ARGOS seminar on intersections of modular correspondences, Astérisque **312** (2007) の紹介 (5)

服部 新
北大理学研究院 3-601
shin-h@math.sci.hokudai.ac.jp

平成 19 年 12 月 1 日

※ B. H. Gross, K.Keating, *On the intersection of modular correspondences*, Invent. Math **112** (1993), 225-245 の解説本

1 今回証明すること

参考文献：B. Gross: *On canonical and quasicanonical liftings*, Invent. Math. **84** (1986) 321–326.

$K/\mathbb{Q}_p$：有限次拡大, 素元 $\pi = \pi_K$, 剰余体 $\mathbb{F}_q$
L/K：二次拡大, 相対分岐指数 $e = e(L/K)$
$\mathcal{O}_s := \mathcal{O}_K + \pi^s \mathcal{O}_L$：$\mathcal{O}_L$ の中の, conductor=s の order
$k := \bar{\mathbb{F}}_q$. つまり, K の剰余体から k への map は fix されている.
G：k 上の height=2 の formal $\mathcal{O}_K$-module (同型を除いて unique)
$\mathcal{O}_D := \mathrm{End}_k(G)$. これは K 上の division quaternion algebra D の maximal order.
$W := W(k)$, $\hat{K}^{\mathrm{nr}} = \mathrm{Frac}(W)$,
$\sigma_{L/K} \in \mathrm{Gal}(L/K)$ を, L/K が分岐する場合は id, L/K が不分岐な場合は $\mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元, と定める.

定理 1.1 *K-aigebra の埋め込み $\kappa : L \to D$ を fix する. $\mathcal{O}_K$-linear map*

$$r_\kappa : \mathcal{O}_L \xrightarrow{\kappa} \mathcal{O}_D = \mathrm{End}_k(G) \xrightarrow{\mathrm{Lie}} k$$

に関する $\mathcal{O}_L$ の strict completion を A, $M := \mathrm{Frac}(A)$, とおく.

(i) 任意の $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, G の formal $\mathcal{O}_K$-module としての (M の有限次拡大 N の整数環 $\mathcal{O}_N$ への) lift F_s と, $\mathcal{O}_K$-algebra の同型

$$\gamma_s : \mathcal{O}_s \cong \mathrm{End}(F_s)$$

の組で, 次の二つの図式を可換にするものが存在.

$$\text{(End)}\quad \begin{tikzcd} \mathcal{O}_s \arrow[r, "\sigma_{L/K}^s"] \arrow[d, "\text{can.}"'] & \mathcal{O}_s \arrow[r, "\gamma_s"] & \mathrm{End}(F_s) \arrow[d, "r_\kappa"] \\ \mathcal{O}_L \arrow[r, "\kappa"] & \mathcal{O}_D \arrow[r, equal] & \mathrm{End}(G) \end{tikzcd}$$

$$\text{(Lie)}\quad \begin{tikzcd} \mathcal{O}_s \arrow[r, "\gamma_s"] \arrow[d, "\text{can.}"'] & \mathrm{End}(F_s) \arrow[d, "\mathrm{Lie}"] \\ \mathcal{O}_L \arrow[r, "\text{can.}"] & A_s \end{tikzcd}$$

(ii) M_s を, 局所類体論で $\mathcal{O}_s^\times \subseteq \mathcal{O}_L^\times$ に対応する M の有限次 *Abel* 拡大とする.

このとき, F_s の $*$-同型類の中に $\mathcal{O}_{M_s}$ 上 *defined* なものが存在し, ここから定まる G の *universal deformation ring* からの *natural map*

$$W[[t]] \to \mathcal{O}_{M_s}$$

は t を $\mathcal{O}_{M_s}$ の素元に移す *(*とくに全射*)*.

定義 1.2 このような F_s を, level s の **quasi-canonical lift** という. level $s=0$ の quasi-canonical lift を特に, **canonical lift** という.

注 1.3 ARGOS seminar の本の定義は**間違っている**. 上のようにするのが正しい. Gross のもとの定義では, κ に対する canonical lift F からの level s の strict minimal isogeny が存在するような G の formal $\mathcal{O}_K$-module としての lift のことを, level s の quasi-canonical lift と呼んでいる (用語は後述). 二つの定義は同じ意味になる (Appendix を参照). Gross の定義を intrinsic に書き換えたものが上の定義. 以下間違いを正す意味で本の定義に沿った形でレジュメを書くが, 実質的にはレジュメの Section 6 から Section 9 は必要無く, 最後の Appendix を参照すれば十分.

2 canonical lift

2.1 準備

命題 2.1 D : K 上の *division algebra*, $\dim_K(D) = h^2$, $\mathrm{inv}(D) = \frac{1}{h}$, とする.
このとき,

(i) k 上の *height* h の *formal* $\mathcal{O}_K$*-module* はみな同型

(ii) $\mathrm{End}_k(G) \cong \mathcal{O}_D$: *maximal order*

(iii) G の k-同型類のなかに, $\mathbb{F}_q$ 上 *defined* であるようなものが存在. このとき,

$$\Pi(X) := X^q$$

で定まる元 $\Pi \in \mathrm{End}(G)$ は $\mathcal{O}_D$ の素元で, $\Pi^h = \pi$ を満たす.

注 2.2 最後の主張を満たす G は次のようにして作れる. K'/K を不分岐 h-次拡大とし, $[\pi](X) = \pi X + X^{q^h}$ に対応する $\mathcal{O}_{K'}$ 上の Lubin-Tate formal group F' を考える. これは $\mathcal{O}_{K'}$ 上の formal $\mathcal{O}_{K'}$-module だが, $[\pi](X)$ が $\mathcal{O}_K$ 上定義されているので, 群構造と $\mathcal{O}_K$-作用は $\mathcal{O}_K$ 上 defined になっている. そこで, $\mathcal{O}_K$-algebra の射 $\mathcal{O}_{K'} \to k$ をひとつ固定し, G をこの map による F' の reduction とすると, G は $\mathbb{F}_q$ 上 defined であり, 上の条件を満たす.

さらにこの場合, $[\pi](X) = \pi X + X^{q^h}$ が $\mathcal{O}_K$ 上 defined であるので次のことがわかる. $\mathrm{Gal}(K'/K)$ の生成元を τ とおくと, $a \in \mathcal{O}_{K'}$ に対し, $[a](X)$ が $[\pi](X)$ と可換なことから, $[a]^\tau(X)$ も $[\pi](X)$ と可換である. 但し $f^\tau(X)$ で, $f(X) \in \mathcal{O}_{K'}[[X]]$ の各係数に τ を施した巾級数を表した. 従って, [岩澤, 補題 3] から, $[a]^\tau = [\tau(a)]$ である.

注 2.3 $h = 2$ とし, 二次拡大 L/K を fix する. このとき, 上の最後の主張を満たす G は, L/K に対応する Lubin-Tate formal group の reduction としても得られる. 実際, L/K が不分岐なときは上の注で示した. この場合, $\mathcal{O}_K$-algebra の射

$$r_{\mathrm{LT}} : \mathcal{O}_L \to k$$

をひとつ選んでいることに注意する. L/K が分岐するときは, $[\pi_L](X) = \pi_L X + X^q$ に対応する $\mathcal{O}_L$ 上の Lubin-Tate formal group F_{π_L} の reduction を G とする. F_{π_L} は $\mathcal{O}_L$ 上 defined であり, L/K が完全分岐なので, G は $\mathbb{F}_q$ 上 defined. このとき $\Pi = [\pi_L] \in \mathrm{End}_k(G)$. この場合は, $\mathcal{O}_K$-linear map $r_{\mathrm{LT}} : \mathcal{O}_L \to k$ は canonical なものがひとつ定まっていることに注意.

注 2.4 主定理 B の証明において, G とその universal deformation ring R_G とを考えていた. ここで, G を k-同型な G' に変えると, deformation ring の間に W-同型 $R_G \cong R_{G'}$ が生じることがわかる. また, この同型で $\psi \in \mathrm{End}_k(G)$ が $\psi' \in \mathrm{End}_k(G')$ に移ったとすると, ψ の lifting locus は同型 $R_G \cong R_{G'}$ によって ψ' の lifting locus に移る.

従って, 定理 B を示すためには, G を k-同型類の中で自由に取り換えても構わない. そこで以下, G は上のような, 二次拡大 L/K に対する Lubin-Tate formal group の reduction であるとして話を進める.

注 2.5 G の deformation functor の定義として, 次の二つが考えられる. (B, m, k) を W 上の Artin 局所環とするとき,

(i) $\mathcal{D}(B)$ は, 集合 $\{F_{/B} \mid F \otimes k = G\}$ を, $*$-同型で割ったもの.

(ii) $\mathcal{D}'(B)$ は, 集合 $\{(F, i)_{/B} \mid i : F \otimes k \cong G\}$ を, i を保つ同型で割ったもの.

この二つの関手は同型である. 実際, natural map

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(B) &\to \mathcal{D}'(B) \\ F &\mapsto (F, \mathrm{id}) \end{aligned}$$

の逆写像を次のようにして構成できる. $(F, i) \in \mathcal{D}'(B)$ に対し, $i : F \otimes k \cong G$ の適当な $B[[X]]$ への lift を $\tilde{i}(X)$ とおく. $B[[X]]$ の元 $\tilde{F}(X, Y)$ を

$$\tilde{F}(X, Y) = \tilde{i}^{-1}(F(\tilde{i}(X), \tilde{i}(Y)))$$

で定めると, これは $\tilde{i}: F \to \tilde{F}$ を同型にするような unique な群構造であり, $\tilde{F} \otimes k = G$ を満たす.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d] & \tilde{F} \arrow[d] \\ F \otimes k \arrow[r, "i"'] & \tilde{F} \otimes k = G \end{tikzcd}$$

この $\tilde{F}$ は, up to $*$-同型を除いて $\tilde{i}$ の取り方によらず, i を保つ同型 $\tau : (F, i) \to (F', i')$ を $*$-同型 $\tilde{F} \to \tilde{F}'$ に移す. 従ってこの対応は functorial な射 $\mathcal{D}'(B) \to \mathcal{D}(B)$ を引き起こす. これが求める逆写像であることもすぐわかる.

これまでは $\mathcal{D}(B)$ の形の deformation を考えていたが, 本文に合わせて, 以下では $\mathcal{D}'(B)$ の形の deformation も考えることにする (論理的には, 前者だけ考えれば十分).

2.2 formal $\mathcal{O}_L$-module

以下, $h = 2$ とし, G を k 上の height 2 の formal $\mathcal{O}_K$-module とし, $\mathrm{End}_k(G)$ と $\mathcal{O}_D$ とを同一視する.

$\kappa : L \to D$ を K-algebra の埋め込みとする. このような埋め込みは, $D^\times$ の元による conjugate を除いて unique に決まることが知られている.

このとき, $\mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_D = \mathrm{End}_k(G)$ は $\mathcal{O}_K$-linear である. また, 合成

$$r_\kappa : \mathcal{O}_L \xrightarrow{\kappa} \mathcal{O}_D = \mathrm{End}_k(G) \xrightarrow{\mathrm{Lie}} k$$

を考えると, formal $\mathcal{O}_K$-module の定義よりこれも $\mathcal{O}_K$-linear. この map で k を $\mathcal{O}_L$-algebra と思う (つまり, L の剰余体から $\bar{\mathbb{F}}_p$ への, $\mathbb{F}_q$ 上の埋め込みがこれで定まる). これらにより, G には k 上 height 1 の formal $\mathcal{O}_L$-module としての構造が入る.

さらに, $A = \hat{\mathcal{O}}_{L^{\mathrm{nr}}}$ に対し, $r_\kappa : \mathcal{O}_L \to k$ の拡張 $A \to k$ をひとつ選び, これも r_κ と書く. この射のことを, $r_\kappa : \mathcal{O}_L \to k$ の strict completion と呼ぶことにする.

注 2.6 以下, R 上の formal group に $\mathcal{O}_K$ 作用と $\mathcal{O}_L$ や $\mathcal{O}_s$ の作用が同時に考えられる場合でも, $\mathrm{Hom}_R(G, G')$ や $\mathrm{End}_R(G)$ で formal $\mathcal{O}_K$-module としての Hom や End を表すことにする.

2.3 canonical lift の存在

定義 2.7 A 上の formal $\mathcal{O}_L$-module F と, k 上の formal $\mathcal{O}_L$-module の同型 $\lambda : F \otimes_{A, r_\kappa} k \cong G$ の組が G の **canonical lift** であるとは, 次の図式が可換になること.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_L \arrow[r] \arrow[dd, "\kappa"'] & \mathrm{End}_A(F) \arrow[d, "r_\kappa"] \\ & \mathrm{End}_k(F \otimes_A k) \arrow[d, "\mathrm{ad}(\lambda)"] \\ \mathcal{O}_D \arrow[r, equal] & \mathrm{End}_k(G) \end{tikzcd}$$

ただし, $\mathrm{ad}(\lambda)(\phi) = \lambda \circ \phi \circ \lambda^{-1}$.

注 2.8 (i) ここで一番上の射 $\mathcal{O}_L \to \mathrm{End}_A(F)$ は同型である．なぜなら, $\mathrm{End}_A(F) \to \mathrm{End}_M(F\hat{\otimes}M)$ は単射 (cf. [Fröhlich]) だから $\mathrm{End}_A(F)$ は可換であり, D の可換部分体は高々二次元なので.

(ii) (F,λ) が κ に対する canonical lift, F' を F と $*$-同型な formal $\mathcal{O}_L$-module だとすると, (F',λ) も κ に対する G の canonical lift.

(iii) G は formal $\mathcal{O}_L$-module としては height=1 なので, universal deformation ring は $A = \hat{\mathcal{O}}_{L^{\mathrm{nr}}}$ と同型. 従って, κ と λ を fix すると, canonical lift は $\mathcal{O}_L$-linear な $*$-同型を除いて unique に決まる.

(iv) F が上の意味で canonical lift であることは, F が A 上定義された level $s=0$ の quasi-canonical lift であるのと同じこと.

命題 2.9 任意の $\kappa : L \to D$ と *formal* $\mathcal{O}_L$*-module* の同型 $\lambda : G' \cong G$ に対し, $F \otimes k = G'$ なる *canonical lift* (F,γ,λ) が存在.

証明. まず, $\lambda = \mathrm{id} : G \to G$ の場合に帰着する．(F,γ,id) を κ に対する canonical lift として, 別の $\lambda : G' \to G$ を考える．$\lambda(X)$ の $A[[X]]$ への (r_κ による) 適当な lift $\tilde{\lambda}(X)$ を取り, $\tilde{\lambda}$ を同型にするような $A[[X]]$ 上の unique な formal group structure を F' とする．$F' \otimes_{A,r_\kappa} k = G'$ である.

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "\tilde{\lambda}"] \arrow[d, "r_\kappa"'] & F \arrow[d, "r_\kappa"] \\ G' \arrow[r, "\lambda"'] & G \end{tikzcd}$$

F' への $\mathcal{O}_L$-作用も, F への作用を移して $\gamma'(a) := \mathrm{ad}(\tilde{\lambda}^{-1})(\gamma(a))$ と定めると,

$$\mathrm{Lie}(\gamma'(a)) = \mathrm{Lie}(\tilde{\lambda} \circ \gamma(a) \circ \tilde{\lambda}^{-1}) = \mathrm{Lie}(\gamma(a))$$

だから F' も formal $\mathcal{O}_L$-module で, $\tilde{\lambda}$ は $\mathcal{O}_L$-同型. さらに, 以下の図式が可換である.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_L \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dd, "\kappa"'] & \mathrm{End}_A(F) \arrow[r, "\mathrm{ad}(\tilde{\lambda}^{-1})"] \arrow[ddr, "r_\kappa"'] & \mathrm{End}_A(F') \arrow[d, "r_\kappa"] \\ & & \mathrm{End}_k(G') \arrow[d, "\mathrm{ad}(\lambda)"] \\ \mathcal{O}_D \arrow[rr, equal] & & \mathrm{End}_k(G) \end{tikzcd}$$

従って, (F',γ',λ) は κ に対する canonical lift.

そこで以下 $\lambda = \mathrm{id}$ とする．まず特別な κ について示す．$[\pi_L](X) = \pi_L X + X^{q^{\frac{2}{e}}}$ で定まる A 上の Lubin-Tate formal group を F_{LT} とし, 同型 $\mathcal{O}_L \cong \mathrm{End}_A(F_{\mathrm{LT}})$ を γ_{LT} とおく．以前 fix した $\mathcal{O}_K$-linear map r_{LT} に対し, 定義から $F_{\mathrm{LT}} \otimes_{A,r_{\mathrm{LT}}} k = G$ であるので,

$$\kappa_{\mathrm{LT}} : \mathcal{O}_L \underset{\gamma_{\mathrm{LT}}}{\cong} \mathrm{End}_A(F_{\mathrm{LT}}) \to \mathrm{End}_k(G) = \mathcal{O}_D$$

とおくと, $(F_{\mathrm{LT}},\gamma_{\mathrm{LT}},\mathrm{id})$ は κ_{LT} に対する canonical lift. ここで,

$$r_{\kappa_{\mathrm{LT}}} : \mathcal{O}_L \xrightarrow{\kappa_{\mathrm{LT}}} \mathcal{O}_D = \mathrm{End}_k(G) \xrightarrow{\mathrm{Lie}} k$$

は定義から r_{LT} と一致する.

一般の κ について示す. $d \in D^\times$ が存在して $\kappa = \mathrm{ad}(d) \circ \kappa_{\mathrm{LT}}$ と書ける. Π を, $(X \mapsto X^q)$ に対応する D の素元とする. $d = d'\Pi^s$, $d' \in \mathcal{O}_D^\times$, と表す.

$\kappa = \mathrm{ad}(\Pi^s) \circ \kappa_{\mathrm{LT}}$ **の場合.** $\mathrm{ad}(\Pi)$ は $\mathrm{End}(G)$ の元 $g = a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$ に対し,

$$\mathrm{ad}(\Pi)(g) = a_1^q X + a_2^q X^2 + \cdots$$

となる. 従って,

$$\mathrm{ad}(\Pi^s) \circ \kappa(a) = [\sigma_{L/K}^s(a)]_G$$

を得る. つまり次の図式が可換.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_L \arrow[r, "\sigma_{L/K}^s"] \arrow[dr, "\kappa"'] & \mathcal{O}_L \arrow[r, "\gamma_{\mathrm{LT}}"] \arrow[d, "\kappa_{\mathrm{LT}}"] & \mathrm{End}(F_{\mathrm{LT}}) \arrow[d, "r_{\mathrm{LT}}"] \\
 & \mathcal{O}_D \arrow[r, equal] & \mathrm{End}(G)
\end{tikzcd}$$

このことから, $r_\kappa = \sigma_{L/K}^s \circ r_{\mathrm{LT}} = \mathrm{ad}(\Pi^s) \circ r_{\mathrm{LT}}$ と分かる. 従って, 下の可換図式より, $(F_{\mathrm{LT}}, \gamma_{\mathrm{LT}}, \lambda = \mathrm{id})$ が κ に対する canonical lift となる.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_L \arrow[r, "\gamma_{\mathrm{LT}}"] \arrow[d, "\kappa_{\mathrm{LT}}"'] & \mathrm{End}(F_{\mathrm{LT}}) \arrow[d, "r_{\mathrm{LT}}"] \\
\mathcal{O}_D \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{ad}(\Pi^s)"'] & \mathrm{End}(G) \arrow[d, "\mathrm{ad}(\Pi^s)"] \\
\mathcal{O}_D \arrow[r, equal] & \mathrm{End}(G)
\end{tikzcd}$$

$\kappa' = \mathrm{ad}(d) \circ \kappa$, $d \in \mathcal{O}_D\times$ **の場合.** κ に対する canonical lift を $(F, \gamma, \lambda = \mathrm{id})$ とする. これを d の (r_κ による) 適当な lift $\tilde{d}$ で push-out した formal $\mathcal{O}_L$-module $(F', \mathrm{ad}(\tilde{d}) \circ \gamma)$ を考える. つまり, F の formal $\mathcal{O}_L$-module としての構造を $\tilde{d}$ で移したもの. $\mathrm{ad}(\tilde{d})$ や $\mathrm{ad}(d)$ は Lie を保つ. 特に $r_\kappa = r_{\kappa'}$ となる. これが $\lambda = \mathrm{id}$ と κ に対する canonical lift になっていることは下の図式から従う.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_L \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\kappa"'] & \mathrm{End}_A(F) \arrow[r, "\mathrm{ad}(\tilde{d})"] \arrow[d, "r"] & \mathrm{End}_A(F') \arrow[ddl, "r_{\kappa'} = r_\kappa"] \\
\mathcal{O}_D \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{ad}(d)"'] & \mathrm{End}_k(G) \arrow[d, "\mathrm{ad}(d)"] & \\
\mathcal{O}_D \arrow[r, equal] & \mathrm{End}_k(G) &
\end{tikzcd}$$

□

注 2.10 証明から, いま構成した canonical lift は, L/K に対する Lubin-Tate formal group に A 上の formal $\mathcal{O}_L$-module として同型である. 従って, canonical lift への $\mathrm{Gal}(M^{\mathrm{ab}}/M)$ の action に関しても Lubin-Tate 理論の主定理と同じ主張が成立する.

3 quasi-canonical lift の定義

L/K：二次拡大はずっと fix している．このとき $\sigma_{L/K} \in \mathrm{Gal}(L/K)$ を,

- L/K が分岐するとき, $\sigma_{L/K} := \mathrm{id}$
- L/K が不分岐のとき, $\sigma_{L/K} :=$ ($\mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元)

と定めたのだった．

G：L/K に対する Lubin-Tate formal group の, 前の章で取ったような reduction．これは k 上の height=2 の formal $\mathcal{O}_K$-module．

$\kappa : \mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_D$：$\mathcal{O}_K$-algebra の埋め込み, を fix.

κ に対し, r_κ, A, M も前の章と同様に定める．

F：κ に対する G の canonical lift.

このとき, Lubin-Tate の定理により, $T := T(F) := \varprojlim_n F[\pi_L^n](\bar{M})$, $V := V(F) := T \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ とおくと, $\mathcal{O}_L$-加群としての同型

$$T \cong \mathcal{O}_L$$

が存在する．さらに,

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{M}/M) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_L}(T) \cong \mathcal{O}_L^\times$$

は同型 $\mathcal{O}_L^\times \cong \mathrm{Gal}(M^{\mathrm{ab}}/M)$ を定めるが, これは局所類体論の reciprocity map

$$\rho_{\mathrm{rec}} : \mathcal{O}_L^\times \cong \mathrm{Gal}(M^{\mathrm{ab}}/M)$$

の inverse ($\rho(x) = \rho_{\mathrm{rec}}(x)^{-1}$) なのだった．

$\mathcal{O}_s = \mathcal{O}_K + \pi^s \mathcal{O}_L$ に対し, $\mathcal{O}_s^\times \subseteq \mathcal{O}_L^\times$ は有限指数の開部分群だから, 局所類体論により

$$\mathcal{O}_s^\times \cong \mathrm{Gal}(M^{\mathrm{ab}}/M_s)$$

なる有限次拡大 M_s/M が存在する．

定義 3.1 κ に対する G の level s の **quasi-canonical lift** とは,

- M の有限次拡大の整数環 A' 上への, G の formal $\mathcal{O}_K$-module としての ($r_\kappa : A \to k$ の A' への canonical な延長による) lift F_s
- k 上の formal $\mathcal{O}_K$-module の同型 $\lambda : F_s \otimes_{A', r_\kappa} k \cong G$
- $\mathcal{O}_K$-algebra の同型 $\gamma_s : \mathcal{O}_s \cong \mathrm{End}_{A'}(F_s)$

の三つ組で, 次の図式 (End), (Lie) を可換にするもの．

$$\text{(End)} \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_s & \xrightarrow{\sigma_{L/K}^s} & \mathcal{O}_s & \xrightarrow{\gamma_s} & \mathrm{End}(F_s) \\ {\scriptstyle \mathrm{can.}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle r_\kappa} \\ \mathcal{O}_L & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{O}_D & = & \mathrm{End}(G) \end{array}$$

$$\text{(Lie)} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_s & \xrightarrow{\gamma_s} & \mathrm{End}(F_s) \\ {\scriptstyle \mathrm{can.}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Lie}} \\ \mathcal{O}_L & \xrightarrow{\mathrm{can.}} & A_s \end{array}$$

注 3.2 • (F_s, λ, γ_s) を κ に対する G の level s の quasi-canonical lift, F'_s を F_s と $*$-同型な formal $\mathcal{O}_K$-module とする．このとき, この同型で F_s への $\mathcal{O}_s$-作用を F'_s に移したものを γ'_s とおけば, $(F'_s, \lambda, \gamma'_s)$ も G の level s の quasi-canonical lift になる．

- $M' := \mathrm{Frac}(A')$ が M 上 Galois だとする．κ に対する G の level s の quasi-canonical lift (F_s, λ, γ_s) と $\sigma \in \mathrm{Gal}(M'/M)$ に対し, $(F_s^\sigma, \lambda, \gamma_s^\sigma)$ も κ に対する G の level s の quasi-canonical lift になる (σ は剰余体に trivial に作用するから).
- κ と γ_s, λ は略すこともある．

定理 3.3 $A_s := \mathcal{O}_{M_s}$ とする．このとき,

(i) 任意の κ, λ に対し, *level* s の *quasi-canonical lift* で A_s 上 *defined* なものが存在する．

(ii) $\lambda : G' \cong G$ を *fix* するとき, 集合

$$\{[F', \lambda, \gamma'] \mid \kappa \text{ に対する } G \text{ の level } s \text{ の quasi-canonical lift の } *\text{-同型類}\}$$

は $\mathrm{Gal}(M_s/M)$-等質空間.

(iii) 任意の κ, λ に対する *level* s の G の *quasi-canonical lift* はすべて *formal* $\mathcal{O}_K$*-module* として同型である．しかもこの同型は $\mathcal{O}_s$-作用を保つように取れる．

以下, これを証明することを考える．

4 formal group の Tate 加群

この章では今までの記号は忘れることにする．
A：cdvr, $\mathcal{O}_K$ 上 flat, 剰余体 k, $M := \mathrm{Frac}(A)$
F：A 上の formal $\mathcal{O}_K$-module で, $F \otimes k$ の height$=h < \infty$ なもの
$\Lambda(F) := F(\bar{M})_{\mathrm{tor}} = \cup_n F[\pi^n](\bar{M})$．これは $\mathcal{O}_K[\mathrm{Gal}(\bar{M}/M)]$-加群.
$T(F) := \varprojlim_n F[\pi^n](\bar{M})$
$V(F) := T(F) \otimes_{\mathcal{O}_K} K$
Weierstrass の予備定理より, $\mathcal{O}_K$-加群としては

$$F[\pi^n](\bar{M}) \cong (\mathcal{O}_K/\pi^n)^h,\ \Lambda(F) \cong (K/\mathcal{O}_K)^h,\ T(F) \cong \mathcal{O}_K^h.$$

また, $\mathcal{O}_K[\mathrm{Gal}(\bar{M}/M)]$-加群としては

$$0 \to T(F) \to V(F) \to \Lambda(F) \to 0 \qquad \text{(exact)}.$$

また, isogeny $\alpha : F \to F'$ に対しては,

$$T(\alpha) : T(F) \to T(F'),\ V(\alpha) : V(F) \to V(F')$$

を引き起こす.

補題 4.1 (Serre の公式, J. Lubin: Ann. Math. 85 (1967), 296–302, p.298) $N \subseteq \Lambda(F)$ を有限位数の $\mathcal{O}_K$-部分加群とし,

$$\Gamma' = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{M}/M) \mid \sigma(N) \subseteq N\}$$

とおく. また, $M' = \bar{M}^{\Gamma'}$ とする. このとき,

$$\alpha(X) := \prod_{z \in N} (X -_F z) \in A'[[X]]$$

とおくと, $\alpha : F \to F'$ が A' 上の $\mathcal{O}_K$-*isogeny* となるような A' 上の *formal* $\mathcal{O}_K$*-module* F' が *unique* に存在して, 次を満たす.

(i) $\mathrm{Ker}(\alpha) = N$.

(ii) $\beta : F \to F''$ を *isogeny* で $N \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)$ を満たすもの, とすると, β は α を *unique* に *factor* する.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & F'' \\ F' \arrow[ur, dotted, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

注 4.2 このとき, $n = \mathrm{lg}_{\mathcal{O}_K}(N)$ とすると,

$$\alpha(X) \equiv X^{q^n} \mathrm{mod}\ \pi'$$

である. 一般に, A' 上の formal $\mathcal{O}_K$-module の間の degree q^n の isogeny α で, この合同式を満たすものを **strict isogeny** ということにする.

注 4.3 以下, 単に (定義体を明示せずに) formal $\mathcal{O}_K$-module や isogeny と言ったら, M の有限次拡大の整数環上 defined であるとする.

補題 4.4 $T := T(F)$, $V := V(F)$ とおく.

(i) T' を, T を含む V の $\mathcal{O}_K$*-lattice* とする *(*こういうものを **superlattice** ということにする*)*. このとき, *formal* $\mathcal{O}_K$*-module* F' と *strict isogeny* $\alpha : F \to F'$ で,

$$T' = V(\alpha)^{-1}(T(F'))$$

を満たすものが存在.

さらに, T'' を T' を含む *superlattice*, $\beta : F \to F''$ を $V(\beta)^{-1}(T(F'')) = T''$ を満たす *isogeny*, とするとき, *isogeny* $\gamma : F' \to F''$ で $\beta = \gamma \circ \alpha$ なるものが *unique* に存在する.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & F'' \\ F' \arrow[ur, dotted, "\exists!\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

(ii) $T' \subseteq T$ を $\mathcal{O}_K$*-sublattice* とするとき, *formal* $\mathcal{O}_K$*-module* F' と *strict isogeny* $\alpha : F' \to F$ で,

$$T' = \mathrm{Im}(T(\alpha))$$

を満たすものが存在.

さらに, $T'' \subseteq T'$ を $\mathcal{O}_K$*-sublattice,* $\beta : F'' \to F$ を $\mathrm{Im}(T(\beta)) = T''$ を満たす *isogeny,* とするとき, *isogeny* $\gamma : F'' \to F'$ で $\beta = \alpha \circ \gamma$ なるものが *unique* に存在する.

$$\begin{tikzcd} F'' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, dotted, "\exists!\gamma"'] & F \\ F' \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

証明の概略. (i) $N := T'/T$ とおくと, snake lemma より $N \cong K := \mathrm{Ker}(\Lambda(F) \to V/T')$ を得る.

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & K \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Lambda(F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T' \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & V/T' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & N & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

さっきの補題より, strict isogeny $\alpha : F \to F'$ で $\mathrm{Ker}(\alpha) = K \subseteq \Lambda(F)$ なるものが存在. これが条件と universality を満たすことはすぐ分かる.

(ii) $\pi^n T \subseteq T' \subseteq T$ なる n を取ると, $T \subseteq \pi^{-n}T'$ だから, (i) より strict isogeny $\beta : F \to F'$ で $V(\beta)^{-1}(T(F')) = \pi^{-n}T'$ を満たすものが存在. このとき $\mathrm{Ker}(\beta) \cong \pi^{-n}T'/T$ だからこれは π^n で消える. 従って, 補題から次のような isogeny α が unique に存在.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\pi^n"] \arrow[d, "\beta"'] & F \\ F' \arrow[ur, dotted, "\exists!\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

このとき, $V(\alpha) \circ V(\beta) = \pi^n$ なので,

$$\mathrm{Im}(T(\alpha)) = \pi^{-n}V(\beta)^{-1}(T(F')) = T'.$$

この α は universality を満たすが, strict isogeny ではないので, F' を同型で取り換えることを考える. $F \otimes k$ が height h の formal $\mathcal{O}_K$-module だったから,

$$[\pi^n]_{F\otimes k}(X) = \bar{\delta}(X^{q^{hn}}),\ \bar{\delta}'(0) \neq 0$$

と書ける. 従って, $\bar{\alpha} = \alpha \bmod \pi'$ も,

$$\bar{\alpha}(X) = \bar{\alpha}_0(X^{q^m}),\ \bar{\alpha}_0'(0) \neq 0$$

の形. そこで, $\alpha_0^{-1}(X)$ の $A'[[X]]$ への適当な lift $\tilde{\alpha}_0^{-1}$ で F' の formal $\mathcal{O}_K$-module の構造を移したものを F'_0 と書くと, 合成

$$F'_0 \underset{\sim}{\xrightarrow{\tilde{\alpha}_0^{-1}}} F' \xrightarrow{\alpha} F$$

は strict isogeny で, $T(F'_0)$ の像が T' と一致する. これが universality を満たすことも α の universality から従う.

□

$\mathrm{End}^0(F) := \mathrm{End}(F) \otimes_{\mathcal{O}_K} K \subseteq \mathrm{End}_K(V)$, とおく.

補題 4.5 *(i)* T', T'' を V における T の *superlattice,* $\alpha : F \to F'$, $\beta : F \to F''$ を, 補題 *4.4* *(i)* によりこれらに対応する *isogeny* とする. このとき, 自然な射

$$\mathrm{Hom}(F', F'') \to \{\tilde{\psi} \in \mathrm{End}^0(F) \mid \tilde{\psi}(T') \subseteq T''\}$$
$$\psi \mapsto (\tilde{\psi} : V \underset{V(\alpha)}{\longrightarrow} V(F') \underset{V(\psi)}{\longrightarrow} V(F'') \underset{V(\beta)^{-1}}{\longrightarrow} V)$$

は同型.

(ii) T', T'' を V における T の *sublattice,* $\alpha : F' \to F$, $\beta : F'' \to F$ を, 補題 *4.4* *(ii)* によりこれらに対応する *isogeny* とする. このとき, 自然な射

$$\mathrm{Hom}(F', F'') \to \{\tilde{\psi} \in \mathrm{End}^0(F) \mid \tilde{\psi}(T') \subseteq T''\}$$
$$\psi \mapsto (\tilde{\psi} : V \underset{V(\alpha)^{-1}}{\longrightarrow} V(F') \underset{V(\psi)}{\longrightarrow} V(F'') \underset{V(\beta)}{\longrightarrow} V)$$

は同型.

証明の概略. (i) の逆対応だけ作る. 右辺の元 $\tilde{\psi}$ は定義から

$$\tilde{\psi} = \pi^{-n}\phi, \ \phi \in \mathrm{End}(F)$$

と書ける. isogeny

$$F \xrightarrow{[\pi^n]} F \xrightarrow{\alpha} F'$$
$$F \xrightarrow{\phi} F \xrightarrow{\beta} F''$$

はそれぞれ補題 4.4 (i) で T の superlattice $\pi^n T'$, $V(\phi)^{-1}(T'')$ に対応する. $\tilde{\psi}(T') \subseteq T''$ だったから, $\pi^n T' \subseteq V(\phi)^{-1}(T'')$ である. 従って補題 4.4 (ii) により,

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\alpha\circ[\pi^n]"] \arrow[d, "\beta\circ\phi"'] & F' \arrow[dl, dotted, "\exists!\psi"] \\ F'' & \end{tikzcd}$$

と unique に factor する. この対応 $\tilde{\psi} \mapsto \psi$ は n の取り方によらず, これが逆対応を定める.

□

注 4.6 つまり, (i) によって $\tilde{\psi}$ に対応する $\mathrm{Hom}(F', F'')$ の元は, $\pi^n\tilde{\psi} = \phi \in \mathrm{End}(F)$ なる n を適当に取るとき,

$$\psi \circ \alpha \circ [\pi^n] = \beta \circ \phi \text{ を満たす unique な } \psi.$$

同様に, (ii) によって $\tilde{\psi}$ に対応する $\mathrm{Hom}(F', F'')$ の元は,

$$[\pi^n] \circ \beta \circ \psi = \phi \circ \alpha \text{ を満たす unique な } \psi.$$

5 minimal lattice と minimal isogeny

この章以降, また記号をもとのものに戻す. つまり, 二次拡大 L/K と K-algebra の埋め込み $\kappa : L \to D$ とを fix し, $r_\kappa : \mathcal{O}_L \to k$ を $r_\kappa = \mathrm{Lie} \circ \kappa$ で定める. A を r_κ に対する $\mathcal{O}_L$ の strict Hensel 化, $M = \mathrm{Frac}(A)$ とする.

F を, κ に対する A 上の G の canonical lift, $T := T(F)$, $V := V(F)$, とおく. また, A' で M の有限次拡大の整数環を表す. r_κ は canonical な延長 $A' \to k$ を有するから, これも r_κ で表す.

補題 5.1 *一般に, T を rank 1 の自由 $\mathcal{O}_L$-加群, $V := T \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ とする. さらに, T' を V の中の $\mathcal{O}_K$-superlattice とする.*

このとき, T の generator t と $n, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して,

$$\pi_L^n T' = (\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L) \cdot t$$

と書ける. さらにこのとき,

$$\{x \in L \mid xT' \subseteq T'\} = \mathcal{O}_s$$

が成立.

証明の概略.

$$n := \max\{n' \mid \pi_L^{n'} T' \supseteq T\},\ s := \{s' \mid \pi^{s'}(\pi_L^n T') \subseteq T\}$$

とおくと, $\pi_L^n T'/T$ は $\pi^{-s}t$ が生成する cyclic $\mathcal{O}_K$-module であることがわかる. 従って $\pi_L^n T' = (\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L) \cdot t$ と書ける. 最後の主張はすぐわかる.

□

定義 5.2
- T の V の中の $\mathcal{O}_K$-superlattice T' で, T の適当な generator t に対して $T' = (\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L) \cdot t$ と書けるものを T の level s の **minimal superlattice** という.
- A' 上の formal $\mathcal{O}_K$-module の isogeny $\alpha : F \to F'$ が level s の **minimal isogeny** であるとは, 対応する superlattice $V(\alpha)^{-1}(T(F'))$ が T の level s の minimal superlattice であること.
- minimal かつ strict な isogeny を **strict minimal isogeny** と呼ぶことにする. つまり, A' 上の minimal isogeny $\alpha : F \to F'$ で, $r_\kappa : A' \to k$ に対し,

  $$(\alpha \otimes_{A', r_\kappa} k)(X) = X^{q^s} \in k[[X]]$$

  を満たすものを strict minimal isogeny という.

- isogeny $F \to F'$ が level s の minimal isogeny なら, $\mathcal{O}_K$-同型 $F' \cong F''$ との合成 $F \to F' \cong F''$ も level s の minimal isogeny. これによる minimal isogeny の同型類を考える.

$$X_s := \{\text{level } s \text{ の minimal isogeny の同型類}\}.$$

注 5.3 T の level s の minimal superlattice は, T の generator t の取り方の分だけ不定性がある. つまり, T の level s の minimal superlattice 全体の集合は $\mathcal{O}_L^\times/\mathcal{O}_s^\times$-等質空間.

補題 5.4 *$\alpha : F \to F'$ を level s の minimal isogeny とすると, α と同型な strict minimal isogeny が $*$-同型を除いて unique に存在.*

証明. 存在は, 補題 4.4 の証明と同様に適当な lift でずらせばできる. 一意性を示す. α と同型な A' 上の strict minimal isogeny を $\alpha_1 : F \to F_1'$, $\alpha_2 : F \to F_2'$ とする. 仮定より下の図式を可換にする $\mathcal{O}_K$-同型 $\tau : F_1' \cong F_2'$ が存在.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & F_1' \arrow[d, "\tau"] \\ & F_2' \end{tikzcd}$$

この図式の $r_\kappa : A' \to k$ による reduction を考えると, 定義から τ の reduction $\bar{\tau}$ は $\bar{\tau}(X^{q^s}) = X^{q^s}$ を満たす. 従って $\bar{\tau}(X) = X$ であり, τ は $*$-同型.

□

集合 X_s には $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{M}/M)$ と $a \in \mathcal{O}_L^\times$ が次のように作用している.

$$\sigma.(F \xrightarrow{\alpha} F') := (F = F^\sigma \xrightarrow{\alpha^\sigma} (F')^\sigma)$$
$$a.(F \xrightarrow{\alpha} F') := (F \xrightarrow{a} F \xrightarrow{\alpha} F')$$

命題 5.5 *Lubin-Tate 理論が定める射 $\rho : \mathrm{Gal}(\bar{M}/M) \to \mathcal{O}_L^\times$ を考える.*

(i) minimal isogeny $\alpha : F \to F'$ と $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{M}/M)$ に対し, 次の図式を可換にする $\mathcal{O}_K$-同型 $\gamma_\sigma : (F')^\sigma \to F'$ が unique に存在.

$$\begin{tikzcd} F = F^\sigma \arrow[r, "\alpha^\sigma"] \arrow[d, "{[\rho(\sigma)^{-1}]_F}"'] & (F')^\sigma \arrow[d, "\exists! \gamma_\sigma"] \\ F \arrow[r, "\alpha"'] & F' \end{tikzcd}$$

(ii) X_s は $\mathrm{Gal}(M_s/M) \cong \mathcal{O}_L^\times/\mathcal{O}_s^\times$-等質空間.

証明. α に対応する T の superlattice を $T' = (\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L) \cdot t \subseteq V = V(F)$, とおく. このとき

$$(F \xrightarrow{[a]_F} F \xrightarrow{\alpha} F' \text{ に対応する superlattice}) = a^{-1}T'.$$

別の level s の minimal isogeny を $\alpha_1 : F \to F_1'$ とし, 対応する minimal superlattice を $T_1' = (\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L) \cdot t_1$ と書く. $a^{-1}t = t_1$ となる $a \in \mathcal{O}_L^\times$ を取ると $a^{-1}T' = T_1'$ なので, 補題 4.4 (*i*) に

より, 次の図式を可換にする $\mathcal{O}_K$-同型 τ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\alpha} & F' \\ {\scriptstyle [a]_F}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exists ! \tau} \\ F & \xrightarrow[\alpha_1]{} & F'_1 \end{array}$$

つまり, X_s への $\mathcal{O}_L^\times$-作用は transitive. この作用の stabilizer は, $\mathcal{O}_L^\times$ の中で $\pi^{-s}+\mathcal{O}_L$ を stable にする元だから, $\mathcal{O}_s^\times$ と一致. 従って, X_s は $\mathcal{O}_L^\times/\mathcal{O}_s^\times$ の等質空間. ゆえ (i) を示せば, X_s が $\mathrm{Gal}(M_s/M)$ の等質空間であることもわかる.

$\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{M}/M)$ に対し,

$$(F = F^\sigma \xrightarrow{\alpha^\sigma} (F')^\sigma \text{ に対応する superlattice}) = \sigma T'.$$

一方 ρ の定義より, $\sigma T' = [\rho(\sigma)]_F(T')$ だが, これは

$$F \xrightarrow{[\rho(\sigma)^{-1}]_F} F \xrightarrow{\alpha} F' \text{ に対応する superlattice.}$$

従って, 補題 4.4 (i) から γ_σ の存在と一意性がわかる.

□

6 quasi-canonical lift の存在

定理 6.1 任意の κ, λ に対し, A_s 上 *defined* な *level* s の *quasi-canonical lift* が存在.

証明. canonical lift のときと同様に, $\kappa = \kappa_{\mathrm{LT}}$, $\lambda = \mathrm{id}$ のときに帰着される.

$(F, \gamma_{\mathrm{LT}} : \mathcal{O}_L \cong \mathrm{End}_A(F))$ を $\kappa = \kappa_{\mathrm{LT}}$, $\lambda = \mathrm{id}$ に対する canonical lift とし, $T := T(F)$ の level s の minimal superlattice $T' = (\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L)\cdot t$ と, 対応する level s の strict minimal isogeny $\alpha : F \to F'$ をひとつ取る. 補題 4.4 (i) の証明から, α は $(\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L)\cdot t/T$ に対応する F の有限部分群で F を割って作るが, この部分群は $\mathcal{O}_s^\times \cong \mathrm{Gal}(M^{\mathrm{ab}}/M_s)$ で安定なので, $\alpha : F \to F'$ は $A_s = \mathcal{O}_{M_s}$ 上 defined.

いま $\lambda = \mathrm{id}$ なので, $F \otimes_{A, r_\kappa} k = G$ であり, α の reduction は

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} : G &\to F' \otimes_{A_s, r_\kappa} k \\ X^{q^s} &\leftarrow\!\shortmid X \end{aligned}$$

の形. ところが G は定義から $\mathbb{F}_q$ 上 defined なので $(X \mapsto X^{q^s}) \in \mathrm{End}_k(G)$ である. 従って $F' \otimes_{A_s, r_\kappa} k = G$ でなければならない.

あとは, $(F', \lambda = \mathrm{id})$ が κ_{LT} に対する quasi-canonical lift になるように $\mathcal{O}_s$-作用を定められればよい. 補題 4.5 (i) から,

$$\mathrm{End}(F') \cong \{\tilde{\psi} \in \mathrm{End}^0(F) \overset{\gamma_{\mathrm{LT}}}{\cong} L \mid \tilde{\psi}(T') \subseteq T'\} \overset{\gamma_{\mathrm{LT}}}{\cong} \mathcal{O}_s$$

だから, $\mathcal{O}_K$-algebra の同型 $\gamma' : \mathcal{O}_s \cong \mathrm{End}_{A_s}(F')$ を得る (上の式の左辺の $\mathrm{End}(F')$ の元がみな A_s 上 defined なことは注 4.6 を使って Lie を調べれば分かる). また, 注 4.6 により, $x \in \mathcal{O}_s$ に対する $\gamma'(x)$ は

$$\gamma'(x) \circ \alpha = \alpha \circ \gamma_{\mathrm{LT}}(x) \text{ を満たす unique な元} \in \mathrm{End}(F').$$

$\mathrm{Frac}(A_s)$ が標数 0 なので, $\mathrm{Lie}(\alpha)$, $\mathrm{Lie}(\gamma'(x))$ は 0 ではない. このことから, 両辺の Lie を取って,

$$\mathrm{Lie}(\gamma'(x)) = \mathrm{Lie}(\gamma_{\mathrm{LT}}(x)) = x$$

が分かる. さらに, $\gamma'(x)$ を r_{LT} で reduction すると, $\bar{\alpha} = \Pi^s$ だったので (但し $\Pi(X) := X^q \in \mathrm{End}_k(G)$),

$$\bar{\gamma}'(x) \circ \Pi^s = \Pi^s \circ \bar{\gamma}_{\mathrm{LT}}(x)$$

となる.

L/K **が分岐するとき.** この場合, F の定義より $\bar{\gamma}_{\mathrm{LT}}(x)$ は $\mathbb{F}_q$ 上 defined であり, したがって Π と可換. 結局上の式は

$$\bar{\gamma}'(x) \circ \Pi^s = \bar{\gamma}_{\mathrm{LT}}(x) \circ \Pi^s$$

となり, $\bar{\gamma}'(x) = \bar{\gamma}_{\mathrm{LT}}(x)$ を得る. つまり下の図式は可換. これは (End) の成立を意味するから, (F', γ') が κ_{LT} に対する quasi-canonical lift.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_s \arrow[rr, "\gamma'"] \arrow[d, "\mathrm{can.}"'] & & \mathrm{End}_{A_s}(F') \arrow[dd, "r_{\mathrm{LT}}"] \\
\mathcal{O}_L \arrow[r, "\gamma_{\mathrm{LT}}"] \arrow[d, "\kappa_{\mathrm{LT}}"'] & \mathrm{End}_A(F) \arrow[d, "r_{\mathrm{LT}}"] & \\
\mathcal{O}_D \arrow[r, equal] & \mathrm{End}_k(G) \arrow[r, equal] & \mathrm{End}_k(G)
\end{tikzcd}$$

L/K **が不分岐なとき.** さっきの式から

$$\bar{\gamma}'(x) = \Pi^s \circ \bar{\gamma}_{\mathrm{LT}}(x) \circ \Pi^{-s}$$

だが, $\mathrm{ad}(\Pi)$ は q-乗 Frobenius で係数を一度捻ることに相当するので,

$$\bar{\gamma}'(x)(X) = \bar{\gamma}_{\mathrm{LT}}(x)^{\sigma_q^s}(X),$$

但し σ_q は k における q-乗 Frobenius. 一方, $\pi X + X^{q^2}$ は $\mathcal{O}_K$ 上 defined だから, [岩澤, 第 7 章, 補題 3] から, $\sigma_{L/K}$ を $\mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元とすると,

$$\gamma_{\mathrm{LT}}(x)(X)^{\sigma_{L/K}} = \gamma_{\mathrm{LT}}(\sigma_{L/K}(x))(X).$$

このことから,

$$\bar{\gamma}'(x) = \bar{\gamma}_{\mathrm{LT}}(\sigma_{L/K}^s(x))$$

を得る. 従って, (F', γ') が (End), (Lie) を満たす.

□

7 canonical lift と quasi-canonical lift の関係

命題 7.1 $(F', \lambda, \gamma_s)_{/A'}$ *を,* κ *に対する* G *の level* s *の quasi-canonical lift とする. このとき,* κ *に対する canonical lift* (F, λ) *からの degree* q^s *の* $\mathcal{O}_K$*-isogeny* $\alpha : F \to F'$ *で,* $\mathcal{O}_s$*-linear でもあるものが存在する.* α *は* $\mathrm{Aut}(F) = \mathcal{O}_L^\times$ *の元との合成を除いて unique に決まる. さらに,* α *は*

$$\alpha \equiv \nu^{-1} \circ F_q^s \circ \nu \ \mathit{mod}\ \pi' \ \text{(但し } F_q(X) = X^q,\ \pi' \text{ は } A' \text{ の素元)}$$

を満たすように取れる．ここで ν は κ と λ にしかよらない同型 $\nu : G' \cong G$．具体的には，$\kappa = \mathrm{ad}(d\Pi^n) \circ \kappa_{\mathrm{LT}}$ (但し $d \in \mathcal{O}_D^\times$) とするとき，$\nu = d^{-1} \circ \lambda$.

証明. まず，$\lambda = \mathrm{id}$ の場合に帰着する．F' が $\lambda : G' \cong G$ に対する level s の quasi-canonical lift だとする．$\lambda(X) \in k[[X]]$ を $r_\kappa : A \to k$ で $A[[X]]$ に lift したものを $\tilde{\lambda}$ とし，これで F' の群構造を移したものを $\tilde{F}'$ と書く．$(\tilde{F}', \mathrm{ad}(\tilde{\lambda}) \circ \gamma_s, \mathrm{id})$ は κ に対する quasi-canonical lift だった．$\lambda = \mathrm{id}$ の場合から，κ, $\lambda = \mathrm{id}$ に対する canonical lift F_0 からの isogeny $\alpha_0 : F_0 \to \tilde{F}'$ が存在する．F_0 の群構造を $\tilde{\lambda}$ で移したもの $\tilde{F}$ は κ, λ に対する canonical lift．この同型射を $\tilde{\lambda}' : \tilde{F} \to F_0$ で表すと，$\tilde{\alpha} := \tilde{\lambda}^{-1} \circ \alpha_0 \circ \tilde{\lambda}'$ を formal $\mathcal{O}_L$-module の $*$-同型 $F \cong \tilde{F}$ で移したものが条件を満たす．一意性も $\lambda = \mathrm{id}$ の場合から従う．

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ddd] & \tilde{F} \arrow[rr, "\tilde{\lambda}'"] \arrow[dl, "\tilde{\alpha}"'] \arrow[dd] & & F_0 \arrow[dl, "\alpha_0"'] \arrow[dd] \\
F' \arrow[rr, "\tilde{\lambda}"'] \arrow[dd] & & \tilde{F}' \arrow[dd] & \\
& G' \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dl] & & G \arrow[dl, "\nu^{-1}\circ F_q \circ \nu"] \\
G' \arrow[rr, "\lambda"] & & G &
\end{tikzcd}
$$

次に $\kappa = \kappa_{\mathrm{LT}}$ に帰着する．$\kappa = \mathrm{ad}(d\Pi^n) \circ \kappa_{\mathrm{LT}}$ とし，$(\kappa_{\mathrm{LT}}, \lambda = \mathrm{id})$ に対する canonical lift, quasi-canonical lift を (F, γ), (F_s, γ_s) とおく．構成より，$(\kappa, \lambda = \mathrm{id})$ に対する canonical lift, quasi-canonical lift はそれぞれ $(\tilde{F}, \mathrm{ad}(\tilde{d}) \circ \gamma)$, $(\tilde{F}_s, \mathrm{ad}(\tilde{d}' \circ \gamma_s)$ である．但し $\tilde{d}$, $\tilde{d}'$ は d の $r_{\mathrm{ad}(\Pi^n)\circ\kappa_{\mathrm{LT}}}$ による適当な lift, $\tilde{F}$, $\tilde{F}_s$ はこれらで F, F_s の群構造を移したもの．$\alpha : F \to F_s$ を $(\kappa_{\mathrm{LT}}, \lambda = \mathrm{id})$ に対し条件を満たす strict isogeny とすると，$\tilde{d}' \circ \alpha \circ \tilde{d}^{-1}$ は $(\kappa, \lambda = \mathrm{id})$ に対し条件を満たす．

そこで以下 $\kappa = \kappa_{\mathrm{LT}}$, $\lambda = \mathrm{id}$ とする．$T' := T(F')$, $V' := V(F')$ とおく．$\gamma_s : \mathcal{O}_s \cong \mathrm{End}_{A'}(F')$ から V' は 1-次元 L-ベクトル空間の構造を持ち，補題 4.5 から

$$\mathrm{End}(F') \cong \{x \in \mathrm{End}^0(F') \cong L \mid xT' \subseteq T'\}$$

なので，同型 $\mathcal{O}_s \cong \{x \in L \mid xT' \subseteq T'\}$ を得る．

$T'' \subseteq T'$ を，T' を含む V' の $\mathcal{O}_L$-lattice で最大のものとする．補題 5.1 より，適当な generator $t \in T''$ を取ると，$T' = (\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L) \cdot t$, と書ける．

補題 4.4 (ii) で，sublattice $T'' \subseteq T'$ に対応する strict isogeny

$$\alpha'' : F'' \to F'$$

を取る．α'' の reduction は $X \mapsto X^{q^s}$ に一致するが，$F' \otimes_{A', r_\kappa} k = G$ であり，この射は $\mathrm{End}_k(G)$ の元なので，$F'' \otimes_{A', r_\kappa} k = G$ と分かる．さらに，補題 4.5 (ii) から，

$$\mathrm{End}(F'') \cong \{x \in \mathrm{End}^0(F') \cong L \mid xT'' \subseteq T''\} \cong \mathcal{O}_L.$$

これによる $a \in \mathcal{O}_L$ の F'' への作用は，$\pi^s a \in \mathcal{O}_s$ なので，

$$[\pi^s]_{F'} \circ \alpha'' \circ \phi_a = [\pi^s a]_{F'} \circ \alpha'' \text{ を満たす unique な } \phi_a \in \mathrm{End}(F'')$$

によって作用．このことから，(Lie : $\mathrm{Hom}(F', F'') \to A'$ は単射なので) $\mathrm{Lie}(\phi_a) = \mathrm{Lie}([a]_{F'})$ を得る．F' が条件 (Lie) を満たすことから，これが $a \in A_s$ と一致することが分かる．従って F'' は formal $\mathcal{O}_L$-module になる．

さらに, 上の式を r_κ で reduction すると,

$$\bar{\gamma}_s(\pi^s)\circ\Pi^s\circ\bar{\phi}_a=\bar{\gamma}_s(\pi^s a)\circ\Pi^s$$

を得る. ここで, $(\kappa_{\mathrm{LT}},\lambda=\mathrm{id})$ の場合の quasi-canonical lift の構成より, $x\in\mathcal{O}_s$ に対し $\bar{\gamma}_s(x)\circ\Pi=\Pi\circ\bar{\gamma}_s(\sigma_{L/K}(x))$ が成り立つので,

$$\bar{\gamma}_s(\sigma^s_{L/K}(\pi^s))\bar{\phi}_a=\bar{\gamma}_s(\sigma^s_{L/K}(\pi^s a)).$$

ここから $\bar{\phi}_a=\bar{\gamma}_s(\sigma^s_{L/K}(a))$ が分かる. つまり

$$(F''\text{の } a \text{ 倍写像の } r_\kappa \text{ による reduction})=\bar{\phi}_a=\bar{\gamma}_s(\sigma^s_{L/K}(a))=\kappa(a).$$

但し最後の等式は F' が条件 (End) を満たすことから得られる. これは F'' が κ に対する canonical lift であることを意味する. 従って formal $\mathcal{O}_L$-module としての $*$-同型 $\tau'':F\cong F''$ が存在する. この $*$-同型 τ と α'' を合成したものを α とおく.

$$\alpha:F\xrightarrow[\sim]{\tau}F''\xrightarrow{\alpha''}F'$$

定義から, これは $\mathcal{O}_K$-linear な degree q^s の strict isogeny で, $\mathcal{O}_s$-作用と compatible になっている. α に対応する $T=T(F)$ の superlattice $V(\tau)^{-1}(V(\alpha)^{-1}(T'))$ を考えると, 定義から

$$V(\alpha)^{-1}(T')/T(F'')\xrightarrow[\sim]{V(\alpha)}T'/T''$$

だから, 左辺の商も cyclic であり, 従ってこの superlattice は minimal であると分かる.

このようなものが α_1, α_2 と二つあるとすると, どちらも minimal isogeny なので命題 5.5 から, 図式

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\alpha_1} & F' \\ {\scriptstyle [a]_F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exists y} \\ F & \xrightarrow{\alpha_2} & F' \end{array}$$

を可換にする $a\in\mathcal{O}_L^\times$ と $y\in\mathrm{Aut}(F')=\mathcal{O}_s^\times$ が存在. α_i は $\mathcal{O}_s$-linear だったから, ここから $\alpha_2\circ[ay^{-1}]_F=\alpha_1$ を得る.

□

8 quasi-canonical lift の $*$-同型類と $\mathcal{O}_K$-同型類

定理 8.1 $\lambda:G'\cong G$ を *fix* するとき, 集合

$$\{[F',\lambda,\gamma']\mid \kappa \text{ に対する } G \text{ の } \textit{level } s \text{ の } \textit{quasi-canonical lift} \text{ の } *\text{-同型類}\}$$

は $\mathrm{Gal}(M_s/M)$-等質空間.

証明. transitivity を示す. (F_1,λ), (F_2,λ) を κ に対する level s の quasi-canonical lift とする. 命題 7.1 により, κ, λ に対する canonical lift からの minimal isogeny $\alpha_i:F\to F_i$ で, $\mathcal{O}_s$-linear で

あり, reduction が等しい (この等しい reduction を $\bar{\alpha}$ とおく) ものが存在. このとき, 命題 5.5 (ii) により, 次の図式を可換にする $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{M}/M)$ と $\mathcal{O}_K$-同型 $\delta : F_2 \cong F_1^\sigma$ が存在.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, equal] & F_2 \arrow[d, "\delta"] \\ F^\sigma \arrow[r, "\alpha_1^\sigma"] & F_1^\sigma \end{tikzcd}$$

これを r_κ で reduction すると, $\bar{\delta} \circ \bar{\alpha} = \bar{\alpha}$ を得るから, $\bar{\delta} = \mathrm{id}$, つまり δ は $*$-同型. δ が $\mathcal{O}_s$-同型であることを確かめる. $X \mapsto \alpha_2(X)$ は単射だから, α_2 を合成して, $x \in \mathcal{O}_s$ に対し

$$\delta \circ [x]_{F_2} \circ \alpha_2 = [x]_{F_1^\sigma} \circ \delta \circ \alpha_2$$

を示せば良い. これは次のようにして分かる.

$$\delta \circ [x]_{F_2} \circ \alpha_2 = \delta \circ \alpha_2 \circ [x]_F = \alpha_1^\sigma \circ [x]_F = [x]_{F_1^\sigma} \circ \alpha_1^\sigma = [x]_{F_1^\sigma} \circ \delta \circ \alpha_2.$$

freeness を示す. (F', λ) を κ に対する level s の quasi-canonical lift とする. $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{M}/M)$ に対し, $\mathcal{O}_s$-linear な $*$-同型 $\delta : F' \cong (F')^\sigma$ が存在したとする. 命題 7.1 のような minimal isogeny $\alpha : F \to F'$ を取ると,

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & F' \arrow[r, "\delta"] & (F')^\sigma \arrow[d, equal] \\ F \arrow[r, equal] & F^\sigma \arrow[r, "\alpha^\sigma"] & (F')^\sigma \end{tikzcd}$$

は reduction が可換だから, rigidity よりもともと可換. したがって minimal isogeny α と α^σ は同型なので, 命題 5.5 (ii) より, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{M}/M_s)$ が従う.

□

定理 8.2 任意の κ, λ に対する *level* s の G の *quasi-canonical lift* はすべて *formal* $\mathcal{O}_K$*-module* として同型. さらにこの同型は $\mathcal{O}_s$-作用を保つものを取れる.

証明. 構成から, 異なる (κ, λ), (κ', λ') に対する quasi-canonical lift F_s, F_s' で $\mathcal{O}_s$-同型なものが存在する. 従って, 同じ (κ, λ) に対する quasi-canonical lift 同士が主張のような同型で結ばれればよい. (F_i, γ_i) をそのようなもの二つとする. F を (κ, λ) に対する canonical lift とし, $\alpha_i : F \to F_i$ を命題 7.1 による minimal isogeny とする. 命題 5.5 (ii) により, $a \in \mathcal{O}_L^\times$ と $\mathcal{O}_K$-同型 $\delta : F_1 \cong F_2$ が存在して次を可換にする.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "{[a]_F}"'] & F_1 \arrow[d, "\delta", "\wr"'] \\ F \arrow[r, "\alpha_2"'] & F_2 \end{tikzcd}$$

さっきと同様に, δ が $\mathcal{O}_s$-同型なことが分かる.

□

9 universal deformation と quasi-canonical lift

G の formal $\mathcal{O}_K$-module としての universal deformation ring $R \cong W[[t]]$ を考える.

$\psi \in \mathrm{End}_k(G)$ で, 次の条件を満たすものを考える.

$$\psi \notin \mathcal{O}_K \subseteq \mathrm{End}_k(G),\ \psi^2 = b \in \mathcal{O}_K \subseteq \mathrm{End}_k(G).$$

このような ψ に対し, $\psi : G \to G$ の lifting locus を $(g(t)) \subseteq R$ とする. $g(t)$ の各既約因子 $h(t)$ に対し, $R' = W[[t]]/(h(t))$ は W 上有限な整域. $N := \mathrm{Frac}(R')$ とすると, $\mathcal{O}_N$ には canonical な reduction map $r : \mathcal{O}_N \to k$ が定まっている. 射

$$W[[t]] \twoheadrightarrow R' \hookrightarrow \mathcal{O}_N$$

によって, $\mathcal{O}_N$ 上の formal $\mathcal{O}_K$-module F' で, $F' \otimes_{\mathcal{O}_N, r} k = G$ を満たすものが定まる.

$L := K(\sqrt{b})$ とし, $\kappa_\psi : L \to D$ を,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_K[\sqrt{b}] &\hookrightarrow \mathrm{End}(F') \overset{r}{\hookrightarrow} \mathrm{End}_k(G) = \mathcal{O}_D \\ \sqrt{b} &\mapsto \psi \end{aligned}$$

が引き起こす射とする. この射により, $\mathrm{End}(F')$ は $\mathcal{O}_L$ の $\mathcal{O}_K$ を含むある order $\mathcal{O}_s$ と同型になる. この同型を $\gamma_\psi : \mathcal{O}_s \to \mathrm{End}(F')$ と書く.

ここで, 命題 7.1 の証明と同様に, 同型 γ_ψ の存在だけから, strict minimal isogeny $\alpha'' : F'' \to F'$ と, 同型 $\gamma'' : \mathcal{O}_L \cong \mathrm{End}(F'')$ の存在が分かる. そこで

$$i'' : \mathcal{O}_L \overset{\gamma''}{\to} \mathrm{End}(F'') \overset{\mathrm{Lie}}{\to} \mathcal{O}_{\bar{M}}$$

で K 上の埋め込み $i'' : L \to \bar{M}$ を定め, この像の最大不分岐拡大の整数環を A とおく. いま $F' \otimes_{\mathcal{O}_N, r} k = G$ だから, α'' が strict なことから $F'' \otimes_{\mathcal{O}_N, r} k = G$ が分かる. そこで, $\kappa'' : L \to D$ を

$$\mathcal{O}_L \overset{\gamma''}{\cong} \mathrm{End}(F'') \overset{r}{\to} \mathrm{End}_k(G) = \mathcal{O}_D$$

で定める. このとき, 定義から次の図式が可換.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_L \arrow[r, "\gamma''"] \arrow[dr, "\kappa''"'] & \mathrm{End}(F'') \arrow[r, "\mathrm{Lie}"] \arrow[d, "r"] & A \arrow[d, "r"] \\ & \mathrm{End}_k(G) \arrow[r, "\mathrm{Lie}"'] & k \end{tikzcd}$$

従ってこの図式は $r : A \to k$ を $r_{\kappa''}$ の strict completion にする. ゆえに, (F'', γ'') は $(\kappa'', \lambda = \mathrm{id})$ に対する canonical lift である. F'' を $*$-同型類と取り換えて, F'' は A 上 defined としてもよい. 従ってこのとき, F' を $*$-同型類と取り換えれば, F' は A_s 上 defined となる. とくに, $W[[u]] \to \mathcal{O}_N$ は A_s を factor する.

いま, さらに F' を quasi-canonical lift にするような κ' の存在が言えたとする. すると, F' の formal modulus は A_s の素元でなければならないから, $W[[t]] \to \mathcal{O}_N$ は A_s を全射で factor していることがわかる. 従って, ψ の lifting locus の既約成分は $\mathrm{Spec}(A_s)$ と同型であり, universal deformation はこの上に (ある κ に対する) level s の quasi-canonical lift を定めていることがわかる (ここで, ψ の lifting locus は F' の formal $\mathcal{O}_K$-module としての構造のみにより, κ や quasi-canonical lift としての構造にはよらないことに注意しておく).

あとは次の定理を示せば良い.

定理 9.1 (F,γ) を $(\kappa, \lambda = \mathrm{id})$ に対する *canonical lift,* $\alpha : F \to F'$ を *level* s の *strict minimal isogeny* とする．このとき，適当に κ' を選べば，F' には $(\kappa', \lambda = \mathrm{id})$ に対する *level* s の *quasi-canonical lift* の構造が入る．

証明. $\kappa = \kappa_{\mathrm{LT}}$ のときは, 定理 6.1 の証明で示した ($\kappa' = \kappa = \kappa_{\mathrm{LT}}$ と取れば良かった). この場合に帰着する.

$\kappa = \mathrm{ad}(d\Pi^n) \circ \kappa_{\mathrm{LT}}$ とおく ($d \in \mathcal{O}_D^\times$). $\alpha : F \to F'$ を考える. F の reduction は G と一致するから, α が strict であることより, F' の reduction も G と一致する. とくに α の reduction は $\Pi^s \in \mathrm{End}_k(G)$ と一致する.

$r' := r_{\mathrm{ad}(\Pi^n)\circ\kappa_{\mathrm{LT}}}$ による d, $\mathrm{ad}(\Pi^s)(d) \in \mathcal{O}_D^\times$ の適当な lift で, F, F' の群構造を移したものをそれぞれ F_{LT}, F'_{LT} と書く. 構成より, F_{LT} は κ_{LT} に対する canonical lift であり, また定義から, strict minimal isogeny $\alpha_{\mathrm{LT}} : F_{\mathrm{LT}} \to F'_{\mathrm{LT}}$ が存在. 従って, F'_{LT} には κ_{LT} に対する level s の quasi-canonical lift の構造が入る. F' は F'_{LT} の $\mathrm{ad}(\Pi^s)(d)$ による push-out だから, $\kappa' = \mathrm{ad}(\mathrm{ad}(\Pi^s)(d)\Pi^n) \circ \kappa_{\mathrm{LT}}$ とおけば良い.

□

10 Appendix: quasi-canonical lift のもともとの定義

ARGOS セミナーの本の第 8 章では, quasi-canonical lift を上で述べて来たような intrinsic な形で定義しているが, そうしない方がわかりやすい上に, 本の続きを読むだけならこの定義を採用しないほうがよいので, ところどころ繰り返しにはなるが本来の定義に沿った記述もメモとして残しておく.

以下, G を k 上の height 2 の formal $\mathcal{O}_K$-module で, Lubin-Tate の reduction として得られるもの (とくに $\mathbb{F}_q$ 上 defined), とし, K 上の埋め込み $\kappa : L \to D$ を fix する. これに対する L の strict completion $r_\kappa : A \to k$ も fix しておく. G の $(\kappa, \lambda = \mathrm{id})$ に対する, A 上の canonical lift を (F,γ) とする (つまり, $F \otimes_{A,r_\kappa} k = G$. 以下では $\lambda = \mathrm{id}$ の lift しか考えないので, λ は省略して書く).

定義 10.1 κ に対する G の level s の **quasi-canonical lift** とは, M の有限次拡大の整数環上への, formal $\mathcal{O}_K$-module としての G の lift F_s と, $\mathcal{O}_K$-algebra の同型

$$\gamma_s : \mathcal{O}_s \cong \mathrm{End}(F_s)$$

の組で, 次の条件を満たすもの.

- $\mathcal{O}_s$-linear な level s の strict minimal isogeny $\alpha : F \to F_s$ が存在する.

注 10.2
- 条件から, 自動的に (Lie) の条件が出る. 実際, $\gamma_s(a) \circ \alpha = \alpha \circ \gamma(a)$ だから, これの Lie を取ればよい.
- F は $*$-同型を除いて unique に定まっていたが, $*$-同型は上の条件を変えないので, 上の定義は F の取り方にはよらない.

定理 10.3
(i) κ に対する *level* s の *quasi-canonical lift* は存在し，その $*$-同型類のなかに A_s 上定義されるものが取れる．

(ii) κ に対する *level* s の *quasi-canonical lift* の $*$-同型類は $\mathrm{Gal}(M_s/M)$*-torsor.*

(iii) 任意の κ に対する *level* s の *quasi-canonical lift* たちの間には, *formal* $\mathcal{O}_K$*-module* としての $\mathcal{O}_s$*-linear* な同型がある.

(iv) $\hat{L}^{\mathrm{nr}}$ の有限次拡大 N と, *reduction map* $r : \mathcal{O}_N \to k$ を *fix* する. F' を, $\mathcal{O}_N$ への *formal* $\mathcal{O}_K$*-module* としての G の *lift* とする *(*すなわち, $\mathcal{O}_K$-作用込みで $F' \otimes_{\mathcal{O}_N, r} k = G$*)*. さらに, $\mathcal{O}_K$*-algebra* の同型 $\gamma' : \mathcal{O}_s \cong \mathrm{End}(F')$ で, $\mathrm{Lie} \circ \gamma'$ が自然な埋め込み $\mathcal{O}_s \subseteq L \subseteq \mathcal{O}_N$ と一致するもの, が与えられたとする. このとき, ある埋め込み $\kappa : L \to D$ が存在して, $r = r_\kappa$ であり, F' には κ に対する *level* s の *quasi-canonical lift* の構造が入る.

以下これを示して行く.

存在. $T = T(F) = \mathcal{O}_L \cdot t$, $V = V(F)$ とし, T の level s の minimal superlattice $T' = (\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L) \cdot t$ を取る. これに対応する level s の strict minimal isogeny $\alpha : F \to F'$ を考える. α が strict だから, F' の r_κ による reduction は G と一致する. F' への $\mathcal{O}_s$-作用 $\gamma' : \mathcal{O}_s \cong \mathrm{End}(F')$ を, 補題 4.5 (i) により,

$$\mathrm{End}(F') \cong \{\tilde{\psi} \in \mathrm{End}^0(F) \cong L | \tilde{\psi}(T') \subseteq T'\} \cong \mathcal{O}_s$$

で定める. つまり, $x \in \mathcal{O}_s$ に対する $\gamma'(x) \in \mathrm{End}(F')$ は, $\gamma'(x) \circ \alpha = \alpha \circ \gamma(x)$ を満たす unique な元. 定義から, この作用により α は $\mathcal{O}_s$-linear になる. またこの式から $\mathrm{Lie}(\gamma'(x)) = \mathrm{Lie}(\gamma(x)) = x$ が出るので, 特に F_s は formal $\mathcal{O}_K$-module. この $\mathcal{O}_K$-作用が G へのそれを lift していることを示す. 上の式の r_κ による reduction を取ると,

$$r_\kappa(\gamma'(x)) \circ \Pi^s = \Pi^s \circ r_\kappa(\gamma(x))$$

を得る (ここで Π は $(X \mapsto X^q)$ で定まる G の準同型). $x \in \mathcal{O}_K$ であれば, γ や r_κ は $\mathcal{O}_K$-linear なので, 右辺は $\Pi^s \circ [x]_G = [x]_G \circ \Pi^s$ と一致. 従って $r_\kappa(\gamma'(x)) = [x]_G$ を得る. つまり F' は formal $\mathcal{O}_K$-module としての G の lift. これで (F', γ') が κ に対する level s の quasi-canonical lift であると分かった. Lubin-Tate 理論により, $T'/T \cong (\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L)/\mathcal{O}_L$ の stabilizer は $\mathrm{Gal}(\bar{M}/M_s)$ である. F' は F をこれに対応する部分群で (Serre の公式により) 割って作っているので, このように作った F' は A_s 上定義されることが分かる. これで後半の主張も示せた.

□

torsor になること. transitivity を示す. $\alpha_1 : F \to F_1$, $\alpha_2 : F \to F_2$ をそれぞれ κ に対する level s の quasi-canonical lift とする. 命題 5.5 (ii) より, 任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{M}/M)$ に対し, 下の図式を可換にする同型 τ が存在する.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, equal] & F_1 \arrow[d, "\tau"] \\ F = F^\sigma \arrow[r, "\alpha_2^\sigma"'] & F_2^\sigma \end{tikzcd}$$

reduction を取ると, α_1, α_2 がともに strict なことから τ は $*$-同型と分かる.

freeness を示す. $\alpha : F \to F'$ を level s の quasi-canonical lift とし, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{M}/M)$ に対して $*$-同型 $\tau : F' \cong (F')^\sigma$ が存在したとする. このとき, 二つの射

$$F \xrightarrow{\alpha} F' \xrightarrow{\tau} (F')^\sigma$$

$$F \xrightarrow{\alpha^\sigma} (F')^\sigma$$

は reduction して一致するので, rigidity よりもともと一致している. 従って命題 5.5 (ii) より, $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{M}/M_s)$ とわかる.

$\square$

$\mathcal{O}_s$-同型の存在. κ, κ' に対する canonical lift を F, F', level s の quasi-canonical lift を F_s, F'_s で表す. 対応する minimal superlattice を, $T = \mathcal{O}_L \cdot t \subseteq T_s = (\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L) \cdot t$, $T' = \mathcal{O}_L \cdot t' \subseteq T'_s(\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L) \cdot t'$ とする.

canonical lift の構成のしかたより, $\mathcal{O}_L$-同型 $\tau : F \cong F'$ が存在する. この同型による t' の逆像を $a \cdot t \in T$ と書く ($a \in \mathcal{O}_L^\times$). すると, $a \cdot \tau : F \to F'$ による T'_s の逆像は T_s と一致する. 従って, 下の図式を可換にする $\mathcal{O}_K$-linear な同型 τ_s が存在.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "a"] \arrow[d] & F \arrow[r, "\tau"] & F' \arrow[d] \\ F_s \arrow[rr, dotted, "\tau_s"'] & & F'_s \end{tikzcd}$$

これが $\mathcal{O}_s$-作用と可換なことは, epimorphism $F \to F_s$ との合成が $\mathcal{O}_s$-linear であることから分かる.

$\square$

最後の主張. $T' = T(F')$, $V' = V(F')$ とおく. このとき γ' が定める作用により V' は 1 次元の L-ベクトル空間になっている. $T'' \subseteq T'$ を, T' に入る最大の $\mathcal{O}_L$-lattice とすると, ある T'' の生成元 $t'' \in T''$ を取れば, $T' = (\pi^{-s}\mathcal{O}_K + \mathcal{O}_L) \cdot t''$ と書ける.

$\alpha : F'' \to F'$ を, sublattice $T'' \subseteq T'$ が定める strict isogeny とする. $V(\alpha)^{-1}(T(F'))/T(F'') \cong T(F')/\mathrm{Im}(T(F'')) = T'/T''$ は cyclic だから, α は minimal isogeny でもある. α が strict であり $F' \otimes_{\mathcal{O}_N, r} k = G$ だから, $F'' \otimes_{\mathcal{O}_N, r} = G$ となる. 以下, 埋め込み $\kappa : L \to D$ で, $r_\kappa = r$ かつ F'' が κ に対する canonical lift となるようなものを構成することを考える.

F'' への $\mathcal{O}_L$-作用 $\gamma : \mathcal{O}_L \cong \mathrm{End}(F'')$ が, 補題 4.5 (ii) により,

$$\mathrm{End}(F'') \cong \{x \in \mathrm{End}^0(F') \cong L \mid xT'' \subseteq T''\} \cong \mathcal{O}_L.$$

で定まる. つまり $a \in \mathcal{O}_L$ に対する $\gamma(a) \in \mathrm{End}(F'')$ は, 条件

$$\gamma'(\pi^s) \circ \alpha \circ \gamma(a) = \gamma'(\pi^s a) \circ \alpha$$

で unique に定まる元. F' の Lie に関する仮定から, この作用 $\gamma : \mathcal{O}_L \cong \mathrm{End}(F'')$ も $\mathrm{Lie}(\gamma(a)) = a \in L \subseteq \mathcal{O}_N$ を満たす. 次に, $x \in \mathcal{O}_K$ に対する作用 $\gamma(x)$ の r による reduction を考える. F' は G の formal $\mathcal{O}_K$-module としての lift なので $r(\gamma'(x)) = [x]_G$ を満たす. G は Lubin-Tate の reduction だから, $\mathcal{O}_K$-作用は Π と可換. 従って, 上の式より

$$\Pi^s \circ [\pi^s]_G \circ r(\gamma(x)) = [\pi^s]_G \circ \Pi^s \circ r(\gamma(x)) = r(\gamma'(\pi^s x)) \circ \Pi^s = [\pi^s x]_G \circ \Pi^s = \Pi^s \circ [\pi^s x]_G$$

を得る. 従ってここから, $x \in \mathcal{O}_K$ なら $r(\gamma(x)) = [x]_G$ とわかる. とくに, F'' は G の formal $\mathcal{O}_K$-module としての lift となっている.

そこで, $\kappa : L \to D$ を, 次の可換図式の上側の合成射として定める.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_L \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\text{can.}"'] & \mathrm{End}(F'') \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\text{Lie}"] & \mathrm{End}(G) = \mathcal{O}_D \arrow[d, "\text{Lie}"] \\ & \mathcal{O}_N \arrow[r, "r"'] & k \end{tikzcd}$$

すると, この図式の下側の合成射が κ が定める reduction map $r_\kappa : \mathcal{O}_L \to k$ となる. つまり $r_\kappa = r$. この写像 κ で G を formal $\mathcal{O}_L$-module と思うと, 定義から (F'', γ) は κ に対する canonical lift になっている.

□

注 10.4 上の定義とはじめに述べた定義が「一致」することを示す. つまり, (F', γ') が上の意味で quasi-canonical lift になるような κ が存在することと, はじめに述べた意味で quasi-canonical lift になるような κ が存在することが同値であることを証明する.

$\alpha : F \to F'$ が上に述べた意味での κ の quasi-canonical lift だとする. F' が条件 (Lie) を満たすことは既に述べた. 条件 (End) を確かめる. α が $\mathcal{O}_s$-linear だったので, 任意の $x \in \mathcal{O}_s$ に対し

$$\alpha \circ [x]_F = [x]_{F'} \circ \alpha$$

を満たしている. これを r_κ で reduction すると

$$\Pi^s \circ \kappa(x) = r_\kappa([x]_{F'}) \circ \Pi^s$$

となる. $\kappa = \mathrm{ad}(d\Pi^n) \circ \kappa_{\mathrm{LT}}$ とおく. このとき, $d_s = \Pi^s d \Pi^{-s}$ とすると,

$$r_\kappa([x]_{F'}) = \mathrm{ad}(\Pi^s d \Pi^n) \circ [x]_G = \mathrm{ad}(d_s \Pi^n) \circ [\sigma^s_{L/K}(x)]_G$$

となる (Π で挟むと $\sigma_{L/K}$ が出て来るのは Lubin-Tate 作用の reduction として得られる, G にもともと入っている $\mathcal{O}_L$-作用 $\kappa_{\mathrm{LT}}(x) = [x]_G$ だけで, 一般の κ から定まる G への $\mathcal{O}_L$-作用に関しては成り立つかどうかわからないことに注意). ここで $\kappa' = \mathrm{ad}(d_s \Pi^n) \circ \kappa_{\mathrm{LT}}$ とおけば, $r_{\kappa'} = r_\kappa$ であるので, 上の式は (F', γ') が κ' に対する (End) の条件を満たすことを表している.

逆に, (F', γ') がある κ に対して (Lie), (End) の条件を満たしたとする. これが適当に κ を取り換えたときに上の意味で quasi-canonical lift になることは, 定理 10.3 の最後の主張を $r = r_\kappa$ に適用すれば従う.