

有限平坦群スキームの分類とガロア表現の枠付き変形 I

服部 新

北海道大学理学研究院

shin-h@math.sci.hokudai.ac.jp

平成 20 年 2 月 28 日

M. Kisin: *Moduli of finite flat group schemes, and modularity*, preprint, の前半 (Section 1, 2) の紹介

1 Introduction

1.1 背景

F を総実代数体, G_F をその絶対 Galois 群, $p \geq 3$ を素数とする. E を \mathbb{Q}_p の有限次拡大, \mathcal{O}_E と \mathbb{F} をその整数環と剰余体とし, G_F の p 進表現 $\rho: G_F \rightarrow GL_2(E)$ を考える. ρ が modular であるとは, F 上の Hilbert cusp eigenform f が存在して, f に伴う G_F の p 進表現 $\rho_f: G_F \rightarrow GL_2(\mathbb{Q}_p)$ が ρ と同型になることだった. また, ρ の mod p 表現 $\bar{\rho}: G_F \rightarrow GL_2(\mathbb{F})$ が modular であるとは, $\bar{\rho}$ がある f に伴う G_F の mod p 表現 $\bar{\rho}_f: G_F \rightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$ と同型になることを言う (このとき ρ は residually modular であると言われる). $F = \mathbb{Q}$ に対し, $G_{\mathbb{Q}}$ の p 進表現 ρ が与えられたとき, その modularity を示すための Taylor-Wiles ([23]) によるアイデアは, modular な mod p 表現の「性質の良い」持ち上げが必ず modular になることを示す, というものだった (この種の主張は modular lifting と呼ばれる). 彼らはこれを, modular な $\bar{\rho}$ の変形を統制する (ある) 普遍変形環 R と, 保型形式を統制する (ある) Hecke 環 T との同型を示す, という形— $R = T$ 定理と呼ばれる—に定式化して証明した. 一方で residual modularity を示すことは「比較的やさしい」問題であった (ただし「やさしい」とは言え, 証明には保型表現の base change や $R = T$ 型定理が必要になる).

Taylor-Wiles が扱った持ち上げの「性質の良さ」の中でも, 最も繊細な扱いを要するものが, 「 p で Barsotti-Tate」と言う条件だった. 一般に局所体 K に対し p 進 G_K 表現 V が Barsotti-Tate とは, \mathcal{O}_K 上の p -divisible 群 Γ が存在して, Γ の Tate 加群 $V_p(\Gamma)$ が G_K 表現として V と同型となることである. 彼らの結果を受けて, Conrad-Diamond-Taylor ([9]) が $F = \mathbb{Q}$ かつ $\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ が分岐指数 $p-1$ 未満の拡大で Barsotti-Tate になる場合に, Breuil-Conrad-Diamond-Taylor が $F = \mathbb{Q}$, $p = 3$ かつ $\rho|_{G_{\mathbb{Q}_3}}$ が 243 次拡大で Barsotti-Tate になる場合に, $R = T$ 定理をそれぞれ一般化している. F が一般の総実代数体の場合には藤原 ([14]) が同様の modular lifting を証明している.

ただし, 彼らの結果には F や, ρ が Barsotti-Tate になる拡大体について, これらの p における絶対分岐指数に関する制限が課せられていた. これは絶対分岐する局所体上での整 p 進 Hodge 理論が未整備なためであった. 以下ではこの点について説明する.

p を割る F の素点を \mathfrak{p} で表す. \mathfrak{p} で Barsotti-Tate な ρ に対して modular lifting を適用する場合, 考えなければいけない変形条件は「 \mathfrak{p} での flatness」である. つまり, Artin 環 A への $\bar{\rho}|_{G_{F_{\mathfrak{p}}}}$ の変

形 V_A で、次の条件を満たすものを考える:

- 整数環 \mathcal{O}_{F_p} 上の有限平坦群スキーム \mathcal{G} が存在して、 \mathcal{G} の generic fiber として得られる G_{F_p} 表現 $\mathcal{G}(\bar{F}_p)$ が V_A と同型になる.

このような G_{F_p} 表現は flat であると呼ばれ、それと同型な G_{F_p} 表現を与えるような \mathcal{O}_{F_p} 上の有限平坦群スキームをこの G_{F_p} 表現の有限平坦モデルと言う.

一般に、 K を \mathbb{Q}_p の有限次拡大とすると、 \mathcal{O}_K 上の有限平坦群スキームはある種の線形代数的なデータ (具体的には、ある係数環上のフィルター付き加群 + 付加構造) で分類できる. この事実は K の絶対分岐指数 $e(K)$ が 1 のときは Fontaine ([10]), $e(K) < p - 1$ の場合は Conrad ([8]), 一般の場合は Breuil ([5]) が、それぞれ別の係数環と付加構造を考案することによって証明した. また、Raynaud の定理 ([19, Corollaire 3.3.6]) によると、 $e(K) < p - 1$ なら、 \mathcal{O}_K 上の有限平坦群スキームに対してその generic fiber として得られる G_K の flat 表現を与える関手は忠実充満である. 従って、 $e(K) < p - 1$ なら、flat 表現の変形環を線形代数的なデータを使って調べることができる.

一方、 $e(K)$ が大きい場合はこの忠実充満性が崩れ、flat 表現の圏と \mathcal{O}_K 上の有限平坦群スキームの圏の間には「ずれ」が生じる. もしもこの「ずれ」(つまり \mathcal{O}_K 上の有限平坦群スキーム \mathcal{G} に対しその generic fiber $\mathcal{G}(\bar{K})$ を対応させる関手) も線形代数で記述することができれば、 $e(K)$ が大きくても flat 変形環の構造を線形代数を使って調べることが可能になるはずだった.ところが、Breuil による分類理論では、係数環が大きすぎて \mathcal{G} と $\mathcal{G}(\bar{K})$ の関係をうまく線形代数側に抽出することができなかった.

本稿で紹介する論文 [15] の最大のポイントは、 \mathcal{O}_K 上の有限平坦群スキームの新しい分類理論 (これは Breuil によるアイデアを Kisin が整備したものである) を用いてこの問題点を克服したところにある.

K の剰余体を k と書き、その Witt 環を $W = W(k)$ と表す. K の素元 π と、 π の p 巾乗根の逆系 $\{\pi_n\}$ を固定し、 $K_\infty = \bigcup K(\pi_n)$ と置く. この新しい理論によると、 \mathcal{O}_K 上の有限平坦群スキームは一変数巾級数環 $W[[u]]$ 上の有限加群 (+ 付加構造) で分類される. 一方、Fontaine の理論によって、有限 G_{K_∞} 加群は $W((u))$ 上の有限加群 (+ 付加構造) で分類されることが知られている. \mathcal{G} を \mathcal{O}_K 上の有限平坦群スキームとし、対応する $W[[u]]$ 加群を \mathfrak{M} と置く. このとき、この新しい理論によれば、有限 G_{K_∞} 加群 $\mathcal{G}(\bar{K})|_{G_{K_\infty}}$ に対応する $W((u))$ 加群は $\mathfrak{M}[1/u]$ である. 従って、ある flat 表現を与えるような \mathcal{O}_K 上の有限平坦群スキームを分類することと、その表現に対応する $W((u))$ 加群の $W[[u]]$ -lattice を分類することが同値になる. こうして上に述べた「ずれ」も線形代数で扱えることになった.

この際重要なのは、 G_K の flat 表現を G_{K_∞} に制限する関手は忠実充満と言う Breuil の定理である. つまり、状況を線形代数に持ち込むためには flat 表現を G_{K_∞} に制限する必要があったが、この制限を経ても表現の圏論的な情報は失われず、従って線形代数側から G_K 表現にいつでも戻ることができる.

以上を踏まえて論文 [15] の主定理 (のひとつ) を述べる. これまでの $R = T$ 定理と異なり、 F や、 ρ が Barsotti-Tate になる拡大体について、これらの p における分岐の条件が外れていることに注意しておく.

定理 1.1 ([15], Theorem (3.5.5)). $p \geq 3$ を素数、 F を総実代数体とする. S を F の素点の有限集合で p を割る素点全体と無限素点全体を含むものとし、 $G_{F,S}$ で S の外不分岐な F の最大 Galois 拡大の Galois 群を表す. E を \mathbb{Q}_p の有限次拡大とし、

$$\rho : G_{F,S} \rightarrow GL_2(E)$$

を連続表現で, その *determinant* が円分指標と有限指標の積であり, 以下の条件を満たすものとする.

- p を割る全ての素点 \mathfrak{p} に対し, $\rho|_{G_{F_{\mathfrak{p}}}}$ は *potentially Barsotti-Tate*. さらに, $\rho|_{G_{F_{\mathfrak{p}}}}$ が *potentially ordinary* でない \mathfrak{p} については, \mathfrak{p} の剰余体は \mathbb{F}_p .
- $\bar{\rho} \sim \bar{\rho}_f$ となる *parallel weight 2* の F 上の Hilbert 保型形式 f が存在. さらにこの f は次の 2 条件を満たす:
 - f に対応する $GL_2(\mathbb{A}_F)$ の保型表現は, p を割る全ての素点で *non-special*.
 - p を割る任意の素点 \mathfrak{p} について, $\rho_f|_{G_{F_{\mathfrak{p}}}}$ が *potentially ordinary* $\Leftrightarrow \rho|_{G_{F_{\mathfrak{p}}}}$ が *potentially ordinary*.
- 剰余表現 $\bar{\rho}: G_{F,S} \rightarrow GL_2(\mathbb{F})$ は, $F(\zeta_p)$ の絶対 Galois 群に制限すると絶対既約. さらに $p = 5$ かつ $\bar{\rho}$ の *projective image* が $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ と一致するときは, $[F(\zeta_5): F] = 4$ も仮定する.

このとき, ρ は *modular* である.

1.2 有限平坦モデルのモジュライ

ここでは主定理を示すために必要なことの概略を述べる. 方針は Taylor-Wiles (の極小 lift の場合) と同様で, 変形条件を緩めた変形環と level を増やした Hecke 環を考え, それらを「貼り合わせる」ことで $R = T$ を証明する. ただし, 示したいのは p 進表現の modularity なので, $R = T$ より弱く $R/(p\text{-torsion}) = T$ を示せばよい ([15, Proposition (3.3.1)]).

条件から $\bar{\rho}$ を与える Hilbert 保型形式 f が存在する. F の素点 \mathfrak{q} での $\bar{\rho}|_{G_{F_{\mathfrak{q}}}}$ の (適当な変形条件に関する) 普遍変形環を $R_{\mathfrak{q}}$ と置く. $R_{\mathfrak{q}}$ の generic fiber $R_{\mathfrak{q}}[1/p]$ の各閉点は, $G_{F_{\mathfrak{q}}}$ の p 進表現で $\bar{\rho}|_{G_{F_{\mathfrak{q}}}}$ の変形 (で与えられた変形条件を満たすもの) の極限として書けるものに対応している. そのような $G_{F_{\mathfrak{q}}}$ の p 進表現に関する条件 C を考える. C を満たす $R_{\mathfrak{q}}[1/p]$ の閉点全体は $\text{Spec}(R_{\mathfrak{q}}[1/p])$ の部分集合を定める.

ρ や, f に伴う Galois 表現は, $\bar{\rho}$ の変形になっているので, (もしこれらが与えられた変形条件を満たせば) ρ と f から図式

$$\mathcal{O}_E \leftarrow R_{\mathfrak{q}} \rightarrow T$$

が得られる (ここで T はある Hecke 環). このとき, [15, Proposition (3.3.1)] による Taylor-Wiles 系の貼り合わせを行うためには次の 2 条件が必要になる:

1. $R_{\mathfrak{q}}$ は整域.
2. $R_{\mathfrak{q}}[1/p]$ は E 上 formally smooth で, $R_{\mathfrak{q}}$ は適切な Krull 次元を持っている.

後で述べるように, $R_{\mathfrak{q}}[1/p]$ の formal smoothness を示すのは比較的容易である. ところが一般に $R_{\mathfrak{q}}[1/p]$ は連結ではないので, 次のようなことを考える. 変形条件に加えて, 上で述べたような p 進表現に関する条件 C を課す. 条件 C を満たす閉点全体が $\text{Spec}(R_{\mathfrak{q}}[1/p])$ のひとつの連結成分と一致すると仮定する. この連結成分の $\text{Spec}(R_{\mathfrak{q}})$ におけるスキーム論的閉包を $\text{Spec}(R_{\mathfrak{q}}^C)$ と書く. このとき, もしも ρ と f に伴う Galois 表現がともに条件 C を満たすように f や C を選べれば, 図式

$$\mathcal{O}_E \leftarrow R_{\mathfrak{q}}^C \rightarrow T$$

が得られ、しかも R_q^C は整域かつ generic fiber が formally smooth なので、あとは R_q^C の Krull 次元が適切な値であることが分かれば、[15, Proposition (3.3.1)] を適用でき、modularity を証明できる。この論文の中心課題は、そのような良い条件 C を見つけるために、変形環 R_q の generic fiber の解析を行うことである。

簡単のため以下本稿では q が p を割る場合だけを考える (そこで以下 q の代わりに p と書く)。この場合、この論文で考えている変形条件は p での flatness であり、従って flat 表現の変形環 R_p^{fl} の generic fiber $R_p^{\text{fl}}[1/p]$ を調べることになる。この generic fiber の E 値点は、 E 係数の 2 次元 G_{F_p} 表現 V で p 進表現として Barsotti-Tate なものに対応している。このような表現 V に対する条件 C は例えば次のようなものである：

- V は ordinary (resp. non-ordinary) であり、 V に対応する F_p 上の p -divisible 群 Γ_{F_p} の接空間 $\text{Lie}(\Gamma_{F_p})$ は rank 1 の自由 $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} F_p$ 加群。さらに、ordinary の場合において、 $\bar{\rho}|_{G_{F_p}}$ が異なる不分岐指標の直和であるときには、 $\bar{\rho}|_{G_{F_p}}$ の 1 次元部分表現 \bar{L} を固定した上で次の条件も付け加える：

- 惰性群が p 進円分指標で作用するような V の 1 次元部分表現は \bar{L} の lift になっている。

注 1.2. 変形条件を flat に制限した理由は、この論文が書かれた段階では整 p 進 Hodge 理論の中で比較的理論が整備されていたのが flat 表現や Barsotti-Tate 表現だけだったため。しかしすぐ後に Kisin 自身がこの論文で使われたテクニックをより一般の p 進表現に対して拡張し ([16]), 同様の解析をより広いクラスの変形環についても行っている ([17])。

上に挙げた 2 つの条件のうち、formal smoothness と Krull 次元の条件は local な性質であり、比較的容易に考察できる。実際、 R_p^{fl} の generic fiber の各閉点での完備局所環が、対応する Barsotti-Tate p 進表現の (標数 0 の Artin 環の圏で考えた) 変形環と同型で、しかもこの変形環が formally smooth であることから、 R_p^{fl} の generic fiber の formal smoothness を示すことができる。

一方、連結性の条件は global な性質である。今述べたように p 進 Hodge 理論ではその完備局所環しか分からないことに注意する。ここでもし、 R_p^C の特異性がそれほど悪くなく、例えば \mathcal{O}_E 上 flat で、かつ closed fiber $R_p^C \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_E/m_E$ が reduced であれば、generic fiber の連結性は closed fiber の連結性から従う。ゆえに、 R_p^C の特異性が十分良ければ話がうまく行くと思われる。ところが、一般に K の分岐指数が大きい場合、flat 表現の普遍変形環 R_p^{fl} は特異性の良い局所環になるとは限らない。

そこで、 R_p^{fl} やその剰余環 R_p^C の特異性を解析するかわりに次のような道筋を辿る。特異性の良いスキーム X^C と、スキームの射 $X^C \rightarrow \text{Spec}(R_p^C)$ で generic fiber に同型を引き起こすものを構成し、 X^C の closed fiber の連結成分の解析を行うことで X^C の generic fiber の、従って R_p^C の generic fiber の連結性を調べる。

このような X^C の構成は以下のようにして行う。 $K = F_p$ とし、flat な G_K 表現 $\bar{\rho}|_{G_K}$ の表現空間を $V_{\mathbb{F}}$ と書く。Artin 局所 $W(\mathbb{F})$ 代数で剰余体が \mathbb{F} であるもの A に対し G_K 表現 $V_{\mathbb{F}}$ の A への flat な変形 V_A とその有限平坦モデルの組全体の集合を対応させる関手を考えて、これが representable であることを示したい。これは、局所環の射 $R_p^{\text{fl}} \rightarrow A$ と、この射による普遍変形 $V_{R_p^{\text{fl}}}$ の引き戻し $V_{R_p^{\text{fl}}} \otimes_{R_p^{\text{fl}}} A$ の有限平坦モデルの組を与えることと同じである。さらに、上述した有限平坦群スキームの分類理論と Breuil の忠実充満性定理を使うと、これを $W((u))$ 加群の $W[[u]]$ -lattice の言葉で書き換えることができる。実際、 $V_{R_p^{\text{fl}}}|_{G_{K^{\infty}}}$ に対応する $W((u)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} R_p^{\text{fl}}$ 加群を $M_{R_p^{\text{fl}}}$ と置くと、 $V_{R_p^{\text{fl}}} \otimes_{R_p^{\text{fl}}} A$ の有限平坦モデルを与えることは、 $W((u)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 加群 $M_{R_p^{\text{fl}}} \otimes_{R_p^{\text{fl}}} A$ の $(W[[u]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} A)$ -lattice (+ 付加構造) を与えることと同値になる。このような lattice 全体は Affine Grassmann 多様体 (の

閉部分集合) で classify される. さらに条件 C に対応する閉部分スキームを取ることで, 求めるスキーム X^C が得られる. C を適切に選べば, X^C は志村多様体の local model と結びつくことが示せるので, local model に関して得られている結果から X^C の特異性がよい (特に normal かつ CM で closed fiber が reduced である) ことが分かる. $X^C \rightarrow \text{Spec}(R_p^C)$ の generic fiber は, \mathcal{O}_K 上の p -divisible 群にその Tate 加群を対応させる射なので, Tate の定理より全単射と分かり, 両辺の generic fiber の特異性がよいことは既に示したので, この全単射から同型が従う.

2 ϕ 加群, 有限平坦群スキーム, p 進 Hodge 理論

2.1 G_{K_∞} 表現の分類

$p \geq 3$ を素数とする. K を \mathbb{Q}_p の有限次拡大とし, k を K の剰余体とする. $W = W(k)$ の Frobenius 写像を σ で表す. K の素元 π と, その p 巾乗根の系 $\{\pi_n | \pi_0 = \pi, \pi_{n+1}^p = \pi_n\}$ を固定し, $K_n = K(\pi_n)$, $K_\infty = \bigcup K_n$ と置く. 拡大 K_∞/K は強 APF 拡大なので ([4]), Fontaine-Wintenberger の Norm 体の理論が適用できる. つまり, 自然な同型 $\text{Gal}(K_\infty/K) \simeq \text{Gal}(k((u))^{\text{sep}}/k((u)))$ が存在する. 後者の Galois 群は標数 p の体の絶対 Galois 群であり, このような体に関する有限 Galois 加群はある種の線形代数で分類できることが知られている. 従って, 有限 G_{K_∞} 表現の分類理論が得られたことになる.

正確な主張を述べるために記号を用意する. $\mathcal{O} = W[[u]]$, $\mathcal{O}_\varepsilon = \mathcal{O}[1/u]^\wedge$ (ただし \wedge は p 進完備化), $\mathcal{E} = \text{Frac}(\mathcal{O}_\varepsilon)$ と置く. また, p 乗写像のなす環の逆系を使って

$$R = \varprojlim (\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \leftarrow \cdots)$$

と定義する. R は標数 p の完備付値環である. $\bar{\pi} \in R$ を $\bar{\pi} = (\pi_n \bmod p)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ で定める. Witt 環 $W(R)$ を $u \mapsto [\bar{\pi}]$ によって $W[u]$ 代数と思うと, この射は環の p 進連続な埋め込み $\mathcal{O} \rightarrow W(R)$ と $\mathcal{E} \rightarrow W(\text{Frac}(R))[1/p]$ を引き起こす. 後者の埋め込みにおける \mathcal{E} の最大不分岐拡大を \mathcal{E}^{nr} , その $W(\text{Frac}(R))[1/p]$ での閉包を $\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}$ で表す. これは \mathcal{E}^{nr} の p 進付値による完備化と同一視できる. ϕ で, これらの環において $u \mapsto u^p$ が定める σ -semilinear な連続準同型を表す. また, 定義から $\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}}$ には Galois 群 G_{K_∞} が \mathcal{O}_ε -linear に作用している.

\mathcal{O}_ε 上の etale ϕ 加群とは, 有限 \mathcal{O}_ε 加群 M と, ϕ -semilinear な準同型 $\phi : M \rightarrow M$ の組で, $\phi^* M = \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\phi, \mathcal{O}_\varepsilon} M$ と置くとき, $1 \otimes \phi : \phi^* M \rightarrow M$ が同型であるものを言う. これら全体のなす自然な Abel 圏 (射は \mathcal{O}_ε -linear で ϕ と可換なもの) を $\Phi M_{\mathcal{O}_\varepsilon}$ と表す. また, 有限 \mathbb{Z}_p 加群への連続 G_{K_∞} 表現全体のなす圏を $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_\infty})$ で表す.

定理 2.1 ([12]). 次の完全関手 T は Abel 圏の同値を与える:

$$\begin{aligned} T : \Phi M_{\mathcal{O}_\varepsilon} &\rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_\infty}) \\ M &\mapsto (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathcal{O}_\varepsilon} M)^{\phi=1}. \end{aligned}$$

T の quasi-inverse は次で与えられる:

$$\begin{aligned} D : \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_\infty}) &\rightarrow \Phi M_{\mathcal{O}_\varepsilon} \\ V &\mapsto (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_{K_\infty}}. \end{aligned}$$

2.2 有限平坦群スキームの分類

記号は前小節の通りとする. K の素元 π の $W = W(k)$ 上の Eisenstein 多項式を $E(u) \in W[u]$ と置く. また, $\mathfrak{S}^{\text{nr}} = \mathcal{O}_{\widehat{\mathfrak{E}^{\text{nr}}}} \cap W(R)$ と表す.

定義 2.2. • \mathfrak{S} 加群 \mathfrak{M} と, ϕ -semilinear な加群の準同型 $\phi: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ の組を, \mathfrak{S} 上の ϕ 加群と呼ぶ. さらに, $1 \otimes \phi: \phi^* \mathfrak{M} = \mathfrak{S} \otimes_{\phi, \mathfrak{S}} \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ の余核が $E(u)$ で消えるとき, この ϕ 加群は E -height ≤ 1 であると言う.

- 圏 $\text{BT}_{\mathfrak{S}}^{\phi}$ を次のように定義する: *object* は, E -height ≤ 1 であるような \mathfrak{S} 上の ϕ 加群で, \mathfrak{S} 加群として有限生成自由なもの全体. 射は ϕ と両立する \mathfrak{S} -linear map 全体.
- 圏 $(\text{Mod}/\mathfrak{S})$ を次のように定義する: *object* は, E -height ≤ 1 であるような \mathfrak{S} 上の ϕ 加群で, \mathfrak{S} 加群として射影次元 1 かつ p 巾 *torsion* なもの全体. 射は ϕ と両立する \mathfrak{S} -linear map 全体.

さらに, \mathcal{O}_K 上の p -divisible 群全体のなす圏を $(p\text{-div}/\mathcal{O}_K)$, \mathcal{O}_K 上の p 巾で消える有限平坦群スキーム全体のなす圏を $(p\text{-Gr}/\mathcal{O}_K)$ で表す.

定理 2.3 ([16]). 1. 圏の *exact* な反同値

$$\begin{aligned} \text{BT}_{\mathfrak{S}}^{\phi} &\rightarrow (p\text{-div}/\mathcal{O}_K) \\ \mathfrak{M} &\mapsto \Gamma \end{aligned}$$

が存在して, 自然同値 $T_p(\Gamma)|_{G_{K_x}} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{S}, \phi}(\mathfrak{M}, \mathfrak{S}^{\text{nr}})$ を満たす. ただし $T_p(\Gamma)$ は p -divisible 群 Γ の Tate 加群.

2. 圏の *exact* な反同値

$$\begin{aligned} (\text{Mod}/\mathfrak{S}) &\rightarrow (p\text{-Gr}/\mathcal{O}_K) \\ \mathfrak{M} &\mapsto \text{Gr}(\mathfrak{M}) \end{aligned}$$

が存在する. この関手 Gr は次のようにして定まるもの: $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ を $\text{BT}_{\mathfrak{S}}^{\phi}$ の元とし, これらに対応する \mathcal{O}_K 上の p -divisible 群を Γ_1, Γ_2 とする. このとき

$$0 \rightarrow \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2 \rightarrow \mathfrak{M} \rightarrow 0$$

が完全系列であれば, 射 $\mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_2$ に対応する p -divisible 群の *isogeny* $\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$ に対し $\text{Gr}(\mathfrak{M}) \simeq \text{Ker}(\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1)$.

ここから直ちに分かる性質をいくつか述べる.

性質 2.4. $\mathfrak{M} \in (\text{Mod}/\mathfrak{S})$ と, 前小節の関手 T に対し, 有限 G_{K_x} 加群の自然な同型

$$T(\mathcal{O}_{\mathfrak{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M})(1) \rightarrow \text{Gr}(\mathfrak{M})^{\vee}(\mathcal{O}_K)|_{G_{K_x}}$$

が存在. ここで (1) は Tate twist で, \vee は Cartier 双対を表す.

性質 2.5.

$$\text{Gr}(\mathfrak{M})^{\vee} \text{ が } \left\{ \begin{array}{c} \text{etale} \\ \text{multiplicative} \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 \otimes \phi(\phi^* \mathfrak{M}) = \left\{ \begin{array}{c} E(u)\mathfrak{M} \\ \mathfrak{M} \end{array} \right\}.$$

これは定理 2.3 の関手の構成と, crystalline Dieudonné 加群と古典的な Dieudonné 加群の両立性から従う. また, 性質の右辺の条件を, \mathfrak{M} が $\left\{ \begin{array}{c} \text{etale} \\ \text{multiplicative} \end{array} \right\}$ と言う.

性質 2.6 ([6], Theorem 3.4.3). *flat* な *torsion* G_K 加群の圏から *torsion* G_{K_∞} 加群の圏への自然な制限関手は忠実充満.

証明. キーポイントは, $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \in (\text{Mod}/\mathfrak{S})$ と, G_{K_∞} -linear な同型 $f : \text{Gr}(\mathfrak{M}_1)(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \rightarrow \text{Gr}(\mathfrak{M}_2)(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ が与えられているとき, f が自動的に G_K -linear となること. これは次のようにして分かる. G_{K_∞} 加群 $\text{Gr}(\mathfrak{M}_i)(\mathcal{O}_{\bar{K}})|_{G_{K_\infty}}$ は定理 2.1 の圏同値の双対で $\mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_i$ に対応する. $D(f)$ の双対でこのふたつの ϕ 加群を同一視し, $\mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_1 = \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_2 \supseteq \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ を考える. このとき $\mathfrak{M} \in (\text{Mod}/\mathfrak{S})$ であり, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{M}_2$ によって得られる \mathcal{O}_K 上の有限平坦群スキームの射 $\text{Gr}(\mathfrak{M}_1) \leftarrow \text{Gr}(\mathfrak{M}) \rightarrow \text{Gr}(\mathfrak{M}_2)$ が, その generic fiber に恒等射

$$\text{Gr}(\mathfrak{M}_1)(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = \text{Gr}(\mathfrak{M})(\mathcal{O}_{\bar{K}}) = \text{Gr}(\mathfrak{M}_2)(\mathcal{O}_{\bar{K}})$$

を引き起こすので, 確かに f は G_K -linear に延びている. \square

注 2.7. *flat* な p -torsion G_K 加群の圏に限れば, 分類理論を使わなくても性質 2.6 が証明できることは注意に値する ([1], Proposition 8.5.1 の証明). 実際, G_K^j で G_K の第 j 上付き分岐群 (normalization は [21] に従う. つまり, $G_K^{0+} = \bigcup_{j>0} G_K^j$ が野生分岐群になる) を表すと, *flat* な p -torsion G_K 加群 \bar{V} には $j > e(1 + 1/(p-1)) - 1$ なる G_K^j が自明に作用する ([11]). $j_0 = e(1 + 1/(p-1))$ と置くと, 有限次拡大 K_1/K の上付き分岐の最大の *jump* は j_0 である. 従って $K_\infty \cap \bar{K}^{G_K^{j_0}} = K$ であり, ゆえに $G_K = G_{K_\infty} G_K^{j_0}$ である. このことから忠実充満性が従う.

2.3 係数付きの場合

変形理論を考える上で, これらの分類理論や p 進 Hodge 理論を係数付きで考える必要が生じる. この小節では, 係数付きの \mathfrak{S} 加群やフィルター付き加群についての定義をまとめておく.

\mathbb{Z}_p 代数 A に対し, $(\text{ModFI}/\mathfrak{S})_A$ で次のような圏を表す: object は, \mathfrak{S} 上有限な ϕ 加群 \mathfrak{M} で E -height ≤ 1 であるものと, \mathbb{Z}_p -代数の準同型 $\iota : A \rightarrow \text{End}_{\mathfrak{S}, \phi}(\mathfrak{M})$ の組 (\mathfrak{M}, ι) で, \mathfrak{M} が $\mathfrak{S}_A = \mathfrak{S} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 加群として有限生成射影であるもの全体. 射は ϕ, ι と両立する \mathfrak{S} -linear map 全体.

さらに, A が有限環であると仮定する. このとき, 有限 A 加群への連続 G_{K_∞} 表現全体のなす圏を $\text{Rep}'_A(G_{K_\infty})$ で表す. また, $(\text{ModFI}/\mathfrak{S})_A$ と同様に, A 作用付きの \mathcal{O}_ε 上の ϕ 加群全体のなす圏を $\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_\varepsilon, A}$ で表す. このとき, 定理 2.1 の圏同値 $T : \Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_\varepsilon} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_{K_\infty})$ は圏同値 $T_A : \Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_\varepsilon, A} \rightarrow \text{Rep}'_A(G_{K_\infty})$ を引き起こす. この圏同値 T_A は有限射 $A \rightarrow A'$ による係数拡大と両立する. つまり, 自然な同型 $T_A(M) \otimes_A A' \rightarrow T_{A'}(M \otimes_A A')$ が存在.

同様に, 係数付きのフィルター付き加群を定義する. A を今度は有限局所 \mathbb{Q}_p 代数とする. Crystalline な p 進 G_K 表現全体のなす圏を Rep^{crys} で表す. また, 有限生成自由 A 加群への p 進連続 G_K 表現で, p 進表現として crystalline なもの全体のなす圏を $\text{Rep}_A^{\text{crys}}$ で表す. さらに, weakly admissible なフィルター付き ϕ 加群と, ϕ やフィルター付けと両立する A 作用との組全体のなす圏を $(\text{Mod}/K_0)_A$ で表す. また, その充満部分圏で, $\mathcal{M} \in (\text{Mod}/K_0)_A$ で $\text{gr}^\bullet \mathcal{M}_K$ が射影 A 加群であるようなもの全体のなす圏を $(\text{Mod}/K_0)_{A\text{-fr}}$ と置く. このとき, 圏同値

$$\begin{aligned} D_{\text{crys}} : \text{Rep}^{\text{crys}} &\rightarrow (\text{Mod}/K_0)_{\mathbb{Q}_p} \\ V &\mapsto (B_{\text{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \end{aligned}$$

と, その quasi-inverse

$$V_{\text{crys}} : (\text{Mod}/K_0)_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \text{Rep}^{\text{crys}}$$

$$\mathcal{M} \mapsto \text{Fil}^0(B_{\text{crys}} \otimes_{K_0} \mathcal{M})^{\phi=1}$$

は, 互いに quasi-inverse であるような圏同値

$$D_{\text{crys},A} : \text{Rep}_A^{\text{crys}} \rightarrow (\text{Mod}/K_0)_{A\text{-fr}}$$

$$V_{\text{crys},A} : (\text{Mod}/K_0)_{A\text{-fr}} \rightarrow \text{Rep}_A^{\text{crys}}$$

を引き起こす. これらの関手は有限局所 \mathbb{Q}_p 代数の有限射 $A \rightarrow A'$ による係数拡大と両立する.

3 groupoid と変形環

3.1 groupoid の復習

圏 \mathcal{E} に対し, その対象全体を $\text{Ob}(\mathcal{E})$ で表す. また, 圏の射 $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ と $T \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ に対し, $\mathcal{F}(T)$ で次のような圏を表す: object は $\theta(\eta) = T$ なる $\eta \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ 全体で, 射は \mathcal{F} の射 α で $\theta(\alpha) = \text{id}_T$ となるもの全体.

圏の射 $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ が \mathcal{E} 上の groupoid であるとは次の 2 条件が成立することだった:

1. \mathcal{F} の射 $\alpha : \eta \rightarrow \xi$, $\alpha' : \eta \rightarrow \xi'$ で, θ によって \mathcal{E} の同じ射 $T \rightarrow S$ にうつるものを考える. このとき, \mathcal{F} の射 $\tau : \xi \rightarrow \xi'$ で, $\alpha' = \tau \circ \alpha$ なるものがただひとつ存在.
2. \mathcal{E} の射 $f : T \rightarrow S$ と, $\theta(\eta) = T$ なる $\eta \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ を考える. このとき, \mathcal{F} の射 $\alpha : \eta \rightarrow \xi$ で $\theta(\alpha) = f$ なるものが存在.

$\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$, $\theta' : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{E}$, $\theta'' : \mathcal{F}'' \rightarrow \mathcal{E}$ をそれぞれ \mathcal{E} 上の groupoid とし, $\Phi' : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$, $\Phi'' : \mathcal{F}'' \rightarrow \mathcal{F}$ を \mathcal{E} 上の射とする. このとき, \mathcal{F}' と \mathcal{F}'' の \mathcal{F} 上の 2-ファイバー積 $\mathcal{F}' \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F}''$ は次のように定義される \mathcal{E} 上の groupoid である: object は, $\xi' \in \text{Ob}(\mathcal{F}')$ と $\xi'' \in \text{Ob}(\mathcal{F}'')$, そして \mathcal{F} における射 $\alpha : \Phi'(\xi') \rightarrow \Phi''(\xi'')$ で $\theta(\alpha) = \text{id}$ となるもの, の 3 つ組 (ξ', ξ'', α) 全体. このような 3 つ組の間の射 $(\xi', \xi'', \alpha) \rightarrow (\eta', \eta'', \beta)$ は, 射 $\gamma' : \xi' \rightarrow \eta'$, $\gamma'' : \xi'' \rightarrow \eta''$ の組 (γ, γ') で, $\beta \circ \Phi'(\gamma') = \Phi''(\gamma'') \circ \alpha$ を満たすもの全体.

\mathcal{E} 上の groupoid $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ と $\eta \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ に対し, \mathcal{E} 上の groupoid η (同じ記号で表す) を次のように定義する: object は \mathcal{F} の射 $\eta \rightarrow \xi$ 全体. 射 $(\alpha : \eta \rightarrow \xi) \rightarrow (\alpha' : \eta \rightarrow \xi')$ は, \mathcal{F} の射 $\beta : \xi \rightarrow \xi'$ で $\beta \circ \alpha = \alpha'$ なるもの全体. このとき $(\eta \rightarrow \xi) \mapsto \xi$ は \mathcal{E} 上の groupoid の射 $\eta \rightarrow \mathcal{F}$ を定める.

\mathcal{E} 上の groupoid $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ が representable であるとは, $\eta \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ が存在して, 自然な射 $\eta \rightarrow \mathcal{F}$ が \mathcal{E} 上の圏同値となること. このとき普遍対象 η は標準的な同型を除いて一意に決まる. 従って $\theta(\eta)$ もそうなので, 「 $\theta(\eta)$ が \mathcal{F} を represent する」とも言う.

各 $T \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ に対して $\mathcal{F}(T)$ が集合であるとする. このとき, 関手 $|\mathcal{F}| : \mathcal{E} \rightarrow (\text{Set})$ を, $T \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ に対して $\mathcal{F}(T)$ の同型類全体の集合を対応させることで定める. $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ が $T \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ で representable のとき, 自然同値 $|\mathcal{F}| \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}}(T, -)$ が存在する.

\mathcal{E} 上の groupoid の射 $\Phi : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ が relatively representable であるとは, 任意の $\eta \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ に対し 2-ファイバー積 $\mathcal{F}'_{\eta} := \eta \times_{\mathcal{F}} \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{E}$ が representable であること. また, Φ が formally smooth であるとは, $|\mathcal{F}'| \rightarrow |\mathcal{F}|$ が formally smooth, つまり, \mathcal{E} における任意の射 $T \rightarrow S$ に対し,

$|\mathcal{F}'|(T) \rightarrow |\mathcal{F}'|(S) \times_{|\mathcal{F}'|(S)} |\mathcal{F}'|(T)$ が全射であること. これは任意の $\eta \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ に対し $|\mathcal{F}'|_\eta \rightarrow |\eta|$ が formally smooth であることと同値.

\mathbb{F} を体, \mathcal{O} を剰余体が \mathbb{F} であるような完備局所環, $m_{\mathcal{O}}$ をその極大イデアルとする. 局所 Artin 有限 \mathcal{O} 代数 (*resp.* 完備 Noether 局所 \mathcal{O} 代数) で剰余体が \mathbb{F} であるようなもの全体の圏を $\mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ (*resp.* $\widehat{\mathfrak{A}}_{\mathcal{O}}$) で表す. $\mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ 上の groupoid $\mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ は, limit を取ることで自然に $\widehat{\mathfrak{A}}_{\mathcal{O}}$ 上の groupoid に延長される. これも同じ記号 \mathcal{F} で表す. $\mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ が pro-representable (*resp.* relatively pro-representable) であるとは, この延長 $\mathcal{F} \rightarrow \widehat{\mathfrak{A}}_{\mathcal{O}}$ が representable (*resp.* relatively representable) であること.

さらに, $\mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ で次のような圏を表す: object は, \mathcal{O} 代数 A と, A の巾零イデアル I で $m_{\mathcal{O}}A \subseteq I$ を満たすものの組 (A, I) 全体. 射 $(A, I) \rightarrow (A', I')$ は \mathcal{O} 代数の射 $A \rightarrow A'$ で I を I' の中に移すもの全体. 定義から, $(A, I) \in \mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ ならある非負整数 i に対して $m_{\mathcal{O}}^i A = 0$ となることに注意する (つまりこの圏は, $\mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ から \mathcal{O} 有限局所性を外した感じのもの).

3.2 変形と枠付き変形

\mathbb{F} と \mathcal{O} を前小節のとおりとする. d 次元 \mathbb{F} ベクトル空間への連続 G_K 表現 $V_{\mathbb{F}}$ を固定する. これに対し, $\mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ 上の groupoid $D_{V_{\mathbb{F}}} \rightarrow \mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ を次のように定義する:

- $A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ とするとき, A 上の object は, 有限生成自由 A 加群への連続 G_K 表現 V_A と, $\mathbb{F}[G_K]$ 加群の同型 $\psi : V_A \otimes_A \mathbb{F} \rightarrow V_{\mathbb{F}}$ の組 (V_A, ψ) 全体.
- $\mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ の射 $A \rightarrow A'$ に対し, この射の上にある $D_{V_{\mathbb{F}}}$ の射 $(V_A, \psi) \rightarrow (V_{A'}, \psi')$ は, $A'[G_K]$ 加群の同型で ψ, ψ' と両立するもの $\alpha : V_A \otimes_A A' \rightarrow V_{A'}$ の $(A')^\times$ 同値類 $[\alpha]$ 全体.

定義から, $|D_{V_{\mathbb{F}}}|$ は普通の変形関手になる. ここで, 射を $(A')^\times$ で割っているのは, $|D_{V_{\mathbb{F}}}|$ の関手としての representability と, $D_{V_{\mathbb{F}}}$ の $\mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ 上の groupoid としての representability を同値にするため.

さらに, $V_{\mathbb{F}}$ の ordered basis $\beta_{\mathbb{F}}$ を固定する. これに対し, 枠付き変形の groupoid $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square} \rightarrow \mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ を次のように定義する:

- $A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ とするとき, A 上の object は, 有限生成自由 A 加群への連続 G_K 表現 V_A と, V_A の ordered A -basis β_A , そして $\mathbb{F}[G_K]$ 加群の同型 $\psi : V_A \otimes_A \mathbb{F} \rightarrow V_{\mathbb{F}}$ で $\beta_A \mapsto \beta_{\mathbb{F}}$ となるものの組 (V_A, β_A, ψ) 全体.
- $\mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ の射 $A \rightarrow A'$ に対し, この射の上にある $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ の射 $(V_A, \beta_A, \psi) \rightarrow (V_{A'}, \beta_{A'}, \psi')$ は, $A'[G_K]$ 加群の同型 $\alpha : V_A \otimes_A A' \rightarrow V_{A'}$ で $\beta_A, \beta_{A'}, \psi, \psi'$ と両立するもの全体.

$V_{\mathbb{F}}$ と ordered basis $\beta_{\mathbb{F}}$ は準同型 $\rho_{\mathbb{F}} : G_K \rightarrow GL_d(\mathbb{F})$ を定める. すると定義から,

$$|D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}|(A) = \{ \rho_A : G_K \rightarrow GL_d(A) \mid \rho_{\mathbb{F}} \text{ の lift } \}.$$

このことから, 関手 $|D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}|$ (従って groupoid $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$) は完備 Noether 局所環 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ で pro-represent されることが分かる. また, ordered basis を忘れる射 $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square} \rightarrow D_{V_{\mathbb{F}}}$ が formally smooth かつ relatively pro-representable であることも分かる (PGL_d の formal completion で pro-represent される).

注 3.1. $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ と違って, $D_{V_{\mathbb{F}}}$ は一般には pro-representable にならない. 例えば $\text{End}_{\mathbb{F}[G_K]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ が成立すれば完備局所環 $R_{V_{\mathbb{F}}}$ で pro-representable になる (この条件は $V_{\mathbb{F}}$ が絶対既約なら満たされる) が, 局所体の torsion Galois 表現は絶対既約にならない場合が多い. 枠付き変形を導入したのはそのような場合でも変形環の存在を保証するためである.

4 有限平坦モデルのモジュライの構成

\mathbb{F} を \mathbb{F}_p の有限次拡大とし, $V_{\mathbb{F}}$ を d 次元 \mathbb{F} ベクトル空間への連続 G_K 表現で, flat であるものとする (つまり, \mathcal{O}_K 上の有限平坦群スキーム \mathcal{G} と G_K 加群の同型 $V_{\mathbb{F}} \simeq \mathcal{G}(\bar{K})$ の存在を仮定する). この節では, 小節 1.2 に述べたような, $V_{\mathbb{F}}$ の flat な変形とその有限平坦モデルの組のモジュライの構成について説明する. そのためにまず, flat 表現と $G_{K_{\infty}}$ 表現のそれぞれに対して変形関手を定義する. 後者は, $V_{\mathbb{F}}|_{G_{K_{\infty}}}$ を与える $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上の ϕ 加群 $M_{\mathbb{F}}$ を変形させることと同じである.

flat 表現の変形. $V_{\mathbb{F}}$ の Artin 局所 $W(\mathbb{F})$ 代数への変形全体のなす groupoid $D_{V_{\mathbb{F}}} \rightarrow \mathfrak{A}_{W(\mathbb{F})}$ を考える. この full subgroupoid $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}} \rightarrow \mathfrak{A}_{W(\mathbb{F})}$ を, $(V_A, \psi) \in D_{V_{\mathbb{F}}}(A)$ で V_A が flat 表現であるもの全体として定める. flat 表現の部分表現や商表現が flat 表現であることから $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}} \rightarrow D_{V_{\mathbb{F}}}$ が relatively representable であると分かる. 従って, 例えば $\text{End}_{\mathbb{F}[G_K]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ なら, groupoid $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ は $R_{V_{\mathbb{F}}}$ のある剰余環 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ で pro-represent される.

これらの $\mathfrak{A}_{W(\mathbb{F})}$ 上の groupoid を以下のように $\mathfrak{A}_{\text{ug}W(\mathbb{F})}$ 上の groupoid に拡張して考える: $(A, I) \in \mathfrak{A}_{\text{ug}W(\mathbb{F})}$ に対し, $\mathfrak{A}_{W(\mathbb{F})}$ の object A' と, $W(\mathbb{F})$ 代数の単射 $A' \rightarrow A$ で $\text{rad}(A')$ を I の中に移すものの組全体のなす自然な圏を $\mathfrak{A}_{W(\mathbb{F})}^{A, I}$ と表す. このとき,

$$D_{V_{\mathbb{F}}}(A, I) := \varinjlim_{A' \in \mathfrak{A}_{W(\mathbb{F})}^{A, I}} D_{V_{\mathbb{F}}}(A')$$

と定める. $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ も同様に $\mathfrak{A}_{\text{ug}W(\mathbb{F})}$ 上の groupoid に拡張する.

注 4.1. この拡張をすることで, 以下で構成する射影スキーム $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ に $\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}}$ 上の普遍 ϕ 加群を付与できるようになる.

$G_{K_{\infty}}$ 表現の変形. $M_{\mathbb{F}} \in \Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \mathbb{F}}$ を, 小節 2.3 の圏同値 $T_{\mathbb{F}}$ に対し $T_{\mathbb{F}}(M_{\mathbb{F}})(1) = V_{\mathbb{F}}$ を満たすものとして定義する. これに対し, groupoid $D_{M_{\mathbb{F}}} \rightarrow \mathfrak{A}_{W(\mathbb{F})}$ を次のように定める:

- $A \in \mathfrak{A}_{W(\mathbb{F})}$ の上にある object は, $M_A \in \Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, A}$ で M_A が $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 加群として有限生成自由であるものと, $\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \mathbb{F}}$ の同型 $\psi: M_A \otimes_A \mathbb{F} \rightarrow M_{\mathbb{F}}$ の組 (M_A, ψ) 全体.
- $A \rightarrow A'$ を $\mathfrak{A}_{W(\mathbb{F})}$ の射とする. この射の上にある $D_{M_{\mathbb{F}}}$ の射 $(M_A, \psi) \rightarrow (M_{A'}, \psi')$ は, ψ, ψ' と両立する $\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, A'}$ の同型 $\alpha: M_A \otimes_A A' \rightarrow M_{A'}$ の $(A')^{\times}$ 同値類全体.

有限生成自由性の条件は, A 上有限生成自由な Galois 表現への変形しか考えていないことに対応している. この groupoid も, さっきと同様に $\mathfrak{A}_{\text{ug}W(\mathbb{F})}$ 上の groupoid に拡張して考える. すると, $\mathfrak{A}_{W(\mathbb{F})}$ 上の射

$$\begin{aligned} D_{V_{\mathbb{F}}} &\rightarrow D_{M_{\mathbb{F}}} \\ V_A &\mapsto (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_A(-1))^{G_{K_{\infty}}} \end{aligned}$$

は, $\mathfrak{A}_{\text{ug}W(\mathbb{F})}$ 上の射 $D_{V_{\mathbb{F}}} \rightarrow D_{M_{\mathbb{F}}}$ を引き起こす.

$G_{K_{\infty}}$ 表現の変形と \mathcal{G} -lattice. 最後に, groupoid $D_{\mathcal{G}, M_{\mathbb{F}}} \rightarrow \mathfrak{A}_{\text{ug}W(\mathbb{F})}$ を次のように定義する:

- $(A, I) \in \mathfrak{A}_{\text{ug}W(\mathbb{F})}$ の上にある object は, $\mathfrak{M}_A \in (\text{ModFI}/\mathcal{G})_A$ と, $(\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A/I)$ -linear で ϕ と両立する同型 $\psi: \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{G}} \mathfrak{M}_A \otimes_{\mathbb{Z}_p} A/I \rightarrow M_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} A/I$ の組 (\mathfrak{M}_A, ψ) 全体.
- $\mathfrak{A}_{\text{ug}W(\mathbb{F})}$ の射 $(A, I) \rightarrow (A', I')$ の上にある $D_{\mathcal{G}, M_{\mathbb{F}}}$ の射 $(\mathfrak{M}_A, \psi) \rightarrow (\mathfrak{M}_{A'}, \psi')$ は, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ に係数拡大したときに ψ, ψ' と両立するような $(\text{ModFI}/\mathcal{G})_{A'}$ の同型 $\alpha: \mathfrak{M}_A \otimes_A A' \rightarrow \mathfrak{M}_{A'}$ の $(A')^{\times}$ 同値類全体.

A が有限環の場合は, $(\text{ModFI}/\mathfrak{S})_A$ の元は $(\text{Mod}/\mathfrak{S})$ にも含まれ, 後者の圏は \mathcal{O}_K 上の p 巾で消える有限平坦群スキームの圏と同値なので, この groupoid は $V_{\mathbb{F}}|_{G_{K_\infty}}$ の変形とその有限平坦モデルの組をだいたい分類していることになる.

次に, $\mathfrak{A}ug_{W(\mathbb{F})}$ 上の射 $\Theta_{V_{\mathbb{F}}} : D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}} \rightarrow D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ を構成する. 簡単のために $\mathfrak{A}ug_{W(\mathbb{F})}$ 上だけで考える. $A \in \mathfrak{A}ug_{W(\mathbb{F})}$ とし, $(\mathfrak{M}_A, \psi) \in D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}}(A, m_A)$ を取る. このとき $V_A = T_A(\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_A)(1)$ は有限生成自由 A 加群への G_{K_∞} 表現を与える. 性質 2.4 から, V_A は flat G_K 表現に延びていることが分かる. さらに, Breuil の忠実充満性定理 (性質 2.6) から次のことが従う: このような flat G_K 表現への延長は一意的で, この G_K 作用と A 作用は可換であり, さらに, ψ から定まる G_{K_∞} 加群の同型 $\psi : V_A \otimes_A \mathbb{F} \rightarrow V_{\mathbb{F}}$ は G_K 作用と両立する. そこで $\Theta_{V_{\mathbb{F}}}(\mathfrak{M}_A, \psi) := (V_A, \psi) \in D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}(A, m_A)$ と定める. この議論を $\mathfrak{A}ug_{W(\mathbb{F})}$ 上に拡張することにより, 次の定理が示される:

定理 4.2 ([15], Proposition (2.1.4)). $\mathfrak{A}ug_{W(\mathbb{F})}$ 上の射 $\Theta_{V_{\mathbb{F}}} : D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}} \rightarrow D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ で, 図式

$$\begin{array}{ccc} D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}} & \longrightarrow & D_{M_{\mathbb{F}}} \\ & \nwarrow & \uparrow \\ & & D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}} \end{array}$$

を 2-可換にするものがただひとつ存在する. ここで, 上向きの射は $\mathfrak{M}_A \mapsto \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_A$ が引き起こす自然な射であり, 横向きの射は上で定義した射 $D_{V_{\mathbb{F}}} \rightarrow D_{M_{\mathbb{F}}}$ の $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ への制限 (Breuil の忠実充満性定理より, これが忠実充満になることに注意する).

さて, $A \in \mathfrak{A}ug_{W(\mathbb{F})}$ と $\xi = (V_A, \psi_A) \in D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}(A)$ とを固定し, $M_A = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{\text{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V_A(-1))^{G_{K_\infty}}$ と置く. $\mathfrak{A}ug_{W(\mathbb{F})}$ 上の groupoid ξ も前のように $\mathfrak{A}ug_{W(\mathbb{F})}$ に拡張しておく, $\mathfrak{A}ug_{W(\mathbb{F})}$ 上の射 $\xi \rightarrow D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ を得る. これらに対し, $\mathfrak{A}ug_{W(\mathbb{F})}$ 上の groupoid の 2-ファイバー積 $D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}, \xi} := \xi \times_{D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}} D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}}$ を考える.

定理 4.3 ([15], Proposition (2.1.7)). A 上の射影スキーム $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi} \rightarrow \text{Spec}(A)$ が存在して次の *representability* を満たす: 任意の $(B, I) \in \mathfrak{A}ug_A$ に対し *functorial* な全単射

$$|D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}, \xi}|(B, I) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Spec}(A)}(\text{Spec}(B), \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi})$$

が存在.

証明. $(B, I) \in \mathfrak{A}ug_A$ に対して, $M_B = M_A \otimes_A B$ と置く. すると定義と忠実充満性定理から, 同一視

$$|D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}, \xi}|(B, I) = \left\{ \mathfrak{m}_B \subseteq M_B \left| \begin{array}{l} M_B \text{ の有限生成射影 } \mathfrak{S}_B \text{ 部分加群で, } M_B = \mathfrak{m}_B[1/u] \text{ であり,} \\ \phi\text{-stable かつ } E\text{-height } \leq 1 \text{ であるもの} \end{array} \right. \right\}$$

を得る. さらに, \mathfrak{S}_B の u 進完備化を $\widehat{\mathfrak{S}}_B$, $\widehat{M}_B = M_B \otimes_{\mathfrak{S}_B} \widehat{\mathfrak{S}}_B$ とすると, Beauville-Laszlo の descent lemma ([2]) から全単射

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathfrak{m}_B \subseteq M_B \left| \begin{array}{l} M_B \text{ の rank } d \text{ の有限生成射影部分 } \mathfrak{S}_B \text{ 加群で} \\ \mathfrak{m}_B[1/u] = M_B \text{ なるもの} \end{array} \right. \right\} \\ & \rightarrow \left\{ \widehat{\mathfrak{m}}_B \subseteq \widehat{M}_B \left| \begin{array}{l} \widehat{M}_B \text{ の rank } d \text{ の有限生成射影部分 } \widehat{\mathfrak{S}}_B \text{ 加群で} \\ \widehat{\mathfrak{m}}_B[1/u] = \widehat{M}_B \text{ なるもの} \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

が存在する. ここで $\widehat{\mathfrak{S}}_B = (B \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(k))[[u]]$ であり, M_A が有限生成自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 加群なので, \widehat{M}_B も有限生成自由 $(B \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(k))((u))$ 加群である.

一般に, R_0 を環, R を R_0 代数とすると, $R((u))^d$ の有限生成射影 $R[[u]]$ 部分加群 \mathcal{L} で $R((u))$ 上 $R((u))^d$ を生成するものを $R((u))^d$ の $R[[u]]$ -lattice と言う. これは次の条件と同値 ([3, Section 2]):

- \mathcal{L} は $R((u))^d$ の $R[[u]]$ 部分加群であり, ある非負整数 i が存在して, $u^i R[[u]]^d \subseteq \mathcal{L} \subseteq u^{-i} R[[u]]^d$ かつ商加群 $u^{-i} R[[u]]^d / \mathcal{L}$ が R 上射影になる.

そこで, $F_i = u^{-i} R_0[[u]]^d / u^i R_0[[u]]^d$ と置き, \mathcal{L} の $F_i \otimes_{R_0} R = u^{-i} R[[u]]^d / u^i R[[u]]^d$ への像を $\bar{\mathcal{L}}$ と書くと, $R[[u]]$ -lattice \mathcal{L} を与えることは R 部分加群 $\bar{\mathcal{L}} \subseteq F_i \otimes_{R_0} R$ で商加群 $F_i \otimes_{R_0} R / \bar{\mathcal{L}}$ が R 上射影なものを与えることと同じ. 従って各 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, R_0 上の関手

$$R \mapsto \{ \mathcal{L} \subseteq R((u))^d \mid u^i R[[u]]^d \subseteq \mathcal{L} \subseteq u^{-i} R[[u]]^d \text{ なる } R[[u]\text{-lattice} \}$$

は Grassmann 多様体の直和 $\coprod_{t=0}^{2id} \text{Grass}(F_i, t)$ で represent される. ゆえに, R_0 上の関手

$$R \mapsto \{ \mathcal{L} \subseteq R((u))^d \mid R[[u]\text{-lattice} \}$$

も R_0 上の ind-projective スキームで represent される.

これをさっきの状況に適用すると, ϕ -stable と E -height ≤ 1 の条件は閉条件なので, $|D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}, \xi}|$ は A 上の ind-projective スキーム $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ (上のような, 各 i に応じた $W(\mathbb{F})$ 上の Grassmann 多様体の直和を \mathbb{Z}_p に Weil restriction し, さらに A に係数拡大したものを考え, その中でこの閉条件が定める閉部分スキームを取る. これは A 上の射影スキームであるが, その i を動かした順極限) で represent されると分かる. これが実際は A 上の射影スキームであることを示すためには, 条件を満たす全ての \mathfrak{M}_B がある B によらない非負整数 i に対する射影スキームに入ることができることを言えばよい.

rank d の有限生成射影 \mathfrak{S}_A 部分加群 $\mathfrak{N}_A \subseteq M_A$ で $M_A = \mathfrak{N}_A[1/u]$ なるものを固定し, $\mathfrak{N}_B = \mathfrak{N}_A \otimes_A B$ と書く. このとき, ある i が存在して, 任意の $(B, I) \in \mathfrak{Aug}_A$ と $\mathfrak{M}_B \in D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}, \xi}(B, I)$ に対し $u^i \mathfrak{N}_B \subseteq \mathfrak{M}_B \subseteq u^{-i} \mathfrak{N}_B$ となることを示せばよい. r を $u^r \mathfrak{N}_B \subseteq (1 \otimes \phi) \phi^* \mathfrak{N}_B \subseteq u^{-r} \mathfrak{N}_B$ なる最小の整数として, $\mathfrak{N}_B \subseteq u^{-i} \mathfrak{M}_B$ となる最小の整数 i を評価することを考える. $(1 \otimes \phi) \phi^*(\mathfrak{N}_B) \subseteq u^{-j} (1 \otimes \phi) \phi^*(\mathfrak{M}_B)$ となる最小の整数は $j = ip$ である. ところが,

$$\begin{aligned} (1 \otimes \phi) \phi^*(\mathfrak{N}_B) &\subseteq u^{-r} \mathfrak{N}_B \subseteq u^{-r-i} \mathfrak{M}_B \subseteq E(u)^{-1} u^{-r-i} E(u) \mathfrak{M}_B \\ &\subseteq E(u)^{-1} u^{-r-i} (1 \otimes \phi) \phi^*(\mathfrak{M}_B) \end{aligned}$$

であり, k を $p^k A = 0$ なる最小の整数, $E(u) = u^e - pF(u)$ とするとき

$$E(u)^{-1} = (1 - pF(u)/u^e)^{-1} u^{-e} = u^{-e} (1 + pF(u)/u^e + p^2(F(u)/u^e)^2 + \cdots + p^{k-1}(F(u)/u^e)^{k-1})$$

だから結局 $(1 \otimes \phi) \phi^*(\mathfrak{N}_B) \subseteq u^{-r-i-ke} (1 \otimes \phi) \phi^*(\mathfrak{M}_B)$ となるので, $r + i + ke \geq j = ip$ から $i \leq (r + ke)/(p - 1)$ を得る. r_0 を $u^{r_0} \mathfrak{N}_A \subseteq (1 \otimes \phi) \phi^* \mathfrak{N}_A \subseteq u^{-r_0} \mathfrak{N}_A$ なる最小の整数とすると $r \leq r_0$ なので, i は B と \mathfrak{M}_B によらない定数で抑えられる. $\mathfrak{M}_B \subseteq u^{-i'} \mathfrak{N}_B$ となる最小の整数 i' も同じようにして一様に評価できるので, 主張が従う. \square

注 4.4. $A \in \mathfrak{Aug}_{W(\mathbb{F})}$ なので, $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ の affine 開集合 $\text{Spec}(B)$ の affine 環 B は自然に \mathfrak{Aug}_A の元とみなせる. このことから, 各開埋め込み $\text{Spec}(B) \rightarrow \mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ に対応する \mathfrak{S}_B 上の ϕ 加群 \mathfrak{M}_B が張り合わさって, $\mathfrak{S} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}}$ 上の普遍 ϕ 加群 $\mathfrak{M}_{\xi}^{\text{univ}}$ を与えることが分かる.

この射影スキームの構成は $R \in \widehat{\mathfrak{A}}_{W(\mathbb{F})}$ なる R 上にも以下のように拡張される. $\xi \in D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}(R)$ を固定する. 定義からこれは $\xi_i = (V_R/m_R^i, \psi_i) \in D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}(R/m_R^i)$ の逆系で, 従って Galois 表現の変形 $V_R = \varprojlim V_R/m_R^i$ が定まる. この ξ について, groupoid $D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}, \xi} \rightarrow \mathfrak{A}ug_R$ を各 $(B, I) \in \mathfrak{A}ug_R$ に対し

$$D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}, \xi}(B, I) = \varprojlim_{i \geq i_0} D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}, \xi_i}(B, I)$$

で定める. ただし i_0 は $m_R^{i_0}B = 0$ となる最小の整数.

定理 4.5 ([15], Proposition (2.1.10)). R 上の射影スキーム $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi} \rightarrow \text{Spec}(R)$ が存在して次の *representability* を満たす: 任意の $(B, I) \in \mathfrak{A}ug_R$ に対し *functorial* な全単射

$$|D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}, \xi}|(B, I) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Spec}(R)}(\text{Spec}(B), \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi})$$

が存在.

証明. 定理 4.3 より, R/m_R^i 上の射影スキームの i に関する順系 $\{\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi_i} \rightarrow \text{Spec}(R/m_R^i)\}_i$ が存在する. この順系は R 上の形式スキーム $\widehat{\mathcal{G}\mathcal{R}}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ を定めるが, Grassmann 多様体の定義から各 $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi_i}$ 上には順系と両立する very ample な line bundle があるので, formal GAGA 原理より $\widehat{\mathcal{G}\mathcal{R}}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ は R 上の射影スキーム $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ で代数化される. この $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ が条件を満たす. \square

5 変形環の generic fiber と p 進 Hodge 理論

Groupoid $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ の flat 表現からなる full subgroupoid を $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square}$ で表す. $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}} \rightarrow D_{V_{\mathbb{F}}}$ が relatively pro-representable だったから $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square} \rightarrow D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ もそうである. $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\square}$ は常に pro-representable だったので, $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square}$ もある完備局所 $W(\mathbb{F})$ 代数 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square}$ で pro-represent される. また, $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ を represent する完備 Noether 局所環を (もし存在すれば) $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ で表す. この節の目的は, これらの $W(\mathbb{F})$ 代数の generic fiber $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}[1/p]$, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square}[1/p]$ の局所構造を p 進 Hodge 理論を使って調べることである. これは具体的には, Barsotti-Tate な p 進表現の標数 0 の Artin 環の圏における変形関手と $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ とを結びつけることでなされる.

5.1 generic fiber への移行

E を \mathbb{Q}_p の有限次拡大で剰余体 k_E が \mathbb{F} を含むものとする. この E に対し, 局所有限 $W(\mathbb{F})[1/p]$ 代数で剰余体が E のもの全体のなす圏を $\mathfrak{A}ug_E$ で表す. 等標数の完備局所環は係数体を持つから, $B \in \mathfrak{A}ug_E$ は標準的な E 代数の構造を持つ. そこで $B \in \mathfrak{A}ug_E$ に対し, B の有限 \mathcal{O}_E 部分代数で E 上 B を生成するもの全体のなす圏を Int_B で表す. $A \in \text{Int}_B$ なら A は局所環であり, その剰余体は k_E に含まれる.

\mathcal{O} を $W(\mathbb{F})$ 上有限完備離散付値環で, \mathcal{O}_E が \mathcal{O} の完全分岐拡大であるようなものとする. これに対し圏 $\mathfrak{A}ug_{\mathcal{O}, (\mathcal{O}_E)}$ を次のように定める: object は $\mathfrak{A}ug_{\mathcal{O}}$ の射 $A \rightarrow \mathcal{O}_E$ 全体, 射 $(\alpha : A \rightarrow \mathcal{O}_E) \rightarrow (\alpha' : A' \rightarrow \mathcal{O}_E)$ は $\widehat{\mathfrak{A}ug}_{\mathcal{O}}$ の射 $\tau : A \rightarrow A'$ で $\alpha = \alpha' \circ \tau$ となるもの全体. $A \in \text{Int}_B$ なら, A のコンパクト性から合成 $A \rightarrow B \rightarrow E$ は \mathcal{O}_E を通るので, $A \in \widehat{\mathfrak{A}ug}_{\mathcal{O}, (\mathcal{O}_E)}$ とみなせる.

一般に, groupoid $D \rightarrow \mathfrak{A}ug_{\mathcal{O}}$ と $\xi \in D(\mathcal{O}_E)$ に対し, groupoid $D_{(\xi)} \rightarrow \widehat{\mathfrak{A}ug}_{\mathcal{O}, (\mathcal{O}_E)}$ を

$$D_{(\xi)}(A) = \{ A \rightarrow \mathcal{O}_E \text{ の上にある } D \text{ の射 } \eta \rightarrow \xi \}$$

で定義する. さらに, Int_B を使ってこれを \mathfrak{A}_E 上の groupoid $D_{(\xi)} \rightarrow \mathfrak{A}_E$ に自然に拡張する. つまり, $B \in \mathfrak{A}_E$ に対し,

$$D_{(\xi)}(B) = \varinjlim_{A \in \text{Int}_B} D_{(\xi)}(A)$$

とする.

この構成は以下のような性質を持つ.

補題 5.1 ([15], Lemma (2.3.2)). D と D' を $\mathfrak{A}_\mathcal{O}$ 上の groupoid とし, $D \rightarrow D'$ を $\mathfrak{A}_\mathcal{O}$ 上の射で *relatively pro-representable* かつ *formally smooth* なものとする. $\xi \in D(\mathcal{O}_E)$ のこの射による像を $\xi' \in D'(\mathcal{O}_E)$ と書く. このとき, 自然な射 $D_{(\xi)} \rightarrow D'_{(\xi')}$ も \mathfrak{A}_E 上の groupoid の *relatively pro-representable* な *formally smooth* 射.

補題 5.2 ([15], Lemma (2.3.3)). D を $\mathfrak{A}_\mathcal{O}$ 上の groupoid で, 完備局所 \mathcal{O} 代数 R で *pro-representable* なものとし, $\xi \in D(\mathcal{O}_E)$ を固定する. このとき, \mathfrak{A}_E 上の groupoid $D_{(\xi)}$ も完備局所 $\mathcal{O}[1/p]$ 代数 \hat{R}_ξ で *pro-represent* される. ここで \hat{R}_ξ は, ξ が引き起こす射 $R \otimes_{\mathcal{O}} E \rightarrow E$ の核 I_ξ による $R \otimes_{\mathcal{O}} E$ の完備化.

つまり, D から $D_{(\xi)}$ を作る操作は, D を *pro-represent* する変形環 R から R の generic fiber の完備局所環を作る操作に対応している.

5.2 Barsotti-Tate p 進表現の変形

前小節の結果を $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ や $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square}$ に適用する. $\tilde{\xi} = (V_{\mathcal{O}_E}, \beta_{\mathcal{O}_E}) \in D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square}(\mathcal{O}_E)$ を固定し, その $D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}(\mathcal{O}_E)$ への像を ξ と書く. また, $V_\xi = V_{\mathcal{O}_E} \otimes_{\mathcal{O}_E} E$ と置く. 変形環 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}, R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square}$ に対し, ξ や $\tilde{\xi}$ が引き起こす射 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}} \otimes_{W(\mathbb{F})} E \rightarrow E$, $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square} \otimes_{W(\mathbb{F})} E \rightarrow E$ の核による左辺の完備化をそれぞれ $\hat{R}_\xi^{\text{fl}}, \hat{R}_\xi^{\text{fl}, \square}$ で表す. これらが E 上 *formally smooth* であることを示したい. そのためには, 必要ならば \mathbb{F} を有限次拡大して, \mathcal{O}_E が $\mathcal{O} = W(\mathbb{F})$ 上完全分岐としてよい.

さて flat 表現の逆極限として得られる p 進表現は Barsotti-Tate である (Raynaud の定理, [19, Proposition 2.3.1]) ので, $V_{\mathcal{O}_E}$ は \mathcal{O}_K 上のある p -divisible 群の Tate 加群であり, V_ξ は Barsotti-Tate な p 進表現である. G_K 表現 V_ξ の \mathfrak{A}_E における変形と枠付き変形を分類する \mathfrak{A}_E 上の groupoid D_{V_ξ} と $D_{V_\xi}^{\square}$ をそれぞれ考える. このとき, 自然な射

$$\begin{aligned} D_{V_{\mathbb{F}}, (\xi)} &\rightarrow D_{V_\xi} \\ [V_A]_{A \in \text{Int}_B} &\mapsto V_A \otimes_{\mathcal{O}_E} E \end{aligned}$$

は \mathfrak{A}_E 上の圏同値である. 同様に \mathfrak{A}_E 上の圏同値 $D_{V_{\mathbb{F}}, (\tilde{\xi})}^{\square} \rightarrow D_{V_\xi}^{\square}$ を得る.

さらに, $(V_B, \psi) \in D_{V_\xi}$ であって, V_B が E 係数の G_K 表現として *crystalline* なもの全体のなす D_{V_ξ} の full subgroupoid を $D_{V_\xi}^{\text{crys}}$ で表す. $D_{V_\xi}^{\text{crys}, \square}$ も同様に定義する. V_B は E 係数の G_K 表現としては V_ξ の successive extension だから, 従って Barsotti-Tate な p 進表現であることに注意する. Raynaud の定理より, 上の圏同値は圏同値

$$D_{V_{\mathbb{F}}, (\xi)}^{\text{fl}} \rightarrow D_{V_\xi}^{\text{crys}}, \quad D_{V_{\mathbb{F}}, (\tilde{\xi})}^{\text{fl}, \square} \rightarrow D_{V_\xi}^{\text{crys}, \square}$$

を引き起こす ([15, Proposition (2.3.8)]). 従って, 変形環 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}, R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square}$ の generic fiber の局所構造を調べることは, 標数 0 の変形を分類する groupoid $D_{V_\xi}^{\text{crys}}, D_{V_\xi}^{\text{crys}, \square}$ を調べることに帰着された. これらの groupoid に関しては, 係数付きのフィルター付き ϕ 加群の変形を具体的に構成することにより, 次の補題を示せる:

補題 5.3 ([15], Lemma (2.3.9)). 関手 $|D_{V_\xi}^{\text{crys}}|$ は *formally smooth*.

Ordered basis を忘れる射 $D_{V_\xi}^{\text{fl}, \square} \rightarrow D_{V_\xi}^{\text{fl}}$ は relatively pro-representable かつ formally smooth だったから, 前小節の一般論と補題 5.3 により結局, 完備局所 E 代数 $\hat{R}_\xi^{\text{fl}}, \hat{R}_\xi^{\text{fl}, \square}$ が E 上 formally smooth であることが分かった.

5.3 p 進 Hodge 型と generic fiber の Krull 次元

実際に Taylor-Wiles 系の貼り合わせを行うためには, これらの完備局所 E 代数 $\hat{R}_\xi^{\text{fl}}, \hat{R}_\xi^{\text{fl}, \square}$ の Krull 次元を知っておく必要がある. この次元を記述するために以下のような言葉の定義をする.

\mathbb{Q}_p 上の体の埋め込み $\psi: K \rightarrow \bar{K}_0$ に対し $v_\psi \in \{0, 1, \dots, d\}$ を固定し, $\mathbf{v} = (v_\psi)_\psi$ と置く. また, $\psi_0 = \psi|_{K_0}$ と表す. 各 $\sigma \in \text{Gal}(K_0/\mathbb{Q}_p)$ に対し, その $\text{Gal}(\bar{K}_0/\mathbb{Q}_p)$ への lift $\tilde{\sigma}$ を選んでおく. このとき, 集合 $\{\psi: K \rightarrow \bar{K}_0 \mid \psi_0 = \sigma\}$ を index set として持つ整数の e -tuple \mathbf{v}_σ を $\mathbf{v}_\sigma = (v_{\tilde{\sigma} \circ \psi})_\psi$ で定義する. \mathbf{v} や \mathbf{v}_σ の ψ 成分を v_ψ や $v_{\sigma, \psi}$ で表す.

\mathbb{Q}_p の有限次拡大 F で, 各 σ に対する \mathbf{v}_σ の reflex field

$$\bar{K}_0^{\{g \in \text{Gal}(\bar{K}_0/K_0) \mid \mathbf{v}_{\sigma, \psi} = \mathbf{v}_{\sigma \circ g, \psi}\}}$$

を含んでいるものを固定する. さらに, 以下 \mathbb{F} として F の剰余体を取る.

定義 5.4. E を F の有限次拡大, $\xi \in D_{V_\xi}^{\text{fl}}(\mathcal{O}_E)$ とするとき, ξ に対応する E 係数の G_K 表現 V_ξ が p 進 Hodge 型 \mathbf{v} であるとは, 任意の $a \in K$ に対し条件

$$\det_E(a|_{D_{\text{crys}}(V_\xi)_K/\text{Fil}^0 D_{\text{crys}}(V_\xi)_K}) = \prod_{\psi} \psi(a)^{v_\psi}$$

が成立することを言う. この条件の正確な意味は, x を K の \mathbb{Q}_p 生成元, $n = [K:\mathbb{Q}_p]$, X_0, \dots, X_{n-1} を不定元とすると,

$$\begin{aligned} & \det_E(X_0 + xX_1 + \dots + x^{n-1}X_{n-1}|_{D_{\text{crys}}(V_\xi)_K/\text{Fil}^0 D_{\text{crys}}(V_\xi)_K}) \\ &= \prod_{\psi} (X_0 + \psi(x)X_1 + \dots + \psi(x^{n-1})X_{n-1})^{v_\psi} \end{aligned}$$

が成立すること. $\tilde{\xi} \in D_{V_\xi}^{\text{fl}, \square}(\mathcal{O}_E)$ に対しても同様に定義する.

注 5.5. この条件が成立するかどうかは K の \mathbb{Q}_p 生成元の取り方によらない. また, この条件はさらに次のように言い換えられる. \mathbb{Q}_p 上の体の埋め込み $E \rightarrow \bar{K}_0$ をひとつ固定し, これにより E を \bar{K}_0 の部分体だと思う. $I = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, \bar{K}_0)$ の G_E 軌道分解を $I = \coprod_{i=1}^s I_i$ と書く. 各 I_i に対し, $\psi_i \in I_i$ を適当に選び, $E_i = E(\psi_i(x))$ と置く. 従って $\prod_{i=1}^s \psi_i: E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K \rightarrow \prod_{i=1}^s E_i$ は同型である. この直積分解に応じて $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ 加群 $\text{gr}^{-1} D_{\text{crys}}(V_\xi)_K$ も E_i ベクトル空間 D_i の積に分解される. このとき, V_ξ が p 進 Hodge 型 \mathbf{v} であるための条件は, $\psi \in I_i$ ならば $\dim_{E_i} D_i = v_\psi$ であること. とくに E が K/\mathbb{Q}_p の Galois 閉包を含む場合は, $\#I_i = 1$ なので, この条件は $\text{gr}^{-1} D_{\text{crys}}(V_\xi)_K$ の E 部分空間で $x \in K$ が $\psi(x) \in E$ で作用するものの次元が v_ψ であることと同値.

E 上の formal smoothness は既に分かっているので, 接空間の次元を計算することで次の命題が示せる.

命題 5.6 ([15], Corollary (2.3.11)). 1. $\tilde{\xi}$ が p 進 Hodge 型 \mathbf{v} だとすると, $\dim \hat{R}_\xi^{\text{fl}, \square} = d^2 + \sum_{\psi} v_\psi (d - v_\psi)$.

2. さらに $\text{End}_{\mathbb{F}[G_K]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ が成り立つときは, $\dim \hat{R}_{\xi}^{\text{fl}} = 1 + \sum_{\psi} v_{\psi}(d - v_{\psi})$.

証明. 接空間 $|D_{V_{\xi}^{\text{crys}}}|(E[\varepsilon])$ は

$$H_{\mathbb{F}}^1(G_K, \text{ad}V_{\xi}) = \text{Ker}(H^1(G_K, \text{ad}V_{\xi}) \rightarrow H^1(G_K, B_{\text{crys}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \text{ad}V_{\xi}))$$

と同型だが, 完全系列

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow B_{\text{crys}} \xrightarrow{(1-\phi, \text{can})} B_{\text{crys}} \oplus B_{\text{dR}}/\text{Fil}^0 B_{\text{dR}} \rightarrow 0$$

から等式

$$\dim_E H_{\mathbb{F}}^1(G_K, \text{ad}V_{\xi}) = \dim_E H^0(G_K, \text{ad}V_{\xi}) + \dim_E \text{gr}^{-1} D_{\text{crys}}(\text{ad}V_{\xi})_K$$

を得る. $\text{ad}V_{\xi} = V_{\xi} \otimes_E V_{\xi}^{\vee}$ だから,

$$\text{gr}^{-1} D_{\text{crys}}(\text{ad}V_{\xi}) = \text{gr}^{-1} D_{\text{crys}}(V_{\xi})_K \otimes_{E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} (\text{Fil}^0 D_{\text{crys}}(V_{\xi})_K)^{\vee}$$

である. 従って, この空間の E 上の次元は $\sum_{\psi} v_{\psi}(d - v_{\psi})$ となる. 主張はここから従う. \square

6 $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ の局所構造と変形環の generic fiber の連結成分

この節では, 変形環 $R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}, R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square}$ 上の射影スキーム $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ の特異性の解析を行い, その帰結として, 変形環の generic fiber の連結性を有限平坦モデルのモジュライの closed fiber の連結性に帰着させる.

6.1 ある図式

記号を小節 5.3 の通りとする. この小節の目標は, $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ 上の groupoid の formally smooth 射の図式 $\bar{D}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\vee} \leftarrow \tilde{D}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\vee} \rightarrow D_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\vee}$ を構成することである. 後の小節で, $D_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\vee}$ を $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ の完備局所環と, $\bar{D}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\vee}$ を志村多様体の local model ([18]) の完備局所環とそれぞれ結びつける. これによって, $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ の特異性の解析を志村多様体の local model の特異性の解析 ([18] でなされている) に帰着させることができる.

$\mathfrak{M}_{\mathbb{F}} \in (\text{ModFI}/\mathcal{G})_{\mathbb{F}}$ で, 任意の $a \in \mathcal{O}_K$ に対し条件

$$\det_{\mathbb{F}}(a|_{1 \otimes \phi(\phi^* \mathfrak{M}_{\mathbb{F}})/u^e \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}) = \prod_{\psi} \psi(a)^{v_{\psi}}$$

を満たすものを固定する. この条件の意味は以下の通り. $u \mapsto \pi$ により $W[[u]]/(E(u)) \simeq \mathcal{O}_K$ と同一視すると, $\mathcal{G}_{\mathbb{F}}$ 加群 $1 \otimes \phi(\phi^* \mathfrak{M}_{\mathbb{F}})/u^e \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ は有限 $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ 加群とみなせる. 有限 \mathbb{Z}_p 代数 \mathcal{O}_K の生成元 x を取る. $n = [K : \mathbb{Q}_p]$ とし, X_0, \dots, X_{n-1} を不定元とする. このとき条件は, \mathbb{F} 上の多項式としての等式

$$\begin{aligned} \det_{\mathbb{F}}(X_0 + xX_1 + \dots + x^{n-1}X_{n-1}|_{1 \otimes \phi(\phi^* \mathfrak{M}_{\mathbb{F}})/u^e \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}) \\ = \prod_{\psi} (X_0 + \psi(x)X_1 + \dots + \psi(x^{n-1})X_{n-1})^{v_{\psi}} \end{aligned}$$

が成立すること. また, rank d の有限生成自由 \mathcal{O}_K 加群 Λ と, $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}$ 加群の同型 $\iota : \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}/u^e \mathfrak{M}_{\mathbb{F}} F \rightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}$ を固定する.

まず, これらに対し $\mathfrak{A}_{\mathcal{O}_F}$ 上の groupoid $\bar{D}_{\mathfrak{M}_F}^{\vee}, D_{\mathfrak{M}_F}^{\vee}, \tilde{D}_{\mathfrak{M}_F}^{\vee}$ を構成する. それぞれ $A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{O}_F}$ 上の object は以下の通り:

$\bar{D}_{\mathfrak{M}_F}^{\vee}(A)$: $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 加群 L_A と, $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 加群の単射 $\varepsilon_A : L_A \rightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ の組 (L_A, ε_A) で次の条件を満たすもの全体:

- $L_A \subseteq \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ は A 加群として直和因子.
- 任意の $a \in \mathcal{O}_K$ に対し, 条件 $\det_A(a|_{L_A}) = \prod_{\psi} \psi(a)^{v_{\psi}}$ が成立 (この条件の意味は上と同様).
- $L_A \otimes_A \mathbb{F} \xrightarrow{\varepsilon_A \otimes 1} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{M}_F/u^e \mathfrak{M}_F$ の像が $1 \otimes \phi(\phi^* \mathfrak{M}_F)/u^e \mathfrak{M}_F$ と一致.

$D_{\mathfrak{M}_F}^{\vee}(A)$: $\mathfrak{M}_A \in (\text{ModFI}/\mathcal{G})_A$ と, \mathcal{G}_F 上の ϕ 加群の同型 $\psi_A : \mathfrak{M}_A \otimes_A \mathbb{F} \rightarrow \mathfrak{M}_F$ の組 (\mathfrak{M}_A, ψ_A) で, 条件

$$\det_A(a|_{1 \otimes \phi(\phi^* \mathfrak{M}_A)/u^e \mathfrak{M}_A}) = \prod_{\psi} \psi(a)^{v_{\psi}}$$

を満たすもの全体 (A が有限局所 \mathbb{Z}_p 代数で $\mathfrak{M}_A \in (\text{ModFI}/\mathcal{G})_A$ なら, $1 \otimes \phi(\phi^* \mathfrak{M}_A)/u^e \mathfrak{M}_A$ は A 上有限生成自由であることが示せる ([15, Lemma (1.2.2)]).

$\tilde{D}_{\mathfrak{M}_F}^{\vee}(A)$: $(\mathfrak{M}_A, \psi_A) \in D_{\mathfrak{M}_F}^{\vee}(A)$ と, $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ 加群の同型 $\iota_A : \mathfrak{M}_A/E(u)\mathfrak{M}_A \rightarrow \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ で, 図式

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_A/E(u)\mathfrak{M}_A \otimes_A \mathbb{F} & & \\ \psi_A \downarrow & \searrow \iota_A \otimes 1 & \\ \mathfrak{M}_F/u^e \mathfrak{M}_F & \xrightarrow{\iota} & \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F} \end{array}$$

を可換にするもの組 $(\mathfrak{M}_A, \psi_A, \iota_A)$ 全体.

それぞれ射も自然に定義する. このとき次の命題を示すことができる:

命題 6.1 ([15], Proposition (2.2.11)). $\mathfrak{A}_{\mathcal{O}_F}$ 上の groupoid の射

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathfrak{M}_F}^{\vee} &\rightarrow D_{\mathfrak{M}_F}^{\vee} : (\mathfrak{M}_A, \psi_A, \iota_A) \mapsto (\mathfrak{M}_A, \psi_A) \\ \tilde{D}_{\mathfrak{M}_F}^{\vee} &\rightarrow \bar{D}_{\mathfrak{M}_F}^{\vee} : (\mathfrak{M}_A, \psi_A, \iota_A) \mapsto (1 \otimes \phi(\phi^* \mathfrak{M}_A)/u^e \mathfrak{M}_A, \iota_A) \end{aligned}$$

は *formally smooth* で, 第一の射は *relatively pro-representable*.

証明. relative pro-representability は次のようにして分かる: $\eta = (\mathfrak{M}_A, \psi_A) \in D_{\mathfrak{M}_F}^{\vee}(A)$ を固定する. $A' \in \mathfrak{A}_{\mathcal{O}_F}$ に対し $(\bar{D}_{\mathfrak{M}_F}^{\vee} \times_{D_{\mathfrak{M}_F}^{\vee}} \xi)(A')$ は, A' 上の object が

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} A'}((\mathfrak{M}_A/E(u)\mathfrak{M}_A) \otimes_A A', \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}}(\mathfrak{M}_F/u^e \mathfrak{M}_F, \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F})$$

による ι の逆像であるような discrete な groupoid と圏同値であり, これは Hom スキームの閉部分スキームの完備化で pro-represent される. さらにこの形式スキームは

$$A' \mapsto \text{Ker}(\text{Aut}_{\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} A'}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A') \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}))$$

で定まる smooth 形式群の torsor だから, formally smooth と分かる. 第二の射の formal smoothness は具体的に変形を構成することで示せる. \square

6.2 local model

まず, [18] の内容を簡単にまとめておく. 一般に, K_0 上の体の埋め込み $\varphi : K \rightarrow \bar{K}_0$ に対し $r_\varphi \in \{0, 1, \dots, d\}$ を選んでおき, $\mathbf{r} = (r_\varphi)_\varphi$ と置く. $F_{\mathbf{r}}$ を \mathbf{r} の reflex field とし, $\mathbb{F}_{\mathbf{r}}$ を $F_{\mathbf{r}}$ の剰余体とする. $\mathcal{O}_{F_{\mathbf{r}}}$ 上の関手 $M_{\mathbf{r}}$ を, $\mathcal{O}_{F_{\mathbf{r}}}$ 上のスキーム T に対し $M_{\mathbf{r}}(T)$ を次のように定めることで定義する:

- 部分 $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathcal{O}_T$ 加群 $L_T \subseteq \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathcal{O}_T$ で, T 上 local には直和因子であり, 任意の $a \in \mathcal{O}_K$ に対して条件

$$\det_{\mathcal{O}_T}(a|_{L_T}) = \prod_{\varphi} \varphi(a)^{r_\varphi}$$

を満たすもの全体. ここで, 条件の意味は前と同様だが, \mathcal{O}_K の \mathcal{O}_{K_0} 生成元について考える.

このとき, 関手 $M_{\mathbf{r}}$ は $\mathcal{O}_{F_{\mathbf{r}}}$ 上の射影スキーム $M_{\mathbf{r}}$ で represent される. さらに, $M_{\mathbf{r}}^{\text{loc}}$ で開埋め込み $M_{\mathbf{r}} \times_{\mathcal{O}_{F_{\mathbf{r}}}} F_{\mathbf{r}} \rightarrow M_{\mathbf{r}}$ のスキーム論的閉包を表し, $\bar{M}_{\mathbf{r}}^{\text{loc}} = M_{\mathbf{r}}^{\text{loc}} \times_{\mathcal{O}_{F_{\mathbf{r}}}} \mathbb{F}_{\mathbf{r}}$ とする.

定理 6.2 ([18], Theorem B). 1. $M_{\mathbf{r}}^{\text{loc}}$ は normal かつ CM.

2. $\bar{M}_{\mathbf{r}}^{\text{loc}}$ は reduced かつ normal で, rational singularity しか持たない.
3. $\{r_\varphi\}_\varphi$ の任意のふたつの元が高々1しか違わないとする. このとき, すべての r_φ が0または1か, もしくは $e \leq 2$ なら $M_{\mathbf{r}} = M_{\mathbf{r}}^{\text{loc}}$.

さて次に $M_{\mathbf{r}}$ の \mathbb{Q}_p 上の variant を考える. \mathcal{O}_F 上の関手 $M_{\mathbf{v}}$ を, \mathcal{O}_F 上のスキーム T に対し $M_{\mathbf{v}}(T)$ を次のように定めることで定義する:

- 部分 $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_T$ 加群 $L_T \subseteq \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_T$ で, T 上 local には直和因子であり, 任意の $a \in \mathcal{O}_K$ に対して条件

$$\det_{\mathcal{O}_T}(a|_{L_T}) = \prod_{\psi} \psi(a)^{v_\psi}$$

を満たすもの全体 (こっこの条件は, 前と同じで \mathcal{O}_K の \mathbb{Z}_p 生成元に関するもの).

すると定義から関手 $M_{\mathbf{v}}$ は \mathcal{O}_F 上の射影スキーム $M_{\mathbf{v}} = \times_{\mathcal{O}_F} M_{\mathbf{v}_\sigma}^{\tilde{\sigma}}$ で represent される. ここで $\times_{\mathcal{O}_F}$ はすべての $\sigma \in \text{Gal}(K_0/\mathbb{Q}_p)$ をわたる \mathcal{O}_F 上のファイバー積で, $M_{\mathbf{v}_\sigma}^{\tilde{\sigma}}$ は $M_{\mathbf{v}_\sigma} \times_{\mathcal{O}_{F_{\mathbf{v}_\sigma}}} \mathcal{O}_F$ の $\tilde{\sigma}|_{\mathcal{O}_F}$ による引き戻しを意味する. そこで, $M_{\mathbf{v}}^{\text{loc}}$ で開埋め込み $M_{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{O}_F} F \rightarrow M_{\mathbf{v}}$ のスキーム論的閉包を表し, $\bar{M}_{\mathbf{v}}^{\text{loc}} = M_{\mathbf{v}}^{\text{loc}} \times_{\mathcal{O}_F} \mathbb{F}$ と置く. すると, 定理 6.2 から次のことが分かる.

定理 6.3 ([15], Corollary (2.2.8)). 1. $M_{\mathbf{v}}^{\text{loc}}$ は normal かつ CM.

2. $\bar{M}_{\mathbf{v}}^{\text{loc}}$ は reduced かつ normal で, rational singularity しか持たない.
3. $\{v_\psi\}_\psi$ の任意のふたつの元が高々1しか違わないとする. このとき, すべての v_ψ が0または1か, もしくは $e \leq 2$ なら $M_{\mathbf{v}} = M_{\mathbf{v}}^{\text{loc}}$.

さらに定義から, $\bar{D}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}} \rightarrow \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ は $M_{\mathbf{v}}$ の閉点 $(1 \otimes \phi(\phi^* \mathfrak{M}_{\mathbb{F}})/u^e \mathfrak{M}_{\mathbb{F}} \subseteq \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}/u^e \mathfrak{M}_{\mathbb{F}} \simeq \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}) \in M_{\mathbf{v}}(\mathbb{F})$ における完備局所環 $\bar{R}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}}$ で pro-represent されることも分かる.

6.3 変形環の \mathbf{v} 成分

記号をいままでの通りとする. $V_{\mathbb{F}}$ は \mathbb{F} 係数の flat G_K 表現であり, $M_{\mathbb{F}}$ は $V_{\mathbb{F}} = T_{\mathbb{F}}(M_{\mathbb{F}})(1)$ を満たす $\Phi M_{\mathcal{O}_{\mathbb{E}, \mathbb{F}}}$ の元であった. さらに, $R \in \widehat{\mathfrak{A}}_{\mathcal{O}_F}$ と $\xi = (V_{\xi}, \psi) \in D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}(R)$ を固定する. このとき, F の有限次拡大 E に対し, 完備局所 \mathcal{O}_F 代数の射 $y: R \rightarrow \mathcal{O}_E$ が p 進 Hodge 型 \mathbf{v} であるとは, $V_{\xi} \otimes_{R, y} \mathcal{O}_E$ が p 進 Hodge 型 \mathbf{v} であることと定義する. すると Sen の定理 ([20]) から, $\text{Spec}(R[1/p])$ の連結成分の合併 $C^{\mathbf{v}}$ で次の性質を持つものが存在することが分かる:

$y: R \rightarrow \mathcal{O}_E$ が p 進 Hodge 型 $\mathbf{v} \Leftrightarrow y^*: \text{Spec}(E) \rightarrow \text{Spec}(R[1/p])$ が $C^{\mathbf{v}}$ を通る.

$C^{\mathbf{v}}$ の $\text{Spec}(R)$ におけるスキーム論的閉包を $\text{Spec}(R^{\mathbf{v}})$ と書く. 以下では $\text{Spec}(R^{\mathbf{v}}[1/p])$ の連結性を調べるために, 射影スキーム $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} \rightarrow \text{Spec}(R)$ の $R^{\mathbf{v}}$ 上の対応物を構成する.

$D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}} \rightarrow \mathfrak{A}\text{ug}_{W(\mathbb{F})}$ の $\mathfrak{A}\text{ug}_{\mathcal{O}_F} \subseteq \mathfrak{A}\text{ug}_{W(\mathbb{F})}$ への制限 $D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}}|_{\mathcal{O}_F}$ に対し, その full subgroupoid $D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}} \rightarrow \mathfrak{A}\text{ug}_{\mathcal{O}_F}$ を, $(B, I) \in \mathfrak{A}\text{ug}_{\mathcal{O}_F}$ 上の object を次のように定めることで定義する:

- $(\mathfrak{M}_B, \psi_B: \mathcal{O}_{\mathbb{E}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}_B \otimes_B B/I \rightarrow M_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} B/I) \in D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}}(B, I)$ で, 任意の $a \in \mathcal{O}_K$ に対し条件

$$\det_B(a|_{1 \otimes \phi(\phi^* \mathfrak{M}_B)/E(u) \mathfrak{M}_B}) = \prod_{\psi} \psi(a)^{v_{\psi}}$$

を満たすもの全体.

さらに, $D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}} = \xi \times_{D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}|_{\mathfrak{A}\text{ug}_{\mathcal{O}_F}}} D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}}$ と置く. すると, 上の条件が閉条件であることから, 閉部分スキーム $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} \subseteq \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}$ で, 任意の $(B, I) \in \mathfrak{A}\text{ug}_{\mathcal{O}_F}$ に対し functorial な全単射

$$|D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}}|(B, I) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Spec}(R)}(\text{Spec}(B), \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}})$$

が存在するようなものが構成できる ([15, Lemma (2.4.3)]).

以下では $\xi \in D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}(R)$ を, 次の仮定が満たされるように選ぶことにする:

$\widehat{\mathfrak{A}}_{\mathcal{O}_F}$ 上の射 $\xi \rightarrow D_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}}$ が formally smooth.

例えば, $R = R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}_F, R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}, \square} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}_F$ とその普遍対象 ξ はこの仮定を満たす.

この仮定のもとで, $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}}$ を開埋め込み $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{O}_F} F \rightarrow \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}}$ のスキーム論的閉包とし, $\overline{\mathcal{G}\mathcal{R}}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} = \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{O}_F} \mathbb{F}, \overline{\mathcal{G}\mathcal{R}}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}} = \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \times_{\mathcal{O}_F} \mathbb{F}$ と置く.

定理 6.4 ([15], Proposition (2.4.6)). 1. $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}}$ は normal かつ CM.

2. $\overline{\mathcal{G}\mathcal{R}}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}}$ は reduced かつ normal で, rational singularity しか持たない.

3. $\{v_{\psi}\}_{\psi}$ の任意のふたつの元が高々1しか変わらないとする. このとき, すべての v_{ψ} が 0 または 1 か, もしくは $e \leq 2$ なら $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}} = \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}}$.

証明. どの主張も各閉点での完備局所環で判定できるので, (必要なら \mathbb{F} を有限次拡大と取り替えて) $y \in \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}}(\mathbb{F})$ での完備局所環を考える. 上の全単射から y に対応する $\mathfrak{S}_{\mathbb{F}}$ 上の ϕ 加群 $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ が取れる. $\widehat{\mathfrak{A}}_{\mathcal{O}_F}$ 上の groupoid の射

$$D_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}} \rightarrow D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}} : (\mathfrak{M}_B, \psi_B) \mapsto (\mathfrak{M}_B, 1 \otimes \psi_B)$$

を考えると、次のような $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}$ 上の groupoid の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{D}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} & \longrightarrow & \tilde{D}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}} & \longrightarrow & \bar{D}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
D_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} & \longrightarrow & D_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} & \longrightarrow & D_{\mathfrak{S}, M_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\xi & \longrightarrow & D_{V_{\mathbb{F}}}^{\mathfrak{h}} & &
\end{array}$$

ここで、四角は全て cartesian であり、横向き射は全て formally smooth, 一番上の段の下向き射はどちらも formally smooth かつ relatively pro-representable である。また、定義から $D_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}}$ は $y \in \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}}$ の完備局所環 $R_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}} = \hat{O}_{\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}, y}$ で pro-represent されることが示せる。従って、 $\tilde{D}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}}$ もある完備局所環 $\tilde{R}_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}}$ で pro-represent される。さらに、 $R_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}, \text{loc}} = R_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}} / (p\text{-torsion})$, $\tilde{R}_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}, \text{loc}} = \tilde{R}_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}} / (p\text{-torsion})$ と置くと、完備局所環の射 $R_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}} \rightarrow \tilde{R}_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}}$ は平坦なので、 $\tilde{R}_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}, \text{loc}} = \tilde{R}_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}} \otimes_{R_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}}} R_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}, \text{loc}}$ であり、従って完備局所環の射 $R_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \rightarrow \tilde{R}_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}, \text{loc}}$ も formally smooth である。

一方、

$$R_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}, \text{loc}} = \begin{cases} y \in \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \text{ における完備局所環} & \text{if } y \in \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。同様に、 y に対し $\bar{y} = (1 \otimes \phi(\phi^* \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}) / u^e \mathfrak{M}_{\mathbb{F}}) \in M_{\mathbf{v}}(\mathbb{F})$ を考えると、

$$\bar{R}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}, \text{loc}} = \bar{R}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}} / (p\text{-torsion}) = \begin{cases} \bar{y} \in M_{\mathbf{v}}^{\text{loc}} \text{ における完備局所環} & \text{if } \bar{y} \in M_{\mathbf{v}}^{\text{loc}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。さっきと同様に完備局所環の射 $\bar{R}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \rightarrow \tilde{R}_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}, \text{loc}}$ も formally smooth だから結局、完備局所環の formally smooth 射の図式

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{R}_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}} & \longleftarrow & \bar{R}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}} \\
\uparrow & & \uparrow \\
R_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}} & & R_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \\
& & \longleftarrow \bar{R}_{\mathfrak{M}_{\mathbb{F}}}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \\
& & \uparrow \\
& & R_{V_{\mathbb{F}}, y}^{\mathbf{v}, \text{loc}}
\end{array}$$

を得る。右上の完備局所環の性質 (normal, reduced, rational singularity, loc との一致...) は下側の完備局所環に伝播するから、主張は定理 6.3 から従う。□

射影な構造射 $\Theta_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} : \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} \rightarrow \text{Spec}(R)$ を考える。両辺の \mathbf{v} 部分の定義より、この射は射影射 $\Theta_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}} : \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \rightarrow \text{Spec}(R^{\mathbf{v}})$ を引き起こす。 $\Theta_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}}$ の generic fiber への制限

$$\Theta_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} F : \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \times_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} F \rightarrow \text{Spec}(R^{\mathbf{v}}[1/p])$$

を考える。 F の有限次拡大 E を取る。この射が E 値点に引き起こす射は、 \mathcal{O}_K 上の p -divisible 群全体から G_K の Barsotti-Tate p 進表現全体への、 Tate 加群を対応させる射が引き起こすものだから、 Tate の定理 ([22, Theorem 4]) により全単射である。ところが $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \times_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} F$ は normal かつ CM であり、 $R^{\mathbf{v}}[1/p]$ も (ξ の formal smoothness の仮定と、補題 5.3 より) regular である。これらのことから $\Theta_{V_{\mathbb{F}}, \xi}^{\mathbf{v}} \times_{\mathcal{O}_{\mathbb{F}}} F$ が同型であると分かる。つまり:

定理 6.5 ([15], Proposition (2.4.8)). 射 $\Theta_{V_F} : D_{\mathfrak{S}, \mathfrak{M}_F} \rightarrow D_{V_F}^{\text{fl}}$ は \mathcal{O}_F 上のスキームの射影射

$$\Theta_{V_F, \xi}^{\mathbf{v}} : \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_F, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \rightarrow \text{Spec}(R^{\mathbf{v}})$$

を引き起こす. この射は $\times_{\mathcal{O}_F} F$ すると同型.

さらに, $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_F, 0}^{\mathbf{v}, \text{loc}} = \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_F, \xi}^{\mathbf{v}, \text{loc}} \times_{R^{\mathbf{v}}} R^{\mathbf{v}}/m_{R^{\mathbf{v}}}$ と置く. するとこの定理と定理 6.4 から次の系が従う:

系 6.6. 連結成分の集合の全単射 $\pi_0(\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_F, 0}^{\mathbf{v}, \text{loc}}) \rightarrow \pi_0(\text{Spec}(R^{\mathbf{v}}[1/p]))$ が存在する.

6.4 etale 商と multiplicative 部分

定義から $\text{Spec}(R^{\mathbf{v}}[1/p])$ は連結成分の合併だったが, ここから連結成分そのものを取り出すことを考える.

定理 6.7 ([15], Proposition (2.4.14)). $(B, I) \in \mathfrak{A}\mathfrak{u}\mathfrak{g}_{W(\mathbb{F})}$, $\mathfrak{M}_B \in D_{\mathfrak{S}, M_F}(B, I)$ とする. このとき \mathfrak{M}_B には, 最大 *multiplicative* 部分 ϕ 加群 $\mathfrak{M}_B^{\text{m}}$ と最大 *etale* 商 ϕ 加群 $\mathfrak{M}_B^{\text{et}}$ が存在して係数拡大と両立する.

証明. $B \in \mathfrak{A}\mathfrak{M}_{W(\mathbb{F})}$ の場合だけ考える.

$$\phi^* \cdots \phi^* \mathfrak{M}_B \xrightarrow{1 \otimes \phi} \cdots \xrightarrow{1 \otimes \phi} \phi^* \mathfrak{M}_B \xrightarrow{1 \otimes \phi} \mathfrak{M}_B$$

を最右辺の部分加群と同一視して,

$$\mathfrak{M}_B^{\text{m}} = \bigcap_{i=1}^{\infty} (\phi^*)^i \mathfrak{M}_B, \quad \mathfrak{M}_B^{\text{et}} = ((\mathfrak{M}_B^*)^{\text{m}})^*$$

と置けばよい. ここで \mathfrak{M}_B^* は $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_B}(\mathfrak{M}_B, \mathfrak{S}_B)$ に自然な ϕ 加群の構造を入れたもの. \square

この定理により, $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_F, 0}^{\mathbf{v}, \text{loc}}$ 上の普遍 ϕ 加群 $\mathfrak{M}_0^{\mathbf{v}, \text{loc}}$ に対しても $\mathfrak{M}_0^{\mathbf{v}, \text{loc}, \text{m}}$, $\mathfrak{M}_0^{\mathbf{v}, \text{loc}, \text{et}}$ を定義できる. これらの ϕ 加群を使って, 非負整数の組 $\mathbf{d} = \{d_{\text{m}}, d_{\text{et}}\}$ に対し連結成分の合併 $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_F, 0}^{\mathbf{v}, \text{loc}, \mathbf{d}} \subseteq \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_F, 0}^{\mathbf{v}, \text{loc}}$ を

$$x \in \mathcal{G}\mathcal{R}_{V_F, 0}^{\mathbf{v}, \text{loc}, \mathbf{d}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}_{0, x}^{\mathbf{v}, \text{loc}, \text{m}} \text{ が } \text{rank } d_{\text{m}} \\ \mathfrak{M}_{0, x}^{\mathbf{v}, \text{loc}, \text{et}} \text{ が } \text{rank } d_{\text{et}} \end{array} \right\}$$

で定義する ([15, Proposition (2.4.14)] の証明で, これらの rank が局所定数関数であることを示している). 系 6.6 によって対応する $\text{Spec}(R^{\mathbf{v}}[1/p])$ の連結成分の合併が得られるが, その $\text{Spec}(R^{\mathbf{v}})$ におけるスキーム論的閉包を $\text{Spec}(R^{\mathbf{v}, \mathbf{d}})$ と置く. 定義から $R^{\mathbf{v}, \mathbf{d}}$ は次のような性質を持つ: E を F の有限次拡大とし, $x : R^{\mathbf{v}} \rightarrow \mathcal{O}_E$ を \mathcal{O}_F 上の射とする. $V_E = V_{\xi} \otimes_{R^{\mathbf{v}, x}} E$ と書くとき, x が $R^{\mathbf{v}, \mathbf{d}}$ を通るための必要十分条件は,

$$\begin{array}{l} V_E(-1) \text{ の最大不分岐部分表現の次元が } d_{\text{m}} \\ V_E \text{ の最大不分岐商表現の次元が } d_{\text{et}} \end{array}$$

であること.

さて本稿の目的のうちで残っているのは, 変形環の generic fiber の中でひとつの連結成分を定めるような条件 C を求めることだったが, これに関して Kisin は次の予想を述べている:

予想 6.8. $\text{End}_{\mathbb{F}[G_K]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ ならば, 各 $\mathcal{G}\mathcal{R}_{V_F, 0}^{\mathbf{v}, \text{loc}, \mathbf{d}}$ は連結 (従って $\text{Spec}(R^{\mathbf{v}, \mathbf{d}}[1/p])$ も連結).

7 $d = 2$ の場合

この節では、 $d = 2$ かつ任意の $v_\psi = 1$ 、と言う特別な場合に $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\text{loc},\mathbf{d}}$ の連結性を議論する。この場合、定理 6.4 から $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}^{\mathbf{v}} = \mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}^{\mathbf{v},\text{loc}}$ である。

注 7.1. V_E を E 上 $\text{rank } 2$ の G_K の Barsotti-Tate 表現とする。このとき、 V_E が p 進 Hodge 型 $(1, 1, \dots, 1)$ と言うのは、 $\det_E(V_E)$ が p 進円分指標と不分岐指標の積であることと同値。実際、 $D = D_{\text{crys}}^*(V)$ とおくと、前者の条件は $\text{Fil}^1(D_K)$ が $\text{rank } 1$ の自由 $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ 加群であることと同値だが、さらにこれが次の条件と同値であることも確かめられる： $\bigwedge_{E \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} D_K$ の filtration が、 $\text{Fil}^0 = \text{Fil}^1 = \text{全体}$ 、 $\text{Fil}^2 = 0$ を満たす。この条件は後者の条件と同値。総実代数体上の、parallel weight 2 で level が p と素な Hilbert 保型形式 f に伴う E 係数 2 次元 Galois 表現 ρ_f はこの条件を満たす。

またこのことから、 $d = 2$ かつ全ての $v_\psi = 1$ のとき、取り得る $\mathbf{d} = \{d_m, d_{\text{et}}\}$ の値が $\{0, 0\}$ と $\{1, 1\}$ しかないことも分かる。

一般に、 \mathbb{F}' を有限体とすると、 $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'} \in (\text{ModFI}/\mathfrak{S})_{\mathbb{F}'}$ が ordinary であるとは、 $\mathfrak{S}_{\mathbb{F}'}$ 上 $\text{rank } 1$ の multiplicative ϕ 加群による $\mathfrak{S}_{\mathbb{F}'}$ 上 $\text{rank } 1$ の etale ϕ 加群の extension であることを言う。これは $\text{Gr}(\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'})^{\vee}$ が ordinary な有限平坦 \mathbb{F}' ベクトル空間スキームであることと同じ。このような $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'}$ は、 $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},\xi}^{\mathbf{v},\text{loc},\mathbf{d}=\{1,1\}}$ の \mathbb{F}' 値点に対応する。

7.1 ordinary でない場合

この小節でだけ $K_0 = \mathbb{Q}_p$ と仮定する。 \mathbb{F}' を \mathbb{F} の有限次拡大とし、 $x_1, x_2 \in \mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v}}(\mathbb{F}')$ を考える。これらに対応する $\mathfrak{S}_{\mathbb{F}}$ 上の ϕ 加群を $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}',1}, \mathfrak{M}_{\mathbb{F}',2}$ とする。

命題 7.2 ([15], Proposition (2.5.6)). $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}',1}, \mathfrak{M}_{\mathbb{F}',2}$ が両方とも non-ordinary なら、 x_1, x_2 は $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v}}$ の同じ連結成分に入る。

証明. $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'[T]} \in \mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v}}(\mathbb{F}'[T])$ は、 $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v}}$ 中の連結な曲線を定める。具体的に $\mathfrak{M}_{\mathbb{F}'[T]}$ を構成することで、このような曲線をいくつか結ぶことによって x_1, x_2 を繋げられることが示せるので、主張が従う。□

$V_{\mathbb{F}}$ が ordinary ならば、条件 $\text{End}_{\mathbb{F}[G_K]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ は成立しないことに注意する。従ってこの命題は、 $d = 2$ 、全ての $v_\psi = 1$ 、かつ $K_0 = \mathbb{Q}_p$ の仮定のもとで予想 6.8 が正しいことを意味している。

7.2 ordinary な場合

$\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\text{ord}} = \mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\text{loc},\mathbf{d}=\{1,1\}}$ と置く。

命題 7.3 ([15], Proposition (2.5.15)). $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\text{ord}} \neq \emptyset$ とすると、

- G_K の不分岐指標 $\chi_1, \chi_2 : G_K \rightarrow \mathbb{F}^\times$ が存在して、 $V_{\mathbb{F}} \simeq \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$ となる

ような場合を除いて、 $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\mathbf{v},\text{ord}}$ は 1 点からなる。上の場合は以下の通り：

1. $\chi_1 \neq \chi_2$ のとき. $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\vee,\text{ord}}$ は 2 点からなる. 一般に, $\chi : G_K \rightarrow \mathbb{F}^\times$ が定める \mathcal{O}_K 上の有限 etale 群スキームを \mathcal{G}_χ で表すと, この 2 点は $V_{\mathbb{F}}$ の 2 つの有限平坦モデル

$$\mathcal{G}_{\chi_1^{-1}\omega}^\vee \oplus \mathcal{G}_{\chi_2}, \quad \mathcal{G}_{\chi_2^{-1}\omega}^\vee \oplus \mathcal{G}_{\chi_1}$$

に対応している. ここで $\omega : G_K \rightarrow \mathbb{F}^\times$ は mod p 円分指標.

2. $\chi_1 = \chi_2$ のとき. $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\vee,\text{ord}} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^1$ であり, $V_{\mathbb{F}}$ の有限平坦モデルは全て $\mathcal{G}_{\chi_1^{-1}\omega}^\vee \oplus \mathcal{G}_{\chi_1}$ と同型.

証明. $A \in \mathfrak{A}_{\mathbb{F}}$ に対し $V_A = V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} A$ と置く. $\mathcal{GR}_{V_{\mathbb{F}},0}^{\vee,\text{ord}}(A)$ は, V_A の有限平坦モデル \mathcal{G}_A で, A 作用を持ち, その最大 multiplicative 部分 \mathcal{G}_A^{m} と最大 etale 商 $\mathcal{G}_A^{\text{et}}$ が完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_A^{\text{m}} \rightarrow \mathcal{G}_A \rightarrow \mathcal{G}_A^{\text{et}} \rightarrow 0$$

を満たし, かつ $\mathcal{G}_A^{\text{m}}(\bar{K})$ と $\mathcal{G}_A^{\text{et}}(\bar{K})$ が rank 1 の自由 A 加群であるようなものの同型類全体と同一視される. この集合はさらに, 対応 $\mathcal{G}_A \mapsto \mathcal{G}_A^{\text{m}}(\bar{K})$ により次の集合と同一視できる:

- V_A の部分 G_K 表現 L_A で, A 上 rank 1 の自由加群であり, 商 V_A/L_A も A 上 rank 1 の自由 A 加群になり, かつその商に G_K が不分岐に作用するようなもの全体.

この主張を確かめるには, flat 表現 V_A の ordinary な有限平坦モデルで A 作用を持つもの \mathcal{G}_A の同型類が条件

「同型 $\mathcal{G}_A(\bar{K}) \simeq V_A$ は $\mathcal{G}_A^{\text{m}}(\bar{K})$ を L_A の上に移す」

で一意的に決まることを示せばよい. この条件を満たす \mathcal{G}_A には sup がある. 実際, $\mathcal{G}_{A,1}, \mathcal{G}_{A,2}$ を条件を満たす有限平坦モデルとすると, $V_A \rightarrow V_A \oplus V_A$ の $\mathcal{G}_{A,1} \oplus \mathcal{G}_{A,2}$ におけるスキーム論的閉包が sup を定める. Cartier 双対を取ることで inf の存在も分かる. 従って, あとは条件を満たす有限平坦モデルの間の任意の射 $\mathcal{G}_{A,1} \rightarrow \mathcal{G}_{A,2}$ が同型になることを確かめればよい. この射は $\mathcal{G}_{A,1}^{\text{m}} \rightarrow \mathcal{G}_{A,2}^{\text{m}}$ と $\mathcal{G}_{A,1}^{\text{et}} \rightarrow \mathcal{G}_{A,2}^{\text{et}}$ をそれぞれ引き起こすが, 仮定よりこの 2 つの射の generic fiber は同型である. \mathcal{O}_K 上の有限 etale 群スキームの間の射は generic fiber に同型を引き起こせば \mathcal{O}_K 上も同型である. Cartier 双対を取って, \mathcal{O}_K 上の有限 multiplicative 群スキームについても同じことが言えるので, これらの 2 つの射は同型であり, $\mathcal{G}_{A,1} \rightarrow \mathcal{G}_{A,2}$ も同型となる. 条件を満たす $L_A \subseteq V_A$ 全体は定理の主張にあるようなスキームで represent されるので, 定理も示される. \square

7.3 結論

これまでで得られた結果をまとめると次のようになる.

系 7.4 ([15], Corollary (2.5.16)). $R = R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl},\square} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}_F$ とし, $d = 2$, 全ての $v_\psi = 1$ とする.

1. 完備局所環 R^\vee は \mathbb{Z}_p 上 flat, 相対次元 $4 + [K : \mathbb{Q}_p]$ であり, $R^\vee[1/p]$ は F 上 *formally smooth*.
2. E を F の有限次拡大, $x_1, x_2 \in (\text{Spec}(R^\vee))(E)$ とし, x_i に対応する E 上の G_K 表現を V_{x_i} と書く. このとき, もし x_1, x_2 が $\text{Spec}(R^\vee[1/p])$ の同じ連結成分に入っているとすると, V_{x_1}, V_{x_2} は両方 *ordinary* か, 両方 *non-ordinary* かのどちらか.
3. 次の各場合には 2 の逆も成立する:
 - (a) V_{x_1}, V_{x_2} は両方 *non-ordinary* で, $K_0 = \mathbb{Q}_p$.

(b) V_{x_1}, V_{x_2} は両方 *ordinary* で, $L_{x_i} \subseteq V_{x_i}$ を 1 次元部分表現で惰性群 I_K が p 進円分指標で作用するものとする (条件よりこのような L_{x_i} は一意的) と, L_{x_i} への G_K 作用が定める指標 $\chi_i : G_K \rightarrow \mathcal{O}_E^\times$ が $\chi_1 \equiv \chi_2 \pmod{m_E}$ を満たす.

さらに, $\text{End}_{\mathbb{F}[G_K]}(V_{\mathbb{F}}) = \mathbb{F}$ なら $R = R_{V_{\mathbb{F}}}^{\text{fl}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}_F$ に関しても同じ主張が成り立つが, 1 の相対次元は $1 + [K : \mathbb{Q}_p]$ に変わる.

つまり, $\text{Spec}(R^\vee[1/p])$ は

$$\text{Spec}(R^\vee[1/p]) = \text{Spec}(R^{\vee, \mathbf{d}=\{0,0\}}[1/p]) \coprod \text{Spec}(R^{\vee, \mathbf{d}=\{1,1\}}[1/p])$$

と直和解され, $K_0 = \mathbb{Q}_p$ のとき, $\{0,0\}$ 部分は連結. さらに,

$\text{Spec}(R^{\vee, \mathbf{d}=\{1,1\}}[1/p])$ が連結

$$\Leftrightarrow \text{条件「不分岐指標 } \chi_1 \neq \chi_2 \text{ に対し } V_{\mathbb{F}} \simeq \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix} \text{」が成立しない.}$$

この条件が成立するときは, $\text{Spec}(R^{\vee, \mathbf{d}=\{1,1\}}[1/p])$ の連結成分は C_1, C_2 の 2 つあり, それぞれ

$y : R^\vee \rightarrow E$ が C_i を通る

$$\Leftrightarrow V \text{ は } \textit{ordinary} \text{ で, } V_y = V_R \otimes_{R,y} E \text{ の } 1 \text{ 次元不分岐商への } G_K \text{ の作用が } \chi_i \text{ の lift になっている}$$

と言う条件で特徴付けられる. 従って, 当初の目的であった「変形環の generic fiber の中で formally smooth な連結成分を定めるような条件 C の構成」が達成されたことになる.

参考文献

- [1] V. Abrashkin: *Group schemes of period* $p > 2$, preprint
- [2] A. Beauville and Y. Laszlo: *Un lemme de descente*, C. R. Acad. Sci. Paris **320** (1995), 335–340
- [3] A. Beauville and Y. Laszlo: *Conformal blocks and generalized theta functions*, Commun. Math. Phys. **164** (1994), 385–419
- [4] C. Breuil: *Une application du corps des normes*, Compositio Math. **117** (1999), 189–203
- [5] C. Breuil: *Groupes p -divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. of Math. (2) **152** (2000), 489–549
- [6] C. Breuil: *Integral p -adic Hodge theory*, Advanced Studies in Pure Math. **36** (2002), pp.51–80
- [7] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond and R. Taylor: *On the modularity of elliptic curves over \mathbb{Q} : wild 3-adic exercises*, J. Amer. Math. Soc., **14** (2001), 843–939
- [8] B. Conrad: *Finite group schemes over bases with low ramification*, Compositio Math. **119** (1999), no. 3, 239–320

- [9] B. Conrad, F. Diamond and R. Taylor: *Modularity of certain potentially Barsotti-Tate Galois representations*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 2, 521–567
- [10] J.-M. Fontaine: *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt*, C. R. Acad. Sci. **280** (1975), 1423–1425
- [11] J.-M. Fontaine: *Il n’y a pas de variété abélienne sur \mathbb{Z}* , Invent. Math. **81** (1985), 515–538
- [12] J.-M. Fontaine: *Représentations p -adiques des corps locaux*, Grothendieck Festschrift II, Progr. Math. **87**, Birkhauser, pp. 249–309, 1991
- [13] J.-M. Fontaine: *Le corps des périodes p -adiques*, Astérisque **223** (1994), 59–111
- [14] K. Fujiwara: *Deformation rings and Hecke algebras in the totally real case*, preprint
- [15] M. Kisin: *Moduli of finite flat group schemes, and modularity*, preprint (2004)
- [16] M. Kisin: *Crystalline representations and F -crystals*, in *Algebraic Geometry and Number Theory*, Progr. Math. **253** (2006), 459–496
- [17] M. Kisin: *Potentially semi-stable deformation rings*, preprint
- [18] G. Pappas and M. Rapoport: *Local models in the ramified case I. The EL -case*, J. Algebraic Geom. **12** (2003), 107–145
- [19] M. Raynaud: *Schémas en groupes de type (p, \dots, p)* , Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 241–280
- [20] S. Sen: *The analytic variation of p -adic Hodge structures*, Ann. of Math. **127** (2) (1988), 647–661
- [21] J.-P. Serre: *Corps Locaux*, Hermann, Paris, 1968
- [22] J. Tate: *p -divisible groups*, Proceedings of a Conference on Local Fields, Springer, pp. 158–183, 1967
- [23] R. Taylor and A. Wiles: *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 3, 553–572