C_A\cdot\varepsilon_A+C_B\cdot\varepsilon_B\\ \sigma_B&=C_C\cdot\varepsilon_A+C_D\cdot\varepsilon_B\end{aligned} \qquad (10)$$

式(10)から、未知のσ_A及びε_Bを求める。

以上の手順で数値計算を行い、その結果をFig.3からFig.6に示す。ここで、Fig.3及びFig.4は横方向の応力を漸次増加させた時の結果であり、Fig.5及びFig.6は横方向の応力を一定に与えた時の結果である。

4.3.考察

Fig.3やFig.5に示すように側圧を大きくしていくにしたがって、軸方向の強度が上がっていく結果が得られた。また、側圧を一定に与え、その側圧がある程度大きくなった時、Fig.6に示すように、次第に横ひずみが減少し圧縮側に転ずるとともに、ピーク値が上昇し、しまいには軟化挙動を示さなくなった。

側圧を漸次増加させる場合、Fig.4に示すようにその応力増分を極端に大きく与えると3方向全てのひずみが圧縮となる結果が得られた。しかし、一定側圧載荷の時のような、軟化挙動の消失現象は現れなかった。

5.まとめ

本研究では、ひずみ空間において定式化された降伏関数に対して流れ則を適用し増分形の応力-ひずみ関係式を導き、数値シミュレーションを行った。得られた結果は、軟化挙動を示し、側圧を変化させた時の、挙動の変化も、実現象から得られる結果と一致している事を示した。

参考文献

1)Kiousis.P:Strain space approach for softening plasticity, Journal of Engineering Mechanics,Vol.113 No.2,pp.210-221,1987

2)水野英二、畑中重光：塑性理論によるコンクリートの載荷径路依存型圧縮軟化特性のモデル化,コンクリート工学論文集,Vol.3,No.2,pp.1-13,1992

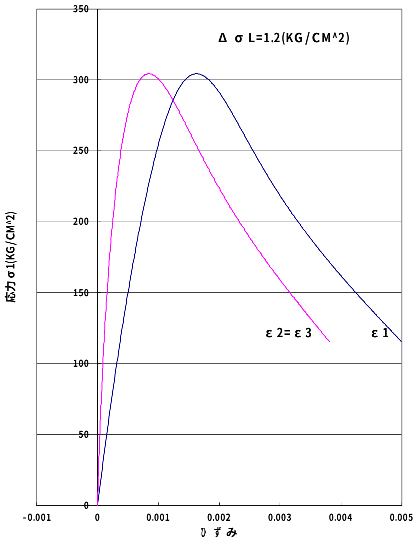

Fig.4　側圧漸増型応力過大型

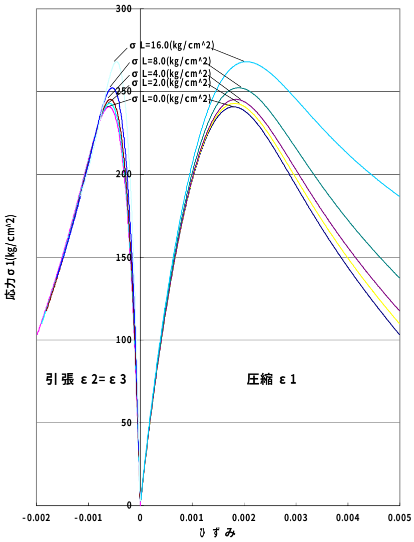

Fig.5　側圧一定型の一例

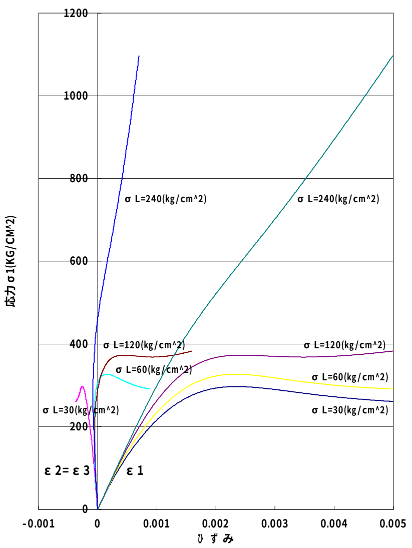

Fig.6　側圧一定応力過大型