ARGOS seminar on intersections of modular correspondences, Astérisque **312** (2007) の紹介 (3)

服部 新
北大理学研究院 3-601
shin-h@math.sci.hokudai.ac.jp

平成 19 年 11 月 9 日

※ B. H. Gross, K. Keating, *On the intersection of modular correspondences*, Invent. Math **112** (1993), 225-245 の解説本

1 今回証明すること

V.G.Drinfel'd: *Elliptic modules* (Russian) Mat. Sbornik **94(136)** (1974), 594–627, の復習.

(i) K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大とすると, formal $\mathcal{O}_K$-module の universal ring は $\mathcal{O}_K$ 上の無限変数の多項式環と同型.

(ii) formal $\mathcal{O}_K$-module の deformation theory.

(R, m, k) を Artin 局所環, $I \subseteq R$: $mI = 0$ なるイデアル,

F_0 を k 上の formal $\mathcal{O}_K$-module で height=$h < \infty$ なるもの,

$\bar{F}, \bar{G}$ を F_0 の formal $\mathcal{O}_K$-module としての R/I への lift, とするとき,

$\bar{F}$ や, formal $\mathcal{O}_K$-module の準同型 $\bar{F} \to \bar{G}$ が R へ lift するかどうかは, ある種のコホモロジー群 $\mathrm{H}^2(F_0, I)$ で判定できる.

(iii) (F_0 の universal deformation ring) $\simeq \hat{\mathcal{O}}_{K^{\mathrm{nr}}}[[t_1, \ldots, t_{h-1}]]$

2 Formal group の用語集

参考文献:

[F] A. Fröhlich: Formal groups, LNM **74**
[H] M. Hazewinkel: Formal groups and applications, Pure and Applied Mathematics **78**, Academic Press
[岩澤] 岩澤健吉: 局所類体論, 岩波
[SGA3] SGA3 の tome 1, Exp. VIIB, LNM **151**

2.1 formal group

R を可換環とする.

$F(X,Y) \in R[[X,Y]]$ が (1-dimensional, commutative, formally smooth) formal group であるとは, 次の 3 条件を満たすこと.

- $F(X,0)=X$, $F(0,Y)=Y$. とくに, $F(X,Y)=X+Y+(\text{higher order})$.
- $F(X,F(Y,Z))=F(F(X,Y),Z)$. (群の結合法則)
- $F(X,Y)=F(Y,X)$. (可換性)

注 2.1 このとき, $F(X,i(X))=F(i(X),X)=X$ を満たす $i(X)=-X+(\text{higher order}) \in R[[X]]$ の存在が示せる (群の逆元).

注 2.2 (A,m_A) を R 上の完備局所環とすると,

$$x,y \in m_A \Rightarrow x +_F y := F(x,y)$$

で m_A に 0 を単位元とする群構造が入る. この群を $F(m_A)$ と書いたりする.

例 2.3
- $\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a},R}$: $F(X,Y)=X+Y$, $i(X)=-X$
- $\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{m},R}$: $F(X,Y)=X+Y+XY=(1+X)(1+Y)-1$, $i(X)=\frac{1}{1+X}-1$
- E を R 上の elliptic curve とするとき, 原点での formal completion $\hat{E}_R$

$F(X,Y)$,$G(X,Y)$ を R 上の formal group とするとき, formal group の準同型 $f:F\to G$ とは, $f(X)\in R[[X]]^0$ (定数項が 0 であるような巾級数全体) で

$$f(F(X,Y))=G(f(X),f(Y))$$

を満たすもののこと.

注 2.4 これは (A,m_A): R 上の完備局所環, に対しては, 群準同型 $F(m_A)\to G(m_A)$ を定める.

例 2.5
- F: R 上の formal group, に対し,

  $$[1](X):=X, [m+1](X):=F(X,[m](X))$$

  で $[m](X)\in \mathrm{End}_R(F)$ を定める (m 倍写像).
- G: $\mathbb{F}_q$ 上の formal group, に対し

  $$F_q(X):=X^q$$

  は $F_q \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(G)$ を定める (q 乗 Frobenius 写像).

一般に, $f(X)\in R[[X]]^0$ が $f'(0)\in R^\times$ を満たせば, $g(X)\in R[[X]]^0$ で $f(g(X))=g(f(X))=X$ を満たすものが存在する. この g を f^{-1} と書く. f が formal group の hom $f:F\to G$ のときは,f^{-1} も formal group の hom $f^{-1}:G\to F$ を定める (f の逆写像).

$f:F\to G$ で $f'(0)=1$ を満たすものを strict isomorphism と言うことがある.

命題 2.6 ([F], p.67, Theorem 2) *R 上の formal group F が $\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a},R}$ と同型 $\Leftrightarrow$ 任意の素数 p に対し $[p](X) \in pR[[X]]$.*

命題 2.7 ([F], p.97, Corollary 1–3) *R が整域で, $\mathrm{Frac}(R)$ が標数 0 の体であるようなものとする. F, G を R 上の formal group とするとき,*

$$\mathrm{Hom}_R(F,G) \xrightarrow{\mathrm{Lie}} R$$

は単射. とくに $\mathrm{End}_R(F)$ は可換環.

命題 2.8 ([F], p. 106) *K を標数 0 の体, $R \subseteq K$ を整閉な部分環, F, G を R 上の formal group, $f : F \to G$ を, $\bar{K}$ における R の整閉包上 defined な hom とすると, f は $K(f'(0))$ における R の整閉包上 defined.*

2.2 formal $\mathcal{O}_K$-module

一般に, O: 可換環, R: O-algebra, $i : O \to R$: 構造射, とするとき,

定義 2.9 formal O-module とは次のようなペア (H, γ_H) のこと.

- $H = H(X,Y) \in R[[X,Y]]$: R 上の formal group
- $\gamma_H : O \to \mathrm{End}_R(H)$: ring hom で, 次の図式を可換にするもの (H への O-作用).

$$\begin{array}{ccc} O & \xrightarrow{\gamma_H} & \mathrm{End}_R(H) \\ & \searrow^{i} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Lie}} \\ & & R \end{array}$$

  但し, $\mathrm{Lie} : \mathrm{End}_R(H) \to R$ は $f \mapsto f'(0)$ で定まる射.

$a \in O$ に対し, $\gamma_H(a)$ のことを $[a]_H$ と書いたりする.

注 2.10 (A, m_A): R 上の完備局所環, とすると,

$$x \in H(m_A) \Rightarrow a.x := [a]_H(x)$$

により, $H(m_A)$ は O-加群と見なせる.

F, G: R 上の formal O-module, のとき, $f : F \to G$ が formal O-module としての準同型であるとは, f が formal group の準同型でありかつ O-作用と両立すること. つまり, 任意の $a \in O$ に対し次が成り立つこととする.

$$f([a]_F(X)) = [a]_G(f(X))$$

例 2.11

- $\hat{\mathbb{G}}_{\mathrm{a},R}$ への O-作用を

$$[a](X) := aX$$

  で定めると, これは formal O-module になる. これを additive O-module と呼ぶ.

- R が p-進完備な環であれば, R 上の formal group には自然に formal $\mathbb{Z}_p$-module の構造が入る ($[p^n](X)$ が $n \to \infty$ で 0 に収束するから).

$K/\mathbb{Q}_p$: 有限次拡大, $\pi = \pi_K$: 素元, $\mathcal{O}_K/\pi \simeq \mathbb{F}_q$, $q = p^f$, とおいて, formal $\mathcal{O}_K$-module を主に考えることにする.

F, G が R 上の formal $\mathcal{O}_K$-module のとき, $\mathrm{Hom}_R(F, G)$ で formal $\mathcal{O}_K$-module としての hom 全体を表すことにする.

2.3 height

k を標数 p の体, F を k 上の formal group とすると, ある $\alpha(X) \in k[[X]]$, $\alpha'(0) \neq 0$, が存在して,

$$[p]_F(X) = \alpha(X^{p^h})$$

を満たすことが示せる ($h = \infty$ でもよい). この h を F の height という.

同様に, H を k 上の formal $\mathcal{O}_K$-module とすると, ある $\beta(X) \in k[[X]]$, $\beta'(0) \neq 0$ が存在して

$$[\pi]_H(X) = \beta(X^{q^h})$$

を満たすことも示せる. この h を H の (formal $\mathcal{O}_K$-module としての) height と呼ぶ. 定義から,

$$(H \text{ の formal } \mathcal{O}_K\text{-module としての height}) = [K : \mathbb{Q}_p] \times (H \text{ の formal group としての height}).$$

2.4 isogeny

$f : F \to G$: R 上の formal group の準同型, が isogeny であるとは, 対応する affine 環の射 $R[[X]] \to R[[X]]$ が finite locally free であること.

注 2.12 $R = (R, m, k)$ が完備 Noether 局所環の場合は, これは $f_k : F \otimes k \to G \otimes k$ が nonzero であることと同値 (flatness の local criterion). さらに, $F \otimes k$, $G \otimes k$ がともに finite height のときは, この条件は $\alpha \neq 0$ とも同値なことをセミナー中に示す.

3 Lubin-Tate theory

参考文献:
[岩澤] 岩澤健吉: 局所類体論, 岩波

$k = \bar{\mathbb{F}}_p$, $M = K^{\mathrm{nr}}$, $C := \hat{\bar{K}}$ とおく.
K の素元 π に対し,

$$\mathcal{F}_{\pi,h} := \{ f(X) \in \mathcal{O}_K[[X]] \mid \begin{array}{l} f(X) = \pi X + (\text{higher order}) \\ f(X) \equiv X^{q^h} \bmod \pi \end{array} \}$$

と定義する. また, $\mathcal{F}_\pi = \mathcal{F}_{\pi,1}$ おく.

命題 3.1 ([岩澤], 第 7 章補題 1–3 の証明) *(i)* $f \in \mathcal{F}_{\pi,h}$ に対し, $\mathcal{O}_K$ 上の *formal* $\mathcal{O}_K$*-module* F_f で, $[\pi]_{F_f}(X) = f(X)$ を満たすものが *unique* に存在.

(ii) $f, g \in \mathcal{F}_{\pi,h}$ なら, F_f と F_g とは $\mathcal{O}_K$ 上の *formal* $\mathcal{O}_K$ として同型.

この F_f を, f に対応する **Lubin-Tate formal group** と言うことにする. $f \in \mathcal{F}_\pi$ のときは, F_f のことを π **に対応する Lubin-Tate formal group** と言う.

命題 3.2 ([岩澤], 第 7 章補題 4–5) π' を K の別の素元とし, $f \in \mathcal{F}_\pi$, $f' \in \mathcal{F}_{\pi'}$ とするとき, F_f と $F_{f'}$ とは $\mathcal{O}_M$ 上の *formal* $\mathcal{O}_K$*-module* として同型.

以下, $f \in \mathcal{F}_\pi$ を fix して, $\mathcal{O}_M$ 上の formal $\mathcal{O}_K$-module F_f を考える. これに対し,

$$\begin{aligned}\Lambda &:= \cup_m F_f(\mathcal{O}_C)[\pi^m]\\ L_{\pi,m} &:= K(F_f(\mathcal{O}_C)[\pi^m])\\ L_\pi &:= \cup_m L_{\pi,m}\\ G_\pi &:= \mathrm{Gal}(L_\pi/K)\end{aligned}$$

とおく. $\mathcal{F}_\pi$ の定義から, $F_f(\mathcal{O}_C)[\pi^m] = \{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} \mid [\pi^m](x) = 0\}$ は位数 q^m の有限加群で, $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ が作用している. したがって $L_{\pi,m}$ は K 上 (完全分岐な) 有限次 Galois 拡大.

命題 3.3 ([岩澤], 第 7 章 §7.3)

- $\mathcal{O}_K$-加群として $\Lambda \simeq K/\mathcal{O}_K$, $F_f(\mathcal{O}_C)[\pi^m] \simeq \mathcal{O}_K/\pi^m$.
- 任意の $\tau \in G_\pi$ に対し, 次を満たす $u_\tau \in \mathcal{O}_K^\times$ が *unique* に存在.

$$\text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対し, } \tau(\lambda) = [u_\tau](\lambda).$$

- 対応 $\tau \mapsto u_\tau$ は, 同型 $G_\pi \simeq \mathcal{O}_K^\times$ を定める. さらに, この対応は $\mathrm{Gal}(L_\pi/L_{\pi,m})$ を $1 + \pi^m\mathcal{O}_K$ の上に移す.
- $L_\pi K^{\mathrm{nr}}$ は K の最大 *Abel* 拡大であり, $\rho_K : K^\times \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ を局所類体論の *reciprocity map (*ただし, π を *(arithmetic) Frobenius* に送るように *normalize* する*)* とすると, $\lambda \in \Lambda$ への *action* は次を満たす.

$$a \in \mathcal{O}_K^\times \text{ なら, } \rho_K(a)(\lambda) = [a^{-1}](\lambda).$$
$$\rho_K(\pi) \text{ は } L_\pi \text{ には } \textit{trivial} \text{ に, } K^{\mathrm{nr}} \text{ には } \textit{Frobenius} \text{ で作用.}$$