ARGOS seminar on intersections of modular correspondences, Astérisque **312** (2007) の紹介 (4)

服部 新
北大理学研究院 3-601
shin-h@math.sci.hokudai.ac.jp

平成 19 年 11 月 30 日

※ B. H. Gross, K. Keating, *On the intersection of modular correspondences*, Invent. Math **112** (1993), 225-245 の解説本

1 今回証明すること

$\varphi_m(j,j') \in \mathbb{Z}[j,j']$: modular polynomial
$T_m = V(\varphi_m) \subseteq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j,j'])$: divisor
$W = W(\bar{\mathbb{F}}_p)$

定理 1.1 (定理 A) *E, E': $\bar{\mathbb{F}}_p$ 上の supersingular elliptic curve*
R: ペア (E,E') の universal deformation ring ($\simeq W[[t,t']]$)
$(\mathbb{E},\mathbb{E}')$: R 上の universal elliptic curve
$\mathrm{Spec}(W[j,j'])$ は coarse moduli スキームだから, universal elliptic curve が定める natural map $W[j,j'] \to R$ が存在するが, この map による φ_m の像を考える.
このとき, R において φ_m は次のように分解する.

$$\varphi_m = \prod_f \varphi_{m,f}$$

ただし, 積は

$$\{f : E \to E' \mid degree{=}m \text{ の } isogeny\}/\pm 1$$

を走り, $\varphi_{m,f}$ は次の性質を満たすある R の元.

「R のイデアル $(\varphi_{m,f})$ は, f が R/I 上の isogeny $\mathbb{E}\otimes R/I \to \mathbb{E}'\otimes R/I$ に lift するようなイデアル I の中で最小のもの.」

定理に出てきた最小のイデアル $(\varphi_{m,f}) \subseteq R$ (またはこれが定義する $\mathrm{Spec}(R)$ の閉部分スキーム) を f の **lifting locus** と呼ぶことにする.

定理 1.2 (主定理の (1), (2)) *(i) divisor $T_{m_1}, T_{m_2}, T_{m_3}$ が intersect properly $\iff$ m_1, m_2, m_3 を同時に represent する positive definite binary 二次形式 $/\mathbb{Z}$ が存在しない.*

(ii) このとき, *intersection* $T_{m_1} \cap T_{m_2} \cap T_{m_3}$ は S の閉点からなる次のような有限集合の上にある.

$$\{[E, E'] | p < 4m_1m_2m_3 \text{なる素数に対する}, \bar{\mathbb{F}}_p \text{ 上の } \textit{supersingular elliptic curve} \text{ のペア} \}$$

2 algebraic stack の用語集

参考文献:

[C] B. Conrad: *The Keel-Mori theorem via stacks*, on his website

[DM] P. Deligne, D. Mumford: *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. IHES **36** (1969), 75–109

[DR] P. Deligne, M. Rapoport: *Les schemas de modules de courbes elliptiques*, in Modular functions of one variable II, LNM **349**

[FC] G. Faltings, C-L. Chai: Degeneration of abelian varieties, Springer

[KM] S. Keel, S. Mori: *Quotients by groupoids*, Ann. of Math. (2) **145** (1997), 193–213

[K] D. Knutson: Algebraic spaces, LNM **203**

[LM] G.Laumon, L. Moret-Baily: Champs Algébriques, Springer

[GIT] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan: Geometric invariant theory (3rd ed.), Springer

[SGA3] SGA3 の Exp. IV

以下, スキームは全て quasi-separated なものとする.

2.1 algebraic space ([LM],[K])

S: base スキームを fix.

(Aff/S): affine スキーム+S への構造射, のなす圏に etale 位相を入れたもの

定義 2.1
- $f : F \to G$: (Aff/S) 上の etale sheaf の間の射, とするとき, f が **schematic** とは, 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ からの射 $x : U \to G$ に対し, 層のファイバー積 $F \times_{f,G,x} U$ がスキームで表現可能なこと.
- (P_0) をスキームの射の性質で, 任意の base change で保たれるものとする. このとき, etale sheaf の間の schematic な射 f が (P_0) であるとは, 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ からの射 $x : U \to G$ に対し, スキームの射 $F \times_{f,G,x} U \to U$ が (P_0) であること.

定義 2.2 (Aff/S) 上の etale sheaf X が S 上の (quasi-separated な) **algebraic space** (S-algebraic space) であるとは, 次の 2 条件が満たされること.

- 対角射 $\Delta_X : X \to X \times_S X$ が schematic, quasi-compact. とくに, S 上の任意のスキーム T からの射 $T \to X$ は schematic ($T \times_X T' = X \times_{X \times_S X} T \times_S T'$ なので).
- S 上のスキーム X' からの (自動的に schematic な) etale 全射 $P : X' \to X$ が存在 (この map を etale presentation という).

注 2.3
- S 上の (quasi-separated な) スキームは自然に (Aff/S) 上の etale sheaf とも, S 上の algebraic space とも思える. 以下 S 上のスキームの圏を S 上の algebraic space の圏の充満部分圏だと思う.

- etale sheaf X が algebraic space であることと, X があるスキーム T 上の, 以下の条件を満たす同値関係 $R \rightrightarrows T$ の商層であることとは同値.
  - R はスキームで, $R \to T \times_S T$ は quasi-compact.
  - $R \rightrightarrows T$：二つの射影, は etale.

定義 2.4
- (P) を, スキームの性質で etale local なものとする (例：regular, normal, reduced, n-次元...). このとき, algebraic space X が (P) であるとは, (P) を満たすスキームからの etale presentation が存在すること.
- スキームの射の性質 (P_1) を, 任意の base change で保たれ, かつ source と target の両方について etale local なもの, つまり, 次の条件を満たすものとする.
  - $f : T' \to T$ をスキームの射, $(U \to T)$ を任意の etale covering, $(U' \to T' \times_T U)$ も任意の etale covering, とするとき,
    f が $(P_1) \Leftrightarrow$ 合成 $U' \to T' \times_T U \to U$ が (P_1).

  (例:flat, 全射, etale, smooth, 局所有限型, 局所有限表示, locally quasi-finite (i.e. 各 geometric fiber が discrete なスキームになるような射)...)

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] & T' \times_T U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d] \\ & T' \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

  このとき, algebraic space の射 $X \to Y$ が (P_1) とは, 任意の etale presentation $U \to X$ と, $X' \times_X U$ (これは自動的に algebraic space になる) の任意の etale presentation $U' \to X' \times_X U$ に対し, 合成 $U' \to X' \times_X U \to U$ が (P_1) であること.

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r] & X' \times_X U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d] \\ & X' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

- スキームの射の性質 (P_2) を, 任意の base change で保たれ, かつ target について etale local なもの, つまり, 任意の etale covering $(U \to T)$ に対し,

  「$f : T' \to T$ が $(P_2) \Leftrightarrow T' \times_T U$ が (P_2)」

  を満たすものとする (例：affine, quasi-affine, open immersion, closed immersion...).

$$\begin{tikzcd} T' \times_T U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d] \\ T' \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

  このとき, algebraic space の射 $f : X' \to X$ が (P_2) とは, f が schematic であり, さらに適当な (したがって任意の)etale presentation $U \to X$ に対し, $X' \times_X U \to U$ が (P_2) であること.

$$\begin{tikzcd} X' \times_X U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

- algebraic space X が **quasi-compact** とは, quasi-compact なスキームからの etale presentation が存在すること．また, algebraic space の射 $f : X' \to X$ が **quasi-compact** 射であるとは, 任意の quasi-compact スキームからの etale 射 $T \to X$ に対し, algebraic space $X' \times_X T$ が quasi-compact であること.

- algebraic space X が **locally Noether** とは, locally Noether スキームからの etale presentation があること．X が **Noether** であるとは, locally Noether かつ quasi-compact であること.

- algebraic space の射 $f : X' \to X$ が**有限表示/有限型/quasi-finite** であるとは, 局所有限表示/局所有限型/locally quasi-finite, かつ quasi-compact であること.

- algebraic space の射 $f : X' \to X$ が **finite** とは, f が affine かつ, 任意のスキーム T からの射 $T \to X$ に対し, スキームの射 $T \times_X X' \to T$ が finite (i.e. 整かつ有限型) であること.

- algebraic space の射 $f : X' \to X$ が **quasi-separated** であるとは, 対角射 $\Delta_{X'/X} : X' \to X' \times_X X'$ が quasi-compact であること． f が **separated** であるとは, $\Delta_{X'/X}$ が closed immersion であること.

- algebraic space X の**点**とは, 適当な体 k の Spec からの射 $x : \mathrm{Spec}(k) \to X$ のこと．点の同値類を $|X|$ と書いて, X の**底空間**と呼ぶ. $|X|$ には, $\{|U| \mid U \to X : \text{open immersion}\}$ を開集合系とする位相 (Zariski 位相) を入れる．この位相は (closed immersion の etale descent より) $\{|Z| \mid Z \to X : \text{closed immersion}\}$ を閉集合系とする位相と同じ.

- algebraic space の射 $f : X' \to X$ が **closed** であるとは, 底空間に引き起こす射 $|f| : |X'| \to |X|$ が閉写像であること．f が **universally closed** であるとは, 任意の algebraic space からの射 $Y \to X$ に対し, $X' \times_X Y \to Y$ が closed であること.

- algebraic space の射 $f : X' \to X$ が **proper** であるとは, 有限型, separated かつ universally closed であること.

- algebraic space X 上に, algebraic space からの etale 射とその surjective family によって, スキームのときと同様に etale 位相が定義できる．定義から, この位相の開被覆は, affine スキームの無限直和からなる開被覆による細分を持つ．したがって, 任意の affine スキームからの etale 射 $T \to X$ に対して $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ を対応させる対応は X 上の etale sheaf に延びる．これを X の**構造層**といい, $\mathcal{O}_X$ と書く.

命題 2.5 (Zariski の主定理) *algebraic space の射 $f : X' \to X$ が separated, quasi-finite だとする．このとき, f が proper であることと finite であることは同値.*

2.2 groupoid と stack ([LM], [DM])

定義 2.6

- 射が全て同型なような圏のことを **groupoid** という.

- base スキーム S に対し, S-**groupoid** とは, 圏 $\mathcal{X}$ と関手 $a : \mathcal{X} \to (\mathrm{Aff}/S)$ の組で, 次の条件を満たすもののこと.

(i) (Aff/S) における任意の射 $\varphi : V \to U$ と, $x \in \mathcal{X}$ で $a(x) = U$ なるものに対し, $\mathcal{X}$ における射 $f : y \to x$ で $a(f) = \varphi$ を満たすものが少なくとも一つ存在する.

(ii) $\mathcal{X}$ における任意の図式

$$\begin{tikzcd} z \arrow[dr, "h"] & \\ & x \\ y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

に対し, その a による像が

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, "a(h)"] & \\ & U \\ V \arrow[ur, "a(f)"'] & \end{tikzcd}$$

であるとする. このとき, 下の図式を可換にする任意の射 $\psi : W \to V$ に対し, 上の図式を可換にする射 $g : z \to y$ で $a(g) = \psi$ なるものがただ一つ存在する.

- $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ に対し, $\mathcal{X}$ の部分圏 $\mathcal{X}_U$ を, object は a による U の逆像全体, morphism は a で id_U に移るもの全体, として定める. S-groupoid の定義 (ii) から, このとき $\mathcal{X}_U$ は groupoid になる.

- (Aff/S) における射 $\varphi : V \to U$ と $x \in \mathcal{X}$ に対し, S-groupoid の定義 (i) に出て来る射 $y \to x$ は, 定義 (ii) より up to isomorphism で unique である. このようなものを一つ選び, $\varphi^* x \to x$ とか $x_V \to x$ とかと書く. すると, $\mathcal{X}$ における射 $f : x' \to x$ に対し, 定義 (ii) から, 下の図式を可換にする射 $\varphi^* f : \varphi^* x' \to \varphi^* x$ が unique に存在する.

$$\begin{tikzcd} \varphi^* x \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^* f"'] & x \arrow[d, "f"] \\ \varphi^* x' \arrow[r] & x' \end{tikzcd}$$

これは **base change 関手** $\varphi^* : \mathcal{X}_U \to \mathcal{X}_V$ を定める. $\psi : W \to V$, $\varphi \circ \psi : W \to U$ に対する base change 関手も考えると, 定義から, cocycle 条件を満たす自然同値

$$\psi^* \circ \varphi^* \cong (\varphi \circ \psi)^*$$

が存在する. 逆に, これらを満たす U 上のファイバー圏 $\mathcal{X}_U$ と関手の族 $\{\varphi^* : \mathcal{X}_U \to \mathcal{X}_V\}_\varphi$ から, S-groupoid $\mathcal{X}$ が復元できる.

- S-groupoid の**射** $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ とは, 関手 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ で, 構造射と可換なもののこと.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "a_{\mathcal{X}}"'] & \mathcal{Y} \arrow[d, "a_{\mathcal{Y}}"] \\ & (\mathrm{Aff}/S) \end{tikzcd}$$

これは次のようにも考えられる. 関手 $F_U : \mathcal{X}_U \to \mathcal{Y}_U$ の族で, 次の図式の二つの合成射の間に自然同値が存在するようなもののこと.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_U \arrow[r, "F_U"] \arrow[d, "\varphi^*"'] & \mathcal{Y}_U \arrow[d, "\varphi^*"] \\
\mathcal{X}_V \arrow[r, "F_V"'] \arrow[ur, Rightarrow] & \mathcal{Y}_V
\end{tikzcd}$$

- S-groupoid の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$, $G : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ の**ファイバー積** $\mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Z},G} \mathcal{Y}$ とは, 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ に対し, U 上のファイバー $(\mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Z},G} \mathcal{Y})_U$ を次のような圏として定めたもの (base change 関手は自然なものとして定義する).
  - object は, $x \in \mathcal{X}_U$, $y \in \mathcal{Y}_U$ と, $\mathcal{Z}$ における同型 $\tau : F(x) \cong G(y)$ の三つ組 (x, y, τ)
  - morphism $(x, y, \tau) \to (x', y', \tau')$ は, $\mathcal{X}$ における射 $f : x \to x'$ と $\mathcal{Y}$ における射 $g : y \to y'$ の組 (f, g) で, 次の図式を可換にするもの.

$$\begin{array}{ccc}
F(x) & \xrightarrow{F(f)} & F(x') \\
{\scriptstyle \tau}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \tau'} \\
G(y) & \xrightarrow{G(g)} & G(y')
\end{array}$$

定義 2.7　• S 上の **stack** (S-stack) とは, S-groupoid $\mathcal{X}$ で次の 2 条件を満たすもの.

(i) 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$, $x, y \in \mathcal{X}_U$ に対し, presheaf

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Isom}}(x, y) : (\mathrm{Aff}/U) &\to (\mathrm{Set}) \\
V &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}_V}(x_V, y_V)
\end{aligned}$$

は (Aff/U) 上の etale sheaf.

(ii) 任意の etale covering $(V_i \to U)$ に対し, この covering に対する任意の descent data は effective.

つまり, $x_i \in \mathcal{X}_{V_i}$ と, 同型 $f_{ji} : x_i|_{V_{ji}} \to x_j|_{V_{ji}}$ で cocycle 条件

$$f_{ki}|_{V_{kji}} = f_{kj}|_{V_{kji}} \circ f_{ji}|_{V_{kji}}$$

を満たすもの, に対して, $x \in \mathcal{X}_U$ と同型 $f_i : x|_{V_i} \to x_i$ で

$$f_j|_{V_{ji}} = f_{ji} \circ f_i|_{V_{ji}}$$

を満たすものが存在する.

- stack の間の射は S-groupoid としての射として定義する.

例 2.8　• S 上の algebraic space X は自然に S-stack と見なせる (U 上のファイバーとして, discrete 圏 $X(U)$ を考える).

- 楕円曲線とその間の同型のなす圏 (Ell) は $\mathbb{Z}$-groupoid になるが, projective スキームの fpqc-descent ([SGA1, Exp. VIII, Proposition 7.8]) より, (Ell) は $\mathbb{Z}$-stack になることもわかる.

注 2.9 層の時と同様に, S-stack の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ に対し

- F が stack の圏の monomorphism (resp. isomorphism) $\Leftrightarrow$ 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ に対し, $F_U : \mathcal{X}_U \to \mathcal{Y}_U$ が忠実充満 (resp. 圏同値).
- F が stack の圏の epimorphism $\Leftrightarrow$ 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ と $y \in \mathcal{Y}_U$ に対し, $U' \in (\mathrm{Aff}/S)$ からの etale 全射 $(U' \to U)$ と $x \in \mathcal{X}_{U'}$ が存在して, $F(x) \cong y|_{U'}$ ($\mathcal{Y}_{U'}$ における同型).
- S-stack の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$, $G : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ の, S-groupoid としてのファイバー積 $\mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Z},G} \mathcal{Y}$ は, S-stack としてのファイバー積でもある.
- S-stack $\mathcal{X}$ と $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ に対し, 自然な射

$$\{S\text{-stack としての射 } U \to \mathcal{X} \text{ のなす圏}\} \to \mathcal{X}_U$$

  は圏同値.

定義 2.10

- S-stack$\mathcal{X}$ が **representable/schematic** であるとは, S-algebraic space/S-スキーム X が存在して $X \simeq \mathcal{X}$ (S-stack としての同型) となること.
- S-stack の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が **representable/schematic** であるとは, 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ と $y \in \mathcal{Y}_U$ に対し, ファイバー積 $U \times_{y,\mathcal{Y},F} \mathcal{X}$ が representable/schematic であること.
- スキームの射の性質で, 任意の base change で保たれ, かつ target について etale local なもの (P_2) を考える (例：affine, quasi-affine, open immersion, closed immersion...). このとき, S-stack の representable な射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が (P_2) であるとは, 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ と $y \in \mathcal{Y}_U$ に対し, S-algebraic space の射

$$\mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},y} \to U$$

  が (P_2) であること.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},y} U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d, "y"] \\
\mathcal{X} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

- 従って, S-stack$\mathcal{X}$ の**開部分 stack**, **閉部分 stack** が定義される.
- S-stack の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ に対し, その**像 stack** $\mathrm{Im}(F)$ を, 次で定まる $\mathcal{Y}$ の substack とする.

  任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ に対し, $\mathrm{Im}(F)_U$ は, 以下の条件を満たす $y \in \mathcal{Y}_U$ 全体がなす $\mathcal{Y}_U$ の full subcategory;

  「ある $V \in (\mathrm{Aff}/S)$ からの etale 全射 $(V \to U)$ と $x \in \mathcal{X}_V$ が存在して, $F(x) \cong y_V \in \mathcal{Y}_V$」

  すると, F は epimorphism $\mathcal{X} \to \mathrm{Im}(F)$ と monomorphism $\mathrm{Im}(F) \to \mathcal{Y}$ との合成

$$\mathcal{X} \to \mathrm{Im}(F) \to \mathcal{Y}$$

  に分解する ([LM], Proposition 3.7).

命題 2.11 ([LM], Corollaire 3.13) *S-stack $\mathcal{X}$ に対し, 次の条件は同値.*

(i) 対角射 $\Delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ は *representable.*

(ii) 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ と $x, y \in \mathcal{X}_U$ に対し, (Aff/U) 上の *etale sheaf* $\underline{\mathrm{Isom}}(x, y)$ は U*-algebraic space* で *represent* される.

(iii) 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ に対し, S*-stack* の射 $U \to \mathcal{X}$ は *representable.*

(iv) 任意の S*-algebraic space* X に対し, S*-stack* の射 $X \to \mathcal{X}$ は *representable.*

2.3 algebraic stack ([LM], [DM])

定義 2.12 • S-stack $\mathcal{X}$ が (quasi-separated な) **S-algebraic stack** (**Artin stack** ともいう) であるとは, 次の条件を満たすこと.

(i) 対角射 $\Delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ は representable, separated, quasi-compact (とくに, 任意の S-algebraic space X からの射 $X \to \mathcal{X}$ は representable).

(ii) S-algebraic space X からの smooth 全射 $P : X \to \mathcal{X}$ が存在 (これを $\mathcal{X}$ の **presentation** という).

• S-algebraic stack で S-algebraic space X からの etale 全射 $P : X \to \mathcal{X}$ が存在するものを, **Deligne-Mumford stack** といい, P のことを **etale presentation** という.

• S-algebraic stack の射とは, S-stack としての射のこと.

命題 2.13 ([LM], Proposition 4.4) *S-algebraic stack $\mathcal{X}$ が representable (つまり, S-algebraic space と同型になる) ための必要十分条件は, 次の 2 条件が成立すること.*

(i) $\mathcal{X}$ は *Deligne-Mumford.*

(ii) 対角射 $\Delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が *monomorphism.* つまり, 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ と $x \in \mathcal{X}_U$ に対し, x には *non-trivial* な *automorphism* が存在しない.

定義 2.14 • スキームの性質 (P') を, smooth local なものとする (つまり, smooth 全射 $X \to Y$ に対し,「X が $(P') \Leftrightarrow Y$ が (P')」が成立するもの. 例えば, regular, normal, reduced, locally Noether...).

このとき, S-algebraic stack $\mathcal{X}$ が (P') とは, (P') を満たす S-algebraic space からの presentation が存在すること. $\mathcal{X}$ が Deligne-Mumford のときは, 性質 (P) も同様に定義できる (例えば, n- 次元であること).

• スキームの射の性質 (P_1') を, source と target に対して smooth local なものとする (例えば, 全射, 局所有限表示, 局所有限型, flat, smooth...). このとき, S-algebraic stack の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が (P_1') とは, 任意の presentation $P : Y \to \mathcal{Y}$ と, algebraic stack $\mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},P} Y$ の任意の presentation $Q : X \to \mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},P} Y$ に対し, 合成 $X \to \mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},P} Y \to Y$ が (P_1') であること.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & \mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},P} Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "P"] \\ & \mathcal{X} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

注 2.15 • スキームのときと同様に, S-algebraic stack の局所有限表示射や smooth 射には, functorial な判定法がある ([LM, proposition 4.15]).

- $\mathcal{X}$ が S-algebraic stack なら, 対角射は (representable かつ) 有限型であることが示せる ([LM, Lemme 4.2]).
- $\mathcal{X}$ が S-algebraic stack のとき, $\mathcal{X}$ が Deligne-Mumford $\Leftrightarrow$ 対角射が (representable かつ)「unramified」([LM, Théorème 8.1]). ただしここでは「unramified」は「formally unramified かつ局所有限型」のこととする.

定義 2.16 • S-algebraic stack $\mathcal{X}$ が **quasi-compact** であるとは, quasi-compact な S-algebraic space からの presentation が存在すること. $\mathcal{X}$ が **Noether** であるとは, locally Noether かつ quasi-compact であること.

- S-algebraic stack の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が **quasi-compact** であるとは, 任意の $U \in (\mathrm{Aff}/S)$ と $y \in \mathcal{Y}_U$ に対し, algebraic stack $\mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},y} U$ が quasi-compact であること.
- S-algebraic stack の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が**有限表示/有限型**であるとは, 局所有限表示/局所有限型, かつ quasi-compact であること.
- S-algebraic stack $\mathcal{X}$ の**底空間** $|\mathcal{X}|$ とは, 集合

$$\coprod_{K\,:\,\text{体}} \mathcal{X}_K$$

を, 次の同値関係で割った空間のこと. $x \in \mathcal{X}_K$, $x' \in \mathcal{X}_{K'}$ が同値とは, K, K' の共通の拡大体 K'' が存在して, $x|_{K''} \cong x'|_{K''}$ ($\mathcal{X}_{K''}$ における同型).

- 底空間 $|\mathcal{X}|$ には, 前と同様に,

$$\{|\mathcal{U}| \mid \mathcal{U} \to \mathcal{X} \text{ は開部分 stack}\}$$

を開集合系にする位相を入れる (**Zariski 位相**). これは

$$\{|\mathcal{Z}| \mid \mathcal{Z} \to \mathcal{X} \text{ は閉部分 stack}\}$$

を閉集合系にする位相と同じ.

- S-algebraic stack の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が **closed** であるとは, 底集合に引き起こす射 $|F| : |\mathcal{X}| \to |\mathcal{Y}|$ が閉写像であること. F が **universally closed** であるとは, 任意の S-algebraic stack からの射 $f : \mathcal{Y}' \to \mathcal{Y}$ に対し, $\mathcal{X} \times_{F,\mathcal{Y},f} \mathcal{Y}'$ が closed であること.
- S-algebraic stack の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が **separated** であるとは, 対角射が universally closed (したがって, representable proper) であること.
- S-algebraic stack の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が **proper** であるとは, F が separated, 有限型, universally closed であること.
- S-algebraic stack $\mathcal{X}$ の **lisse-etale 位相**を次のように定義する.

– 開集合の圏を次のように定める. object は, S-algebraic space U と, U からの smooth 射 $u : U \to \mathcal{X}$ の組 (U, u). morphism $(U, u) \to (V, v)$ は, S-algebraic space の射 $\varphi : U \to V$ と自然同値 $\alpha : u \cong v \circ \varphi$ の組 (φ, α).

– このような (U, u) の開被覆は, 射 $(\varphi_i, \alpha_i) : (U_i, u_i) \to (U, u)$ の family で, S-algebraic space の射

$$\coprod \varphi_i : \coprod U_i \to U$$

が etale 全射であるようなもの.

- $\mathcal{X}$ が Delinge-Mumford の場合は, $\mathcal{X}$ の **etale 位相**を, 上の定義の「smooth 射」のところを「etale 射」に変えたもの, として定義する.

- どちらの位相でも, 前と同様に**構造層** $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ が定義できる.

注 2.17

- スキームのときと同様に, S-algebraic stack にも separated/proper morphism の**付値判定法**がある ([LM, Proposition 7.8/Théorème 7.10]).

- S-stack が algebraic stack/Deligne-Mumford stack になるための条件は deformation の言葉で書ける (Artin の定理, [LM, Théorème 10.10]).

2.4 coarse moduli space

定義 2.18 $\mathcal{X}$ を S-algebraic stack とする.

S-algebraic space への射 $\pi : \mathcal{X} \to X$ が $\mathcal{X}$ の **coarse moduli space** であるとは, 次の 2 条件を満たすこと.

(i) 任意の S-algebraic space Y への射 $\mathcal{X} \to Y$ は, π を unique に factor する.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr] & X \arrow[d, dotted, "\exists!"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(ii) 任意の代数的閉体 k に対し, π は全単射

$$(\mathcal{X}_k\text{の同型類}) \to X(k)$$

を引き起こす.

命題 2.19 ([KM], [C]) *$\mathcal{X}$ を S 上局所有限表示な S-algebraic stack で, 対角射 $\mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が (representable) finite であるとする. このとき, $\mathcal{X}$ の coarse moduli space $\pi : \mathcal{X} \to X$ が存在して以下が成立する.*

(i) $\pi : \mathcal{X} \to X$ は proper かつ quasi-finite であり, 構造層の同型 $\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \cong \mathcal{O}_X$ を引き起こす.

(ii) $\mathcal{X}$ が S 上 separated なら, X も S 上 separated.

(iii) S が locally Noether なら X は S 上局所有限型. さらにこのとき, $\pi : \mathcal{X} \to X$ は universally homeomorphism.

(iv) X の構成は *flat base change* と可換. つまり, *S-algebraic space* の *flat* 射 $f : X' \to X$ に対し, $\pi' : \mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\pi,X,f} X' \to X'$ は $\mathcal{X}'$ の *coarse moduli space.*

系 2.20 *S が locally Noether, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ を, どちらも S 上局所有限表示, 対角射が finite な S-algebraic stack とする. X, Y を $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ の coarse moduli space とするとき,*

(i) proper 射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ は S-algebraic space の proper 射 $f : X \to Y$ に延びる.

(ii) F が (representable) finite なら, f も finite.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_X"'] & \mathcal{Y} \arrow[d, "\pi_Y"] \\
X \arrow[r, dotted, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

証明. 対角射が finite だから, $\mathcal{X}$ も $\mathcal{Y}$ も separated なので X, Y も S 上 separated. 定義より π_X, π_Y は全射なので, ここから f は quasi-compact と分かる. したがって f は有限型. さらに, π_X, π_Y が universally homeo だから, f は universally closed. したがって f は proper.

一方, F が representable, finite なら representable, quasi-finite でもあるので, ここから f が quasi-finite もわかる. したがって f は finite.

□

3 elliptic curve の coarse moduli

命題 3.1 ([DR], p.60-61) *$\mathbb{Z}$-stack* (Ell) は $\mathbb{Z}$ 上 *smooth* な *Deligne-Mumford stack.*

証明. Artin の定理を使わないで証明する. まず, etale presentation を構成する. $\mathbb{Z}[1/3]$ 上と $\mathbb{Z}[1/2]$ 上にそれぞれ etale presentation を作れば良い.

$$\begin{tikzcd}
U_3 \coprod U_2 \arrow[d, "P_3 \coprod P_2"'] & \\
(\mathrm{Ell})|_{\mathbb{Z}[1/3]} \coprod (\mathrm{Ell})|_{\mathbb{Z}[1/2]} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/3]) \coprod \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/2]) \arrow[d] \\
(\mathrm{Ell}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}[1/3]$ 上で考える. $\Gamma(3)$-structure つきの楕円曲線がなす $\mathbb{Z}[1/3]$-stack $Y(3)$ を考える. $Y(3)$ の object には non-trivial automorphism がなく, $\mathbb{Z}[1/3]$ 上の affine smooth curve で表現されるのだった (cf. [Katz-Mazur]). natural map $P_3 : Y(3) \to (\mathrm{Ell})|_{\mathbb{Z}[1/3]}$ は representable, finite etale な全射である (cf. loc. cit.). 従ってこれが求める etale presentation. $\mathbb{Z}[1/2]$ 上でも, $Y(4)$ を使って同じ議論ができる.

ここで, 今作った $\mathbb{Z}$ 上の etale presentation $P : U \to (\mathrm{Ell})$ は, 構成から (Ell) 上 representable, affine 全射であることに注意する. 可換図式

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\Delta_U"] \arrow[d, "P"] & U \times U \arrow[d, "P\times P"] \\ (\mathrm{Ell}) \arrow[r, "\Delta_{(\mathrm{Ell})}"'] & (\mathrm{Ell}) \times (\mathrm{Ell}) \end{tikzcd}$$

を $\mathrm{Spec}(R) \to (\mathrm{Ell}) \times (\mathrm{Ell})$ で引き戻すと, 合成 $(P \times P) \circ \Delta_U$ での引き戻しは quasi-compact スキームであり, $\Delta_{(\mathrm{Ell})}$ による引き戻しに etale 全射で写像する. したがって, $\Delta_{(\mathrm{Ell})}$ も quasi-compact と分かった.

次に, $\Delta_{(\mathrm{Ell})}$ が representable, finite であることを示す. 定義から, これは任意の可換環 R と R 上の楕円曲線 E に対し, $\underline{\mathrm{Isom}}(E, E)$ が R 上の有限スキームで表現されることと同値. E は R 上 projective だから, Hilbert スキームの一般論より, $\underline{\mathrm{Isom}}(E, E)$ は R 上の quasi-projective なスキーム I で表現される. とくに R 上局所有限型. $\Delta_{(\mathrm{Ell})}$ が quasi-compact なのは示したので, I は R 上有限型. さらに, 閉体 k 上では $\mathrm{Aut}_k(E_k)$ は有限群なので, I は quasi-finite. I が proper を示せば Zariski の主定理から有限性が分かる.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d] & \mathrm{Spec}(K) \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(R) & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \arrow[l] \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

付値判定法を用いる. K を dvf とし, $\mathcal{E} := E \times_R \mathcal{O}_K$ を $\mathcal{O}_K$ 上の楕円曲線, $\tau_K : \mathcal{E}_K \to \mathcal{E}_K$ を K 上の automorphism とするとき, τ_K が $\mathcal{O}_K$ 上の automorphism $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ に unique に延びれば良いが, これは Néron 普遍性の帰結. U は $\mathbb{Z}$ 上 smooth だから, (Ell) が $\mathbb{Z}$ 上 smooth な Deligne-Mumford stack であることが分かった.

□

命題 3.2 *j-invariant が定める射 $j : (\mathrm{Ell}) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ は proper.*

証明. $\mathbb{Z}[1/3]$, $\mathbb{Z}[1/2]$ 上でそれぞれ proper なことを示せばよい. $\mathbb{Z}[1/3]$ 上で示す. また $Y(3)$ を考えると, natural map $Y(3) \to (\mathrm{Ell})|_{\mathbb{Z}[1/3]}$ は etale presentation だったが, $Y(3)$ は $\mathbb{Z}[1/3]$ 上の smooth affine curve だったので, $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}[1/3]}$ 上 quasi-compact, 局所有限型. したがって, $(\mathrm{Ell})|_{\mathbb{Z}[1/3]}$ も $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}[1/3]}$ 上 quasi-compact, 局所有限型. とくに有限型なので, separated と proper を示すためには付値判定法を使えば良い.

まず separated を示す. K を dvr とする.

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{Ell})|_{\mathbb{Z}[1/3]} \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Spec}(K) \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d] \\ \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}[1/3]} & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[ul, shift right, "x_1"'] \arrow[ul, shift left, "x_2"] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{O}_K$ 上の楕円曲線 E_1, E_2 に対し, K 上の同型 $\tau_K : E_{1,K} \cong E_{2,K}$ が与えられているとする (自動的に $j(E_1) = j(E_2)$). このとき, τ_K が $\mathcal{O}_K$ 上の同型 $\tau : E_1 \cong E_2$ に延びれば良い (j-invariant には自動的に id を引き起こすから). しかしこれは Néron 普遍性の帰結.

次に proper を示す.

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ell})|_{\mathbb{Z}[1/3]} \arrow[d] & \mathrm{Spec}(K) \arrow[l] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(L) \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}[1/3]} & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \arrow[l] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_L) \arrow[l] \arrow[ull, dotted]
\end{tikzcd}$$

E を K 上の楕円曲線で j-invariant が $\mathcal{O}_K$ に入るものとすると, E は potentially good reduction だから K の有限次拡大 L が存在して, $E \times_K L$ は $\mathcal{O}_L$ 上の楕円曲線に延びる. これは上の図式を 2-commutative にする射が存在すると言うことだから, 付値判定法から proper が示せた. $\mathbb{Z}[1/2]$ 上でも, $Y(4)$ を使って同じ議論ができる.

□

命題 3.3 $\mathbb{Z}$ 上の *Deligne-Mumford stack* (Ell) の *coarse moduli* は $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$.

証明. (Ell) の対角射が finite なことはさっき示した. したがって (Ell) には coarse moduli space $\pi : (\mathrm{Ell}) \to X$ が存在する. j-invariant が定める写像 $j : (\mathrm{Ell}) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ を考えると, coarse moduli の普遍性からこれは $f : X \to \mathrm{A}^1_{\mathbb{Z}}$ を factor する.

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ell}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "j"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& \mathrm{A}^1_{\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}$$

f が同型であることを示す. ここで, π は全射であり j は proper だったから, f は quasi-compact. したがって, Keel-森の定理により, f は有限型, separated. また π が universally homeo だから, j の properness から f の properness が出る. 閉体上では j-invariant と楕円曲線の同型類は一対一対応するから, j は閉点に全単射を引き起こす. したがって, Zariski の主定理から f の同型が出る.

□

4 modular polynomial の moduli 解釈

$\varphi_m(j, j') \in \mathbb{Z}[j, j']$ を modular polynomial, T_m を $S = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ の中で φ_m が定める閉部分スキームとする.

命題 4.1 k を閉体とするとき,

$$T_m(k) \subseteq S(k) = \{[E, E'] \mid E, E' \text{は } k \text{ 上の楕円曲線}\}$$

は, 右辺の次のような部分集合と一致.

$$\{[E, E'] \mid \textit{degree } m \text{ の } \textit{isogeny } E \to E' \text{ が存在}\}$$

証明. k の標数が 0 のときは, modular polynomial の定義そのもの. 以下, k の標数を $p > 0$ とする.

$\mathbb{Z}$ 上の stack $[m\text{-Isog}]$ を次のように定義する.

- $\mathrm{Spec}(R) \in (\mathrm{Aff}/\mathbb{Z})$ 上の object は, R 上の楕円曲線 E, E' の間の degree m の isogeny $f : E \to E'$.
- R 上の morphism $(f_1 : E_1 \to E_1') \to (f_2 : E_2 \to E_2')$ は, 次の図式を可換にするような R 上の同型 $\sigma : E_1 \cong E_2$, $\sigma' : E_1' \cong E_2'$ の組.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\sigma"'] & E_1' \arrow[d, "\sigma'"] \\ E_2 \arrow[r, "f_2"'] & E_2' \end{tikzcd}$$

- base change 射は自然な pull-back.

この stack は次のような stack と (圏同値で) 同一視できる.

- $\mathrm{Spec}(R) \in (\mathrm{Aff}/\mathbb{Z})$ 上の object は, R 上の楕円曲線 E と, E の rank m の finite locally free R-subgroup scheme G の組 (E, G)
- R 上の morphism $(E, G) \to (E', G')$ は, R 上の同型 $E \cong E'$ で G を G' に移すもの.
- base change 射は自然な pull-back.

このとき, 次のことが知られている.

補題 4.2 ([Katz-Mazur], Theorem 6.8.1) *$\mathbb{Z}$-stack の射 $[m\text{-Isog}] \to (\mathrm{Ell})$ を, $(E, G) \mapsto E$ で定めると, この射は representable, finite flat で, $\mathbb{Z}[1/m]$ 上は finite etale.*

このことから, $[m\text{-Isog}]$ も Deligne-Mumford stack で, $\mathbb{Z}$ 上 separated, flat, 有限型であり, しかも対角射が finite になることが示せる. したがって, $[m\text{-Isog}]$ には coarse moduli space X が存在し, $\mathbb{Z}$-stack の射 $[m\text{-Isog}] \to (\mathrm{Ell})$ は finite map $X \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ に延びる. 従って X は $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ 上有限な affine スキームである. stack と coarse moduli の構造層の対応から, X が $\mathbb{Z}$ 上 flat, $\mathbb{Z}[1/m]$ 上 reduced であることも分かる (また, X の flat base change も同じ性質を持つ).

次に, $\mathbb{Z}$-stack の射

$$F : [m\text{-Isog}] \to (\mathrm{Ell}) \times (\mathrm{Ell})$$
$$(E, G) \mapsto (E, E/G)$$

を考える. まず, この射が representable, finite であること, つまり, R 上の楕円曲線 E, E' に対し, R 上の関手

$$T \mapsto \{(G \subseteq E_1|_T, \tau) \mid G \text{ は finite locally free subgroup of rank } m\ , \tau \text{は同型 } (E_1|_T)/G \cong E_2|_T\}$$

が R 上の有限スキームで representable であることを示す. 上の lemma より, R 上の関手

$$T \mapsto \{(G \subseteq E_1|_T \mid G \text{ は finite locally free subgroup of rank } m\}$$

は R 上の有限平坦代数 B で representable. B 上の universal element を $\mathbb{G}$ とおく. これは, B 上 finite locally free of rank m な $E_1|_B$ の部分群スキーム. これにより, 問題の関手は,

$$T \mapsto \{R\text{-algebra hom } \psi : B \to T \text{ と同型 } \tau : \psi^*(E_1|_B/\mathbb{G}) \cong E_2|_T \text{ の組 }\}$$

と同型. 従って, $E := E_1|_B/\mathbb{G}$, $E' := E_2|_B$ とおくとき, $\underline{\mathrm{Isom}}(E, E')$ が B 上 representable, finite であることを示せばよいが, これは前の章で証明したのと同様にできる.

F は coarse moduli スキームの間に有限射

$$X =: \mathrm{Spec}(C) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j, j'])$$

を引き起こす. この射の像スキーム $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j, j']/I)$ (ここで $I := \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}[j, j'] \to C)$) が modular polynomial $\varphi_m(j, j')$ で定義されることを示せばよい.

$X_{\mathbb{Q}}$ は geometrically reduced だから, $\mathbb{Q}[j, j']/I\mathbb{Q}[j, j']$ も geometrically reduced であり, 同じく geometrically reduced な $\mathbb{Q}$-algebra $\mathbb{Q}[j, j']/\varphi_m\mathbb{Q}[j, j']$ と閉点の集合が ($\mathbb{A}^2(\bar{\mathbb{Q}})$ の部分集合として) 等しい. したがって, $\mathbb{Q}[j, j]$ においては $I\mathbb{Q}[j, j']$ は φ_m で生成される.

$I = (g_1, \ldots, g_r)$ とおくと, このことからある自然数 M と $H_i \in \mathbb{Z}[j, j']$ に対し

$$Mg_i = H_i\varphi_m$$

と書ける. φ_m の inhalt は 1 なので, $M|H_i$. 結局 $g_i \in (\varphi_m)$ がわかる. 従って $I \subseteq (\varphi_m)$ だが, $\otimes\mathbb{Q}$ するとこれらは一致するので, $(\varphi_m)/I \subseteq \mathbb{Z}[j, j']/I$ は torsion. ところが $\mathbb{Z}[j, j']/I \subseteq C$ は $\mathbb{Z}$-flat だったので, $I = (\varphi_m)$.

□

命題 4.3 合成

$$F : [m\text{-Isog}] \to (\mathrm{Ell}) \times (\mathrm{Ell}) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$$

の像 *stack* を $\mathcal{Y}$ とおく. このとき $\mathcal{Y} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j, j']/\varphi_m)$.

証明. $\mathcal{Y}$ は $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ の full subcategory だから, $y, y' \in \mathcal{Y}(R)$ に対し, $\underline{\mathrm{Isom}}(y, y')_R$ は $\mathcal{Y}$ で考えても $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ で考えても同じ. 従って $\mathcal{Y}$ の対角射は representable な closed immersion. とくに $\mathcal{Y}$ は Deligne-Mumford stack. [LM, Corollaire 8.1.3] により $\mathcal{Y}$ は algebraic space とわかる. algebraic space の monomorphism $i : \mathcal{Y} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ は, proper であれば Zariski の主定理より closed immersion になるので, $\mathcal{Y}$ がスキームであることが示せる. 以下 i の properness を示す.

まず F が universally closed で $[m\text{-Isog}] \to \mathcal{Y}$ は epimorphism だから, i も universally closed. 同様に i が quasi-compact であることもわかる. また, F は局所有限表示であり i は monomorphism なので, [LM, Proposition 4.15] を使うと i も局所有限表示だとわかる. $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ が Noether だから, i は局所有限型でもある. したがって i は有限型. F は j-invariant が定める射だから, 前と同様に付値判定法で i が separated だと分かる. これで i が proper であることが示せた.

ゆえに $\mathcal{Y} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j, j']/J)$ と書け, F は $[m\text{-Isog}]$ の coarse moduli スキーム $X = \mathrm{Spec}(C)$ に次のような射を引き起こす.

$$\begin{tikzcd}
{[m\text{-Isog}]} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Y} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j, j']/J) \arrow[r] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \\
X \arrow[r] \arrow[ur] & \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j, j']/\varphi_m) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ここで下の行はさっきの命題より, 像スキームを表している. ところが, $\mathcal{Y}$ の定義より, $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j, j']/J) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ は $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j, j']/J)$ の etale covering $\mathrm{Spec}(B)$ まで行くと $[m\text{-Isog}]$ を factor する. つまり

X も factor するので, 下のような図式が可換になる.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[j,j']/J \arrow[r] \arrow[d] & B \\ C \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

射 $\mathbb{Z}[j,j']/J \to B$ は忠実平坦なので特に単射. したがって図式から $\mathbb{Z}[j,j']/J \to C$ も単射だとわかる. X は $\mathbb{Z}$ 上 flat, $\mathbb{Q}$ 上 reduced だったから $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j,j']/J)$ も reduced. つまり $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j,j']/J)$ は $X \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ の像スキームであるので, $J = (\varphi_m)$.

□

5 modular polynomial と universal deformation ring

定理 1.1 の証明の概略. 記号ははじめの章に述べた通り.

Serre-Tate の定理と formal group の deformation theory により, $(E,E')_{/k}$ の $W = W(k)$ 上の universal deformation ring における $f \in \mathrm{Hom}(E,E')$ の lifting locus は単項イデアルで, $R/(\varphi_{m,f})$ は W-flat であることが示せる.

補題 5.1 *$f,g : E \to E'$ を degree m の isogeny とする. このとき, $f \neq \pm g$ なら $\varphi_{m,f}$ と $\varphi_{m,g}$ は互いに素 (逆に, $f = \pm g$ ならこれらは unit 倍を除いて一致).*

証明. $h \in R$ を $\varphi_{m,f}$ と $\varphi_{m,g}$ の共通の既約因子とする. $C = \mathrm{Spec}(R/h)$, $M = \mathrm{Frac}(R/h)$ とする. M は標数 0 の体だから, $\mathrm{End}(\mathbb{E} \times_R C) \subseteq \mathrm{End}(\mathbb{E} \times_R \mathrm{Spec}(\bar{M}))$ は $\mathbb{Z}$ か虚二次体の order. h の取り方より, $\mathbb{E} \times_R C$ と $\mathbb{E}' \times_R C$ は isogenous だから, $\mathrm{End}(\mathbb{E} \times_R C)$ と $\mathrm{End}(\mathbb{E}' \times_R C)$ は両方とも $\mathbb{Z}$ か, 両方とも虚二次体の order かのどちらか. 後者だとすると, $\mathbb{E} \times_R C$ と $\mathbb{E}' \times_R C$ の j-invariant は 0 か 1728 となる. したがって, $s = j(\mathbb{E} \times_R C)$, $s' = j(\mathbb{E}' \times_R C)$ とおけば, $j(\mathbb{E}) - s$, $j(\mathbb{E}') - s' \in (h) \subseteq R = W[[t,t']]$. ここで $j(\mathbb{E}) \in W[[t]]$, $j(\mathbb{E}') \in W[[t']]$ はともに constant ではないので, (h) が単項イデアルであることに反する. したがって $\mathrm{End}(\mathbb{E} \times_R C) = \mathrm{End}(\mathbb{E}' \times_R C) = \mathbb{Z}$.

さてここで, $f,g : E \to E'$ は R/h 上の degree m の isogeny $F,G : \mathbb{E} \times_R C \to \mathbb{E}' \times_R C$ に lift しているが, ${}^tF \circ F$ と ${}^tF \circ G$ は degree が等しい $\mathrm{End}(\mathbb{E} \times_R C) = \mathbb{Z}$ の元なので, ${}^tF \circ F = \pm {}^tF \circ G$ を得る. したがって $F = \pm G$ であり, $f = \pm g$.

□

一方, R は strict local で $[m\text{-Isog}] \to (\mathrm{Ell}) \times (\mathrm{Ell})$ は representable finite unramified だから, その $\mathrm{Spec}(R) \to (\mathrm{Ell}) \times (\mathrm{Ell})$ によるファイバー積は $\mathrm{Spec}(\prod R/I_i)$ の形をしている ([EGA IV, Proposition 18.8.1-3]). この各成分の極大イデアルが定める点 $x_f : \mathrm{Spec}(k) \to [m\text{-Isog}]$ が, E から E' への degree m の isogeny $f : E \to E'$ の同型類に対応している. このことから, この $f : E \to E'$ の universal deformation ring は対応する成分 R/I_i だと分かるが, 特に $B = R/J$ の形の R-algebra を考えることにより, 各成分が対応する $f : E \to E'$ の lifting locus になっていることも分かる. つまり $I_i = (\varphi_{m,f})$. さらに, $[m\text{-Isog}]$ の $x_f : \mathrm{Spec}(k) \to [m\text{-Isog}]$ での局所環 (すなわち, $[m\text{-Isog}]$ の etale presentation U の, U への x_f の lift における strict completion) は $[m\text{-Isog}]$ の universal deformation ring と一致する．ここで $[m\text{-Isog}]$ は $\mathbb{Z}$ 上 reduced だったので, etale presentation の strict completion も reduced. つまり $R/\varphi_{m,f}$ は reduced だと分かった.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\prod R/\varphi_{m,f}) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathrm{Spec}(R) \arrow[dd] & \\
& \mathrm{Spec}(R/I) \arrow[ur] \arrow[dd, dotted] & & \\
{[m\text{-Isog}]} \arrow[rr] \arrow[dr] & & (\mathrm{Ell}) \times (\mathrm{Ell}) \arrow[r] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \\
& \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j,j']/\varphi_m) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

さっきの射

$$[m\text{-Isog}] \times_{(\mathrm{Ell})\times(\mathrm{Ell})} \mathrm{Spec}(R) \cong \mathrm{Spec}(\prod R/\varphi_{m,f}) \to \mathrm{Spec}(R)$$

を考える．ここで直積は $\mathrm{Hom}(E, E')$ の元で degree が m のものの同型類を走る．この射の像スキームを $\mathrm{Spec}(R/I)$ とおくと, 上の補題から $I = \prod \varphi_{m,f}$ とわかる．但しこっちの積は $\mathrm{Hom}(E, E')$ の元で degree が m のものの ± 1 による同値類を走っている．R/I は strict local なので任意の etale covering への section を持つ．したがって命題 4.3 より, 合成 $\mathrm{Spec}(R/I) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ は像 stack $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[j,j']/\varphi_m)$ を factor する．とくに,

$$\varphi_m \in I = \prod_{f \bmod \pm 1} \varphi_{m,f}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\prod R/\varphi_{m,f}) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathrm{Spec}(R) \arrow[dd] & \\
& \mathrm{Spec}(R/I) \arrow[ur] \arrow[dd, dotted] & & \\
{[m\text{-Isog}]} \times_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}} \mathrm{Spec}(R) \arrow[rr] \arrow[dr] & & ((\mathrm{Ell}) \times (\mathrm{Ell})) \times_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}} \mathrm{Spec}(R) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R) \\
& \mathrm{Spec}(R/\varphi_m) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

これにより引き起こされる射 $R/\varphi_m \to R/(\prod \varphi_{m,f})$ が同型であることを示したい.

補題 5.2 R において, φ_m の既約因子の集合は $\{\varphi_{m,f} | f \ mod \ \pm 1\}$ と一致する.

証明. $h \in R$ を既約元とする．このとき,

$$\begin{gathered}
\mathrm{Spf}(R/h) \to \mathrm{Spf}(R) \text{ が } \mathrm{Spf}(R/I) \text{ を factor する} \\
\Leftrightarrow I \subseteq (h), \text{ つまり } h = \varphi_{m,f} \text{ となる } f \text{ が存在} \\
\Leftrightarrow \text{degree } m \text{ の isogeny } F : \mathbb{E}_{R/h} \to \mathbb{E}'_{R/h} \text{ が存在.}
\end{gathered}$$

一方, 像 stack の定義から,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Spec}(R/h) \to \mathrm{Spec}(R) \text{ が } \mathrm{Spec}(R/\varphi_{m,f}) \text{ を factor する}\\ \Leftrightarrow\ &\text{etale 全射 } \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(R/h) \text{ が存在して, } B \text{ 上には degree } m \text{ の isogeny}\\ &G : \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \text{ で, } j(\mathcal{E}) = j(\mathbb{E}_B),\ j(\mathcal{E}') = j(\mathbb{E}'_B) \text{ を満たすものがある.}\end{aligned}$$

R/h は strict local だから, $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(R/h)$ は section を持つので, $B = R/h$ としてよい. 従って, 最後の j-invariant の条件から R/h 上の同型 $\mathcal{E} \cong \mathbb{E}_{R/h}$, $\mathcal{E}' \cong \mathbb{E}'_{R/h}$ の存在を言えば主張が従う.

ここで,

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{R/h}(\mathcal{E}, \mathbb{E}_{R/h}) \to \mathrm{Spec}(R/h)$$

は finite unramified な**全射**である (finite unramified は (Ell) が Deligne-Mumford だからで, 閉体上では j-invariant が等しければ楕円曲線が同型であることから全射が出る). R/h は strict local だから, 前と同様にこの射は, $h \in J_i$ なる R のイデアル $J_1, \ldots, J_r$ によって

$$\mathrm{Spec}(\prod R/J_i) \to \mathrm{Spec}(R/h)$$

と書ける. この射が全射であるので, R/h が reduced なことから $\cap J_i = (h)$ がわかる. もし全ての i で $(h) \subsetneq J_i$ だったとすると, $g_i \in J_i \setminus (h)$ を取れば $g_1 \cdots g_r \in \cap J_i = (h)$ となり矛盾. つまり, $\underline{\mathrm{Isom}}_{R/h}(\mathcal{E}, \mathbb{E}_{R/h})$ の component のうち, 少なくともひとつは R/h からの section を持つ. したがって R/h 上の同型 $\mathcal{E} \cong \mathbb{E}_{R/h}$ を得られた. $\mathcal{E}' \cong \mathbb{E}'_{R/h}$ の方も同様.

$\square$

つまり, $R/\varphi_m \to R/(\prod \varphi_{m,f})$ は同型 $(R/\varphi_m)_{\mathrm{red}} \cong R/(\prod \varphi_{m,f})$ を引き起こす (右辺は reduced であったことに注意). 結局主張は次の補題に帰着された.

補題 5.3 R/φ_m は *reduced.*

証明. universal deformation ring R は Deligne-Mumford stack $(\mathrm{Ell}) \times (\mathrm{Ell})$ の $x = (E, E')$ における局所環であり, これは $(\mathrm{Ell}) \times (\mathrm{Ell})$ の etale presentation の strict completion と同型なのだった. (Ell) の etale presentation は modular curve $Y(3)_{\mathbb{Z}[1/3]}$ と $Y(4)_{\mathbb{Z}[1/2]}$ を直和して作っていた. したがって, $p \neq 3$ (*resp.* $p \neq 2$) なら, R は $Y(3)_{\mathbb{Z}[1/3]} \times Y(3)_{\mathbb{Z}[1/3]}$ (*resp.* $Y(4)_{\mathbb{Z}[1/2]} \times Y(4)_{\mathbb{Z}[1/2]}$) の x の上にある点における strict completion と同型であるとしてよい. 以下 $p \neq 3$ の場合を考える ($p \neq 2$ の場合も同様).

j-invariant が定める射 $j : Y(3)_{\mathbb{Z}[1/3]} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}[1/3]}$ は finite flat であった. 左辺の affine 環を B_3 と書く. $(B_3 \otimes B_3)/\varphi_m$ が reduced を示せばよい. $\mathbb{Z}[j, j']/\varphi_m$ は $\mathbb{Z}$-flat だったので, $(B_3 \otimes B_3)/\varphi_m$ もそう. ゆえ $\mathbb{Q} \otimes (B_3 \otimes B_3)/\varphi_m$ が reduced を示せばよいが, このためには $\mathbb{C} \otimes (B_3 \otimes B_3)/\varphi_m$ が reduced ならよい. $B_3 \otimes \mathbb{C}$ は modular curve $Y(3) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の affine 環. これは $\Gamma(3) \setminus \mathfrak{h}$ の 2 個の直和だったが, 各連結成分で reduced ならよいので, 以下 B を $Y(3) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の連結成分の affine 環として, $C = B \otimes_{\mathbb{C}} B$ とおき, C/φ_m が reduced であることを示す.

$X(3)_{\mathbb{C}}$ (*resp.* $X(4)_{\mathbb{C}}$) は genus 0 だから, affine 環 C は $\mathbb{C}[X]$ から有限個の点を除いたものの 2 階直積. つまり, ある $s(X) \in \mathbb{C}[X]$ に対し, $C = \mathbb{C}[X, Y, 1/s(X), 1/s(Y)]$, と書ける. したがって C は UFD. universal elliptic curve の j-invariant が定める射を, 変数の記号を変えて

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[X, Y] &\to C = \mathbb{C}[X, Y, 1/s(X), 1/s(Y)]\\ X &\mapsto f(X)\\ Y &\mapsto f(Y)\end{aligned}$$

とおく．これは対応する affine スキームに finite flat な全射を引き起こしていたのだった．

補題 5.4 $\phi_1(X,Y)$, $\phi_2(X,Y)$ を $\mathbb{C}[X,Y]$ の異なる既約元とする．このとき，$\phi_1(f(X),f(Y))$ と $\phi_2(f(X),f(Y))$ は互いに素．

証明. $h(X,Y)\in C$ を $\phi_1(f(X),f(Y))$ と $\phi_2(f(X),f(Y))$ の共通の既約因子とする．Noether の正規化定理より, $\mathbb{C}$ 上有限生成代数が半局所環なのと 0 次元なのは同値なので, $\mathrm{Spm}(C/h)$ は無限集合．f は有限射だったので, この点の f による像も無限集合．$h(X,Y)\mid\phi_i(f(X),f(Y))$ だから, $\mathrm{Spm}(C)$ における $h(X,Y)$ の零点 (x,y) に対し, $(f(x),f(y))$ は $\mathrm{Spm}(\mathbb{C}[X,Y])$ における $\phi_i(X,Y)$ の無限個の共通零点を与える．したがって $\mathbb{C}[X,Y]/(\phi_1,\phi_2)$ は 0 次元ではない．これは $\phi_1\neq\phi_2$ に矛盾．

□

この補題と modular polynomial $\varphi_m(X,Y)$ の既約分解 $\varphi_m=\prod\phi_{m/n^2}$ により, 主張は次の補題から従う．

補題 5.5 $\phi(X,Y)$ を $\mathbb{C}[X,Y]$ の既約元で，$\phi(X,Y)=\pm\phi(Y,X)$ を満たすものとする．このとき，$\phi(f(X),f(Y))\in C$ の全ての既約因子は $\phi(f(X),f(Y))$ を丁度 1 回だけ割り切る．

証明. $g(X,Y)^2\mid\phi(f(X),f(Y))$ となる既約元 $g(X,Y)\in B$ が存在したとする．一般に $F(X,Y)$ の X での偏微分を $F_X(X,Y)$, Y での偏微分を $F_Y(X,Y)$ で表すことにすると, $\phi(f(X),f(Y))$ の Jacobian 行列は

$$(f'(X)\phi_X(f(X),f(Y)),f'(Y)\phi_Y(f(X),f(Y)))$$

となり, このふたつの成分はともに $g(X,Y)$ で割り切れる．

$g(X,Y)\nmid\phi_X(f(X),f(Y))$ だとすると, $g(X,Y)\mid f'(X)$ だから, $g(X,Y)$ の零点全体の集合は

$$\{X=x_1,\dots,x_r,Y \text{ は無限個の点を動く }\}$$

の形をしている．f は対応する affine スキームに全射を引き起こしていたから, $\phi(X,Y)$ の零点全体も同じタイプの集合．$X=x$, Y は無限個の点を動く, という零点の族を考えることで, $\phi(X,Y)$ を Y の多項式と思った時の各次数の係数は $X-x$ で割り切れることがわかる．ϕ は既約だったから $\phi(X,Y)=c(X-x)$ $(c\in\mathbb{C})$ と書けるが，これは ϕ の条件に反する．同様に $g(X,Y)\nmid\phi_Y(f(X),f(Y))$ もありえない．

ゆえに $g(X,Y)$ は $\phi_X(f(X),f(Y))$ と $\phi_Y(f(X),f(Y))$ の共通因子である．したがって $\phi(f(X),f(Y))$, $\phi_X(f(X),f(Y))$, $\phi_Y(f(X),f(Y))$ は無限個の共通零点を持つ．ここで f は有限射だったから, $\mathbb{C}[X,Y]/(\phi(X,Y),\phi_X(X,Y),\phi_Y(X,Y))$ も無限個の極大イデアルを持ち，ゆえに 0 次元ではない．ϕ は既約であり, 他のふたつは ϕ より次数が低いので, $\phi_X=\phi_Y=0$ となるしかない．これは ϕ が定数であることを意味するので, 矛盾．

□