ARGOS seminar on intersections of modular correspondences, Astérisque **312** (2007) の紹介 (6)

服部 新
北大理学研究院 3-601
shin-h@math.sci.hokudai.ac.jp

平成 19 年 12 月 8 日

※ B. H. Gross, K.Keating, *On the intersection of modular correspondences*, Invent. Math **112** (1993), 225-245 の解説本

1　今回証明すること

K. Keating: *Lifting endomorphisms of formal A-modules*, Compositio Math. **67** (1988) 211–239, の紹介

$K/\mathbb{Q}_p$：有限次拡大, 素元 $\pi = \pi_K$, 剰余体 $\mathbb{F}_q$
L/K：二次拡大, 相対分岐指数 $e = e(L/K)$
$\mathcal{O}_s := \mathcal{O}_K + \pi^s \mathcal{O}_L$：$\mathcal{O}_L$ の中の, conductor=s の order
$k := \bar{\mathbb{F}}_q$, $W := W(k)$
G：k 上の height=2 の formal $\mathcal{O}_K$-module (同型を除いて unique)
$\mathcal{O}_D := \mathrm{End}_k(G)$. これは K 上の division quaternion algebra D の maximal order.
Π_D：D の素元
$\kappa : L \to D$：K-algebra の埋め込み, をひとつ fix する.
r_κ：reduction map $\mathcal{O}_L \overset{\kappa}{\to} \mathcal{O}_D = \mathrm{End}_k(G) \overset{\mathrm{Lie}}{\to} k$ (以下では省略して書く)
$A := \hat{\mathcal{O}}_{L^{\mathrm{nr}}}$, $M := \mathrm{Frac}(A)$
M_s：局所類体論で $\mathcal{O}_s^\times \subseteq \mathcal{O}_L^\times$ に対応する M の有限次 Abel 拡大
$A' := \mathcal{O}_{M_s}$, $\pi' := \pi_{M_s}$

$$e_s := \begin{cases} 1 & \text{if } L/K\text{：不分岐}, s = 0 \\ q^{s-1}(q+1) & \text{if } L/K\text{：不分岐}, s \geq 0 \\ 2q^s & \text{if } L/K\text{：分岐} \end{cases}$$

$F'_{/A'}$：G の level s の quasi-canonical lift for $(\kappa, \lambda = \mathrm{id})$
$A'_n := A'/(\pi')^n$, $F'_n := F' \otimes_{A'} A'_n$ (i.e. $F_0 = G$)
このとき,

$$\mathcal{O}_s = \mathrm{End}(F') \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{End}_{A'_n}(F'_n) \subseteq \mathrm{End}_{A'_{n-1}}(F'_{n-1}) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{End}_k(F'_0) = \mathcal{O}_D$$

であるので, $f_0 \in \mathcal{O}_D = \mathrm{End}_k(G)$ がどの $\mathrm{End}(F'_n)$ にまで入るのか (i.e. $f_0 : G \to G$ がどの $f_n : F'_n \to F'_n$ にまで lift するか) を調べたい.

$k \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ に対し, $a(k) := \frac{(q^k-1)(q+1)}{q-1}$ とおく.

定理 1.1 (Keating) $f_0 \in (\mathcal{O}_s + \Pi_D^l \mathcal{O}_D) \setminus (\mathcal{O}_s + \Pi_D^{l+1}\mathcal{O}_D)$ $(l \geq 0)$ だとする. このとき,

$$f_0 \in \mathrm{End}(F'_{n_l - 1}) \setminus \mathrm{End}(F'_{n_l}).$$

但し,

$$\begin{cases} a(\frac{l}{2}) + 1 & \textit{if } l \leq 2s \text{ かつ } l\text{:偶数} \\ a(\frac{l-1}{2}) + q^{\frac{l-1}{2}} + 1 & \textit{if } l \leq 2s \text{ かつ } l\text{:奇数} \\ a(s-1) + q^{s-1} + e_s(\frac{l+1}{2} - s) + 1 & \textit{if } l \geq 2s+1 \end{cases}$$

□

注 1.2 $l = 2s-1$ または, $l = 2s$ かつ L/K が分岐, の場合は三番目の式も成立する.

2 局所交点数の計算

$(L, Q) \subseteq (\mathcal{O}_D, \mathrm{Nrd})$:$\mathbb{Z}_p$ 上の anisotropic, ternary quadratic space

(L, Q) の Gross-Keating invariant を (a_1, a_2, a_3), optimal basis を (ψ_1, ψ_2, ψ_3) と書く.

$R = W[[t, t']]$:G の universal deformation ring $\cong W[[t]]$ の二階直積, $\mathcal{S} := \mathrm{Spec}(R)$

$I_i = (h_i)$:R における ψ_i の lifting locus (単項イデアルになることを示した). これが定める $\mathrm{Spec}(R)$ の divisor を $\mathcal{T}_i$ とおく.

$\alpha(Q) := \mathrm{lg}_W(R/I_1 + I_2 + I_3) = (\mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2.\mathcal{T}_3)_{\mathcal{S}}$ (intersection product)

このとき,

定理 2.1 (定理 B1)

$$\alpha(Q) = \begin{cases} 1 & \textit{if } (a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 1) \\ 2 & \textit{if } (a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 1) \end{cases}$$

定理 2.2 (定理 B2) $\psi_3 = p\psi'_3$, $\psi'_3 \in \mathrm{End}_k(G)$, と書けるとすると,

$$(\mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2.\mathcal{T}_3)_{\mathcal{S}} = (\mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2.\mathcal{T}'_3)_{\mathcal{S}} + (\mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2.V(p))_{\mathcal{S}}.$$

ここで $V(p) = \mathrm{Spec}(R/p)$, $\mathcal{T}'_3$ は ψ'_3 の *lifting locus.*

定理 2.3 (定理 B3) $a_1 \equiv q_2$ (2) なら,

$$(\mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2.V(p))_{\mathcal{S}} = \sum_{i=0}^{a_1-1} 2(i+1)p^i + \sum_{i=a_1}^{\frac{1}{2}(a_1+a_2-2)} 2(a_1+1)p^i + (a_1+1)p^{\frac{a_1+a_2}{2}}.$$

$a_1 \not\equiv q_2$ (2) なら,

$$(\mathcal{T}_1.\mathcal{T}_2.V(p))_{\mathcal{S}} = \sum_{i=0}^{a_1-1} 2(i+1)p^i + \sum_{i=a_1}^{\frac{1}{2}(a_1+a_2-1)} 2(a_1+1)p^i.$$

定理 B は, $a_1 + a_2 + a_3$ に関する induction で, 上の定理 B1〜定理 B3 に帰着されていた. lifting theorem を使うと, 定理 B1 と定理 B2 を示すことが出来る. 定理 B3 は $\mathrm{Spec}(k[[X, Y]])$ 上の二つの divisor の intersection product を求める問題だが, 体 k 上の話なので deformation とは関係なく計算できる (modular curve の reduction に関する Kummer congruence の帰結).