アーベル多様体の標準部分群とヒルベルト固有値多様体

服部 新
九州大学数理学研究院

平成 28 年 9 月 8 日

概 要

本稿では，第 61 回代数学シンポジウムにおける講演に基づき，過収束保型形式・固有値多様体・Abel 多様体の標準部分群など，p 進保型形式の理論についての概説を行ったのち，Hilbert 固有値多様体の整数重さでの固有性について筆者が得た結果 [Hat2] を紹介する．

1 背景

1.1 保型形式の p 進族

p を素数，$\bar{\mathbb{Q}}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包，$\mathbb{C}_p$ を $\bar{\mathbb{Q}}_p$ の p 進完備化とする．v_p で $\mathbb{C}_p$ 上の（加法的）p 進付値を表し，$v_p(p)=1$ と正規化する．任意の $a\in\mathbb{C}_p$ に対し，a の p 進絶対値を $|a|_p=p^{-v_p(a)}$ で定義する．（階数 1 の）付値体の拡大 $K/\mathbb{Q}_p$ に対し，K の整数環を $\mathcal{O}_K$ と書き，$m_K^{\geqslant i}=\{x\in\mathcal{O}_K\mid v_p(x)\geq i\}$，$\mathcal{O}_{K,i}=\mathcal{O}_K/m_K^{\geqslant i}$ とおく．また，p が奇素数のとき $\mathbf{p}=p$，$p=2$ のとき $\mathbf{p}=4$ とおく．$\omega:\mathbb{Z}_p^\times\to(\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ を Teichmüller 指標とする．

始めに偶数 $k\geq 4$ に対し，レベル 1，重さ k の Eisenstein 級数 $E_k(z)$ を考える．$E_k(z)$ は Hecke 固有形式であり，定数倍で正規化すれば次のような q 展開を持つ．

$$E_k(q)=1+\frac{2}{\zeta(1-k)}\sum_{n\geq 1}\sigma_{k-1}(n)q^n,\quad \text{ただし } \sigma_m(n)=\sum_{d>0,d|n}d^m.$$

Eisenstein 級数に関して著しいのは，重さを変化させるとこれらは Hecke 固有形式の p 進的な族をなす，という事実である．実際，

$$E_k^*(z)=(1-p^{k-1})^{-1}(E_k(z)-p^{k-1}E_k(pz))$$

とおく．$E_k^*(z)$ はレベル $\Gamma_0(p)$ の Hecke 固有形式で，p 以外の Hecke 固有値が $E_k(z)$ のものと等しく，q 展開は次で与えられる．

$$E_k^*(q)=1+\frac{2}{(1-p^{k-1})\zeta(1-k)}\sum_{n\geq 1}\sigma_{k-1}^*(n)q^n,\quad \text{ただし } \sigma_m^*(n)=\sum_{d>0,d|n,p\nmid d}d^m.$$

整数 k に対し，連続環準同型 $x_k^*:\mathbb{Z}_p[[X]]\to\mathbb{C}_p$ を $X\mapsto(1+\mathbf{p})^k-1$ で定める．このとき，久保田-Leopoldt の p 進 L 関数の性質から次のことが分かる [Ser, §4.5]．任意の $n\geq 1$ に対して $A_n(X)\in\mathbb{Z}_p[[X]]$ が存在して，巾級数

$$\mathbf{E}(q)=1+\sum_{n\geq 1}A_n(X)q^n$$

は，4 以上の任意の偶数 $k \equiv 0 \bmod \varphi(\mathbf{p})$ に対し $x_k^*(\mathbf{E}(q)) = E_k^*(q)$ を満たす．

任意の連続環準同型 $x^* : \mathbb{Z}_p[[X]] \to \mathbb{C}_p$ は対応 $x^* \mapsto x^*(X)$ により単位開円盤

$$D(0, 1^-) = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x|_p < 1\}$$

の元と同一視できる．$D(0, 1^-)$ には**リジッド解析多様体**の構造が入り，各 $A_n(X)$ は $x \mapsto A_n(x)$ により $D(0, 1^-)$ 上のリジッド解析関数と見なせる．従って，$\mathbf{E}(q)$ は多様体 $D(0, 1^-)$ でパラメータ付けられた Hecke 固有形式の p 進解析的な族である，と考えることができる．これが **Eisenstein 族**（Eisenstein family）と呼ばれる，固有形式の p 進族の最初の例である．

このように，Hecke 固有形式はしばしば p 進族をなすことが知られている．保型形式の p 進族は 1970 年代に，総実代数体の p 進 ζ 関数を構成するために Serre [Ser] が導入して以来，整数論における強力な研究手法であり続けてきた．その理由の一端としては，p 進族の存在が固有形式の合同を大量に生み出すこと，また族のパラメータ空間上での稠密性を用いた議論が可能になること，などが挙げられる．どちらも，調べるのが難しい保型形式のクラスの研究を調べるのが容易な保型形式のクラスに帰着するのに用いられる．例えば，保型形式に伴う Galois 表現を構成するのに，まず志村多様体のエタールコホモロジーを使って多くの保型形式に対して Galois 表現を構成し，そのような方法ではアプローチできない保型形式に対しては合同や稠密性を用いて前者に帰着する，という手段が採られるが，これは保型形式の p 進族の典型的な応用例である [Wil, CH].

1.2 重さ空間

古典的な保型形式の重さは整数だが，固有形式の p 進族をより精密に理解するためには，重さも p 進解析的に変動する，と考える必要がある．整数重さとは限らない「p 進的な重さ」のパラメータ空間が，**重さ空間**（weight space）と呼ばれるリジッド解析多様体である．

重さ空間 $\mathcal{W}$ は，その $\mathbb{C}_p$ 値点のなす集合 $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ が

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times)$$

と同一視される $\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド解析多様体である．直積分解 $\mathbb{Z}_p^\times = (\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times \times (1 + \mathbf{p}\mathbb{Z}_p)$ から，$\mathcal{W}$ は単位開円盤 $D(0, 1^-)$ の，有限集合 $\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}/\mathbf{p}\mathbb{Z})^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times)$ で添字付けられた直和であることが分かる．連続準同型 $\mathbb{Z}_p^\times \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ のことを**重さ指標**（weight character）と呼ぶ．

整数 k と有限指標 $\chi : \mathbb{Z}_p^\times \to (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$ に対し，重さ指標

$$x_{k,\chi}^* : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times, \quad a \mapsto \chi(a)(\omega(a)^{-1}a)^k$$

に対応する点 $x_{k,\chi} \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ を**数論的点**（arithmetic point）と呼ぶ．$p^{m'} = \mathrm{LCM}(p^m, \mathbf{p})$ と書くとこの点は，p と素な任意の整数 $N > 0$ に対し，重さ k，レベル $\Gamma_1(Np^{m'})$，p での指標 $\chi\omega^{-k}$ の保型形式の重さに対応する点である．また，x_{k,ω^k} を**整数重さの点**と呼ぶ．これは重さ k，レベル $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(\mathbf{p})$ の保型形式の重さに対応する．このように，重さ指標には保型形式の重さの情報だけではなく，p でのレベルと指標の情報も含まれている．

1.3 p 進保型形式と肥田族

連続的に分布しているわけではない整数重さを p 進解析的に補間したのが重さ空間だった．同様に，重さが整数である古典的な保型形式も連続的に分布しているわけではないため，保型形式の p

進族を構成するためには，何らかの接合剤によって古典的な保型形式を p 進解析的に繋げることが必要になる．そのような接合剤としてはいくつかの選択肢があるが，ここでは p **進保型形式**を用いる．

p 進保型形式とは，古典的な保型形式の q 展開の p 進極限に当たるものである．つまり，保型形式の列 $\{f_n\}_n$ でその q 展開の列 $\{f_n(q)\}_n$ が p 進的に収束しているようなものに対し，$\{f_n\}_n$ の収束先として p 進保型形式を定義したい．古典的な保型形式とはモジュラー曲線上の適当な線束の大域切断のことだったが，そのままでは今述べた意味での保型形式の p 進収束先を定義できない．実際，$p \geq 5$ に対し，Eisenstein 級数 $E_{p-1}(z)$ の q 展開 $E_{p-1}(q)$ は $E_{p-1}(q) \in 1 + pq\mathbb{Z}_p[[q]]$ を満たすことが知られている．従って $\{E_{p-1}(q)^{p^n}\}_n$ は p 進的に 1 に収束するから，$\{E_{p-1}(z)^{p^n-1}\}_n$ の収束先が $E_{p-1}(z)$ の逆元を定めることになり，良還元を持つ楕円曲線での $E_{p-1}(z)$ の特殊化は p 進単数になるはずである．しかし，$E_{p-1}(z)$ の法 p 還元は Hasse 不変量と一致するため，超特異（supersingular）良還元を持つ楕円曲線での $E_{p-1}(z)$ の特殊化は p 進単数ではない．

この観察から，q 展開の p 進位相で完備な保型形式の空間を構成するためには，超特異良還元を持つ楕円曲線をモジュラー曲線から除いた集合を考えなければならないことが分かる．この集合はモジュラー曲線の代数幾何的な開集合にはならないが，リジッド解析幾何における**許容開集合**と見なすことができる．そこで，p 進保型形式とはこの集合上での適当な線束の切断である，と定義する．そのためにまず，除外集合の大きさを計る尺度—**Hodge 高さ**—を導入する．

定義 1.1. $L/\mathbb{Q}_p$ を完備付値体の拡大，A を $\mathcal{O}_L$ 上の Abel スキームとし，$A_1 = A \times_{\mathcal{O}_L} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{L,1})$ とおく．双対 Abel スキーム $A_1^\vee$ の Verschiebung を V とし，V が Lie 環 $\mathrm{Lie}(A_1^\vee)$ に引き起こす写像を $\mathrm{Lie}(V) : \mathrm{Lie}(A_1^\vee)^{(p)} \to \mathrm{Lie}(A_1^\vee)$ で表す．$\mathrm{Lie}(A_1^\vee)$ の基底を選んで $\mathrm{Lie}(V)$ の行列式 $a = \det(\mathrm{Lie}(V))$ を考え，a の $\mathcal{O}_L$ への持ち上げ $\tilde{a}$ を選ぶ．頂切 p 進付値

$$\mathrm{Hdg}(A) = \min\{1, v_p(\tilde{a})\} \in [0, 1]$$

は基底や $\tilde{a}$ の選び方によらない．これを A の Hodge 高さ（Hodge height）と呼ぶ．

このとき，A が通常（ordinary）還元を持つための必要十分条件は $\mathrm{Hdg}(A) = 0$ であることが示せる．つまり，Hodge 高さは Abel 多様体の通常還元からの距離を測る不変量である．

p と素な整数 $N \geq 5$ に対し，$X_1(N)$ でレベル $\Gamma_1(N)$ の（$\mathbb{Q}_p$ 上の）モジュラー曲線を表し，これを $\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド解析曲線と見なす．付値体の拡大 $L/\mathbb{Q}_p$ に対し，$X_1(N)(L)$ の元は $\mathcal{O}_L$ 上の広義楕円曲線 E とそのレベル $\Gamma_1(N)$ 構造 Q の組の同型類 $[(E, Q)]$ と同一視できるが，Hodge 高さも E が楕円曲線の場合に $\mathrm{Hdg}(E)$ と一致するような $X_1(N)$ 上の関数に適切に拡張できる．そこで，任意の有理数 $r \geq 0$ に対し，$X_1(N)$ の許容開集合 $X_1(N)(r)$ を

$$X_1(N)(r) = \{y \in X_1(N) \mid \mathrm{Hdg}(y) \leq r\}$$

と定義する．$X_1(N)(0)$ は通常良還元または乗法的還元を持つ楕円曲線に対応する点とカスプからなる $X_1(N)$ の部分集合であり，**通常跡**（ordinary locus）と呼ばれる．$X_1(N) \setminus X_1(N)(0)$ の点は超特異良還元を持つ楕円曲線に対応する．これを用いて，整数重さの p 進保型形式を次のように定義する．

定義 1.2. k を整数，ω を $X_1(N)$ 上の Hodge 線束とする．$\mathbb{C}_p$ への係数拡大 $X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}$ に対し $H^0(X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}, \omega^k)$ の元を，重さ k，従順（tame）レベル N の p **進保型形式**と呼ぶ．$X_1(N)$ の境界因子を D とするとき，$H^0(X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}, \omega^k(-D))$ の元を，重さ k，従順レベル N の p **進尖点形式**と呼ぶ.（従順レベル < 5 の場合は，これらのうち適切な群作用で固定される元として定義する.）

整数重さとは限らない重さ指標 $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対しても，重さ x，従順レベル N の p 進保型形式の概念を定義することができる．そのためには，整数重さ k の場合の ω^k の一般化に当たる $X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}$ 上の線束 ω^x を適切に定義する必要がある．(§3.2 を参照.)

定義 1.3. 重さ指標 $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対し，$M_x(N) = H^0(X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}, \omega^x)$ の元を，重さ x，従順レベル N の p 進保型形式と呼ぶ．尖点形式も同様に定義する．$M_x(N)$ は一般に無限次元 $\mathbb{C}_p$ ベクトル空間である．

p 進保型形式に対しても q 展開を定義することができる．さらに，古典的な保型形式の空間と同様に，$M_x(N)$ にも Hecke 作用素 T_l $(l \nmid Np)$，U_l $(l \mid N)$，ダイアモンド作用素 $\langle l \rangle_N$ $(l \nmid Np)$ が作用する．また，p での Hecke 作用素として，尖点形式の q 展開に

$$\sum_{n \geq 1} a_n q^n \mapsto \sum_{n \geq 1} a_{np} q^n$$

を引き起こす **Atkin の作用素** U_p が作用する．従って，p 進保型形式に対しても Hecke 固有形式の概念が定義される．

定義 1.4. p 進保型形式 f が U_p 固有形式であるとき，f の U_p 固有値 $a_p(f)$ の p 進付値 $v_p(a_p(f))$ を f の**傾き**（slope）と呼ぶ．f の傾きは $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ の元である．

固有形式の p 進族で Eisenstein 族の次に構成されたのは，傾き 0 の p 進尖点固有形式のなす**肥田族**（Hida family）である [Hid, §3]．肥田族とは，リジッド解析多様体の有限平坦射 $\kappa : X \to \mathcal{W}$ と，X 上のリジッド解析関数 $A_n \in \mathcal{O}(X)$（$n \geq 2$）の組で，任意の $x \in X(\mathbb{C}_p)$ に対し

$$q + A_2(x)q^2 + \cdots + A_n(x)q^n + \cdots$$

が傾き 0，重さ $\kappa(x)$ の p 進尖点固有形式の q 展開と一致するようなもののことである．(ここで考えているのは，実際は肥田族のリジッド生成ファイバーに過ぎない.) $\kappa(x)$ が重さ ≥ 2 の数論的点であるような x での特殊化は，傾き 0 の古典的な尖点形式の q 展開を与える．

1.4 過収束保型形式と標準部分群

傾き 0 の p 進保型形式には，$M_x(N)$ における傾き 0 の固有値に属する U_p の広義固有空間が有限次元になる，という著しい性質がある．肥田族を超えて傾き > 0 の固有形式の p 進族を構成するためには，傾き > 0 の U_p 広義固有空間に対する同じような統制が必要になる．ところが，$M_x(N)$ における傾き > 0 の固有値に属する U_p 広義固有空間は一般に無限次元である [Gou, Corollary II.3.13, Proposition II.3.14]．

これは p 進保型形式の空間が大きすぎるためだと考えられる．そこで，U_p が意味のある作用をする部分空間を定義したい．p 進保型形式はモジュラー曲線 $X_1(N)$ の許容開集合 $X_1(N)(0)$ 上で定義された保型形式だったので，空間を小さくするには定義域を広げればよい．こうして重さ k の過収束保型形式の定義に到達する．

定義 1.5. k を整数とする．$\bigcup_{r>0} H^0(X_1(N)(r)_{\mathbb{C}_p}, \omega^k)$ の元を，重さ k，従順レベル N の**過収束**（overconvergent）保型形式と呼ぶ．過収束尖点形式も同様に定義する．

一般の重さ指標 $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対する過収束保型形式の定義を最初に与えたのは Coleman [Col] である．Coleman の定義は，Eisenstein 級数で割ることで重さ 0 の場合の定義に帰着するという

ad hoc なものだが，一方で Pilloni [Pil] による新しい定義は，$X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}$ 上の線束 ω^x が適当な $r_x > 0$ に対する $X_1(N)(r_x)_{\mathbb{C}_p}$ にまで拡張されることを証明し，

$$\bigcup_{r_x \geq r > 0} H^0(X_1(N)(r)_{\mathbb{C}_p}, \omega^x)$$

の元を重さ x の過収束保型形式とするという，より自然なものである．重さ x，従順レベル N の過収束保型形式の空間を $M_x^\dagger(N)$，過収束尖点形式の空間を $S_x^\dagger(N)$ と書く．これらも一般に無限次元 $\mathbb{C}_p$ ベクトル空間である．

どちらの定義を採用しても，重要なのは U_p が $M_x^\dagger(N)$ や $S_x^\dagger(N)$ に**コンパクト作用素**として作用するという事実である．$\mathbb{C}_p$ 上の Banach 空間 V に対し連続作用素 $T : V \to V$ がコンパクトであるとは，像が有限次元の作用素の極限として T が得られることである．作用素の像が有限次元であれば特性多項式を考えることができるが，その極限を取ることでコンパクト作用素にも**特性巾級数**を定義でき，意味のあるスペクトル理論を展開できる．（$M_x^\dagger(N)$ は Banach 空間の順極限でしかないので，実際は一旦過収束度 r を止めて議論する．）特に，0 以外の固有値に属する U_p 広義固有空間が有限次元になることを証明できる．肥田族の場合を鑑みると，これは傾き有限な固有形式の p 進族の存在を強く示唆する．実際，そのような族で重さ空間のアフィノイド許容開集合の有限平坦被覆でパラメータ付けられるものが Coleman によって構成されている（**Coleman 族**，[Col, Theorem B5.7]）．

$M_x^\dagger(N)$ における U_p 作用のコンパクト性を保証するのが，楕円曲線の**標準部分群**（canonical subgroup）の理論である．$L/\mathbb{Q}_p$ を有限次拡大，E を $\mathcal{O}_L$ 上の楕円曲線で通常還元を持つものとすると，$E[p^n]$ は $\mathcal{O}_L$ 上階数 p^{2n} だが，その単位成分 $E[p^n]^0$ は $\mathcal{O}_L$ 上階数 p^n の有限平坦閉部分群スキームである．この特別な部分群スキームの存在が p 進保型形式の理論で本質的な役割を果たすが，E が超特異還元を持つ場合は $E[p^n] = E[p^n]^0$ であり，この方法では階数 p^n の部分群スキームを構成できない．標準部分群の理論とは，E が通常還元に十分近いときに，$E[p^n]$ の階数 p^n の部分群スキームで他と異なる特別なものの存在を保証するものである．

定理 1.6. (Katz, Lubin) E を $\mathcal{O}_L$ 上の楕円曲線とする．$\mathrm{Hdg}(E) < 1/(p^{n-2}(p+1))$ ならば，$E[p^n]$ に $\mathcal{O}_L$ 上階数 p^n の有限平坦閉部分群スキーム $\mathcal{C}_n$ が存在して，通常還元の場合の $E[p^n]^0$ と類似の性質を持つ．$\mathcal{C}_n$ を E のレベル n の標準部分群と呼ぶ．

「$E[p^n]^0$ と類似の性質」については詳しく述べないが（[Kat, Chapter 3], [Buz1, §3] を参照），例えば $\mathcal{C}_1$ の性質として次のようなものがある．

定理 1.7. ([Kat, Theorem 3.10.7]) E を $\mathcal{O}_L$ 上の楕円曲線で $\mathrm{Hdg}(E) < p/(p+1)$ を満たすものとし，$\mathcal{C}_1$ を E のレベル 1 の標準部分群とする．$\mathcal{H}$ を $E[p]$ の $\mathcal{O}_L$ 上階数 p の有限平坦閉部分群スキームで $\mathcal{H}_L \cap \mathcal{C}_{1,L} = 0$ を満たすものとする．このとき，

$$\mathrm{Hdg}(E/\mathcal{H}) = \frac{1}{p}\mathrm{Hdg}(E)$$

であり，$E[p]/\mathcal{H}$ は $E/\mathcal{H}$ のレベル 1 の標準部分群である．

この性質は「U_p 作用素が過収束保型形式の過収束性を向上する」ということを意味している．実際，例えば整数重さ k の過収束保型形式 f は，適当な $r > 0$ に対する $X_1(N)(r)$ の L 値点 $[(E, Q)]$ に対して E_L 上の不変微分形式の層 ω_{E_L} の k 階テンソル $\omega_{E_L}^k$ の大域切断 $f(E, Q)$ を与えるルールと見なすことができるが，こう思ったとき U_p 作用素は

$$U_p(f)(E, Q) = \frac{1}{p} \sum_{\mathcal{H}_L \cap \mathcal{C}_{1,L} = 0} f(E/\mathcal{H}, \bar{Q})|_{E_L}$$

で定義される．(但し $\bar{Q}$ はレベル $\Gamma_1(N)$ 構造 Q の $E/\mathcal{H}$ における像.）従って上の性質が意味しているのは，f が $X_1(N)(r)$ 上定義される過収束保型形式ならば $U_p(f)$ は $X_1(N)(pr)$ 上定義される，ということである．このことから U_p 作用素のコンパクト性が従う．

さらに，f を傾き有限の過収束固有形式とすると，f の U_p 固有値 $a_p(f)$ は 0 ではないので，等式

$$f = \frac{1}{a_p(f)} U_p(f)$$

が f の定義域上で成り立つ．上の性質から，右辺の保型形式は f よりも大きな定義域を持つので，f の**解析接続**を与えていることになる [Buz1, Theorem 5.2]．このように，傾き有限の過収束固有形式はモジュラー曲線上の大きな領域にまで解析接続することができ，どこまで解析接続されるかを標準部分群の理論が統制している．

1.5 Coleman-Mazur 固有値曲線と固有値多様体

肥田族（のリジッド生成ファイバー）や Coleman 族を含み，傾き有限な固有形式を全てパラメトライズするリジッド解析多様体が **Coleman-Mazur 固有値曲線**（eigencurve）である．

定理 1.8. （[CM, Buz2]）等次元 1 のリジッド解析多様体 $\mathcal{C}_N$ と射 $\kappa : \mathcal{C}_N \to \mathcal{W}$ が存在して次を満たす．任意の $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対し $\kappa^{-1}(x)$ は，重さ x，従順レベル N の傾き有限な過収束正規固有形式全体の集合と同一視できる．$\mathcal{C}_N$ を従順レベル N の Coleman-Mazur 固有値曲線と呼ぶ．

肥田族（のリジッド生成ファイバー）は $\mathcal{C}_N$ の既約成分をなす．また，Coleman 族は $\mathcal{C}_N$ のアフィノイド許容開集合と同一視できる．肥田族そのものには整構造の情報もあり，リジッド生成ファイバーに移行することで $\mathcal{C}_N$ は肥田族の持つ整構造の情報を失っているが，最近の研究では $\mathcal{W}$ や $\mathcal{C}_N$ の整構造を考えることが重要になっている [AIP2].

$\mathcal{C}_N$ の構成法には Galois 的手法と Hecke 的手法の二種類があるが，後者は大雑把に言うと，$\mathcal{C}_N$ を適当な Hecke 環のスペクトラムとして定義するものである．(実際には，$M_x^\dagger(N)$ における傾き有限な U_p 広義固有空間の有限次元性（の族への適切な一般化）を用いて，Hecke 環の商でアフィノイド代数になるようなものを構成し，その極大スペクトラムを貼り合わせる.）

Hecke 的手法は他の代数群上の保型形式に一般化でき，$\mathcal{C}_N$ と同じような Hecke 固有値系のモジュライ空間を構成することができる．つまり，代数体上の簡約代数群 G に対し，重さ空間 $\mathcal{W}^G$ と，$\mathcal{W}^G$ 上の（固定した従順レベルに対する）リジッド解析多様体 $\mathcal{E}$ で，G 上の保型形式の空間に現れる傾き有限な Hecke 固有値系を p 進的に補間するものが存在する．$\mathcal{E}$ のことを G に対する**固有値多様体**（eigenvariety）と呼ぶ．([Buz2, Loe, Urb] などを参照.）G 上の古典的な保型形式に対応する $\mathcal{E}$ の点を**古典的点**（classical point）と呼ぶ．

注 1.9. GL_2 以外の代数群では一般に弱重複度 1 定理が成立せず，成立したとしても楕円尖点形式の正規化に相当する適切な概念が存在しない．従って「Hecke 固有値系」と「固有形式」の間にずれがあり，一般の場合は Hecke 固有値系のモジュライ空間しか得られない．

注 1.10. Eigencurve，eigenvariety の訳としては「固有曲線」「固有多様体」が逐語的だろうが，これでは曲線や多様体が固有（proper）であることと紛れが生じ，特に本稿のような「eigenvariety の properness」を論じる場合に混乱の惧れがある．同じ問題があるフランス語圏では eigenvariety を variété de Hecke（Hecke 多様体）と呼んでいるが，ここでは「Hecke 固有値系のモジュライ空間」という意味を汲んで「固有値曲線」「固有値多様体」という訳語を採用した．

注 1.11. $\mathcal{C}_N$ の Hecke 的構成法には，ここで紹介した過収束保型形式と標準部分群を用いる幾何的な手法の他に，過収束モジュラーシンボルを用いる Stevens の手法 [Bel1, Bel2] や，Jacquet 加群関手を用いる Emerton の手法 [Eme] が知られている．ここで幾何的な手法を採用した理由は，本稿の主定理 2.2 を証明するのに過収束保型形式の解析接続性の分析が必要になるからである．

1.6 固有性

固有値多様体 $\mathcal{E}$ は Hecke 固有値系のモジュライ空間であり，$\mathcal{E}$ の幾何的構造に興味を持つのは自然だろう．Coleman-Mazur [CM, p. 4–8] は固有値曲線 $\mathcal{C}_N$ の幾何について多くの問いを提出し，それらについては近年かなり研究が進んでいるが，例えば「$\mathcal{C}_N$ の既約成分は有限個か無限個か」という基本的な問いも未解決のまま残されている．固有値多様体のそうした幾何的構造はしばしば保型形式の深い p 進的性質と関連している．実際，Bellaïche-Chenevier [BeC, Theorem 9.1.2] はユニタリ群 $U(m)$ のある種の固有値多様体に対し，その古典的点 x における接空間の次元と，x に対応する保型表現に伴う p 進 Galois 表現の Selmer 群の次元が関連することを示した．

本稿で着目する幾何的性質は，固有値多様体 $\mathcal{E}$ の**固有性**（properness）と呼ばれる，$\mathcal{E}$ のある種の完備性である．$\mathbb{C}_p\langle X\rangle$ を $\mathbb{C}_p$ 上の Tate 代数，$\mathcal{D} = \mathrm{Sp}(\mathbb{C}_p\langle X\rangle)$ を単位閉円盤とする．このアフィノイド多様体を単位閉円盤と呼ぶ理由は，その $\mathbb{C}_p$ 値点の集合 $\mathcal{D}(\mathbb{C}_p)$ が

$$\mathcal{D}(\mathbb{C}_p) = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x|_p \leq 1\}$$

と同一視されるためである．$x = 0$ に対応する閉点を O で表し，$\mathcal{D}^\times = \mathcal{D} \setminus \{O\}$ とおく（穴あき単位閉円盤）．$\mathcal{E}$ や $\mathcal{W}^G$ の $\mathbb{C}_p$ への係数拡大を $\mathcal{E}_{\mathbb{C}_p}$ や $\mathcal{W}^G_{\mathbb{C}_p}$ で表す．

定義 1.12. （[BuC]）固有値多様体 $\mathcal{E}$ が**固有**（proper）であるとは，任意の射 $\varphi : \mathcal{D}^\times \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p}$ が $\bar{\varphi} : \mathcal{D} \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p}$ に延長されることを言う．これは次の条件と同値である．任意の射 $\varphi : \mathcal{D}^\times \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p}$ と $\psi : \mathcal{D} \to \mathcal{W}^G_{\mathbb{C}_p}$ で，自然な埋め込み $\mathcal{D}^\times \to \mathcal{D}$ と構造射 $\kappa : \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p} \to \mathcal{W}^G_{\mathbb{C}_p}$ について図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^\times \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p} \arrow[d, "\kappa"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "\psi"'] \arrow[ur, dotted] & \mathcal{W}^G_{\mathbb{C}_p}
\end{tikzcd}$$

を可換にするものに対し，射 $\bar{\varphi} : \mathcal{D} \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}_p}$ が存在してこれを付け加えた図式も可換にする．

定義に現れる条件は代数幾何における固有性の付値判定法の類似であり，$\mathcal{E}$ がある意味で完備なことを示唆している．逆に $\mathcal{E}$ が固有でなければ，$\mathcal{E}$ に傾き無限の Hecke 固有値系を付け加えて「完備化」する余地がありそうだ．$\mathcal{C}_N$ の固有性は Coleman-Mazur [CM, p. 5] が提出した問いの一つだが，一方で「傾き有限な固有形式の列で傾き無限の固有形式に p 進収束するようなものは存在しない」という，より強い意味での完備性は成り立たないことが知られている [CS].

注 1.13. 射 κ は一般に（$\mathcal{C}_N$ の場合でも）準コンパクトではないので，リジッド解析幾何で通常用いられる（Kiehl の）意味で固有ではない．一方，多くの場合 κ は部分的固有性（partial properness）と呼ばれる弱い固有性を持つが，一般論としては部分的固有性から上の意味での固有性は従わない．(例えば開埋め込み $\mathcal{D}^\times \to \mathcal{D}$ は部分的固有だが切断 $\bar{\varphi} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}^\times$ は存在しない．)

固有値多様体の固有性について知られている結果はこれまで，Coleman-Mazur 固有値曲線 $\mathcal{C}_N$ の場合に限られていた．考えるべきモジュラー曲線の種数が 0 の場合は，過収束保型形式の空間の基底や U_p の作用を具体的に書き下すことができる．これを用いて Buzzard-Calegari [BuC] は，$N = 1$ かつ $p = 2$ の場合に $\mathcal{C}_N$ の固有性を示した．他の場合にはそのような手法は使えないが，Calegari [Cal] は [BuC] の一部の議論を一般化することで，任意の N と p に対して $\mathcal{C}_N$ の**整数重さでの固有性**を示した．つまり，重さ指標 $\psi(O)$ が整数 k に対する代数的指標 $t \mapsto t^k$ と一致する場合に，条件を満たす射 $\bar{\varphi} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}_{N,\mathbb{C}_p}$ の存在を証明した．

一方で Diao-Liu [DL] は，射 $\varphi : \mathcal{D}^\times \to \mathcal{C}_{N,\mathbb{C}_p}$ が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大上定義されている場合に $\bar{\varphi}$ の存在を示した．これにより $\mathcal{C}_N$ の固有性はほぼ証明されたと言える．彼らの証明は族の p 進 Hodge 理論を用いるもので，$\mathcal{C}_N$ の正規化 $\tilde{\mathcal{C}}_N$ 上に，(擬表現ではなく）$\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{C}}_N)$ 上階数 2 の Galois 表現で各古典的点では保型形式に伴う p 進 Galois 表現を与えるようなもの，が存在することが鍵になっている．ところが，このような大域的な Galois 表現の存在は一次元の場合にしか知られておらず，現時点ではこの証明を高次元に一般化することはできないようだ．本稿の主定理は，[BuC, Cal] のアイデアを一般化することにより，Hilbert 保型形式に対する高次元の固有値多様体の整数重さでの固有性を（p に関する条件のもとで）証明するものである．

主定理を述べる前に，固有値多様体の固有性の応用を一つ挙げておく．肥田族は $\mathcal{C}_N$ の既約成分と見なせるが，同様に他の既約成分も固有形式の何らかの p 進族であると見なせる．構造射 $\mathcal{C}_N \to \mathcal{W}$ は無限次数であり，$\mathcal{C}_N$ の既約成分が $\mathcal{W}$ 上有限次数であることも無限次数であることも起こり得る．(例えば肥田族は $\mathcal{W}$ 上有限な既約成分であり，従って有限次数である．）実は，Diao-Liu の固有性を用いると次のことが証明できる．

定理 1.14. （[HN]）$\mathcal{C}_N$ の既約成分で $\mathcal{W}$ 上有限次数のものは $\mathcal{W}$ 上有限である．

このことが $\mathcal{C}_N$ の固有性から従うことは Chenevier によって予想されていたことであり [Che, Chapitre 1, §3.7]，代数幾何・p 進解析幾何における「固有かつ準有限は有限」という標準的な事実の類似とも見なせる．さらに Chenevier [Che, *loc. cit.*] によれば，**Buzzard-Kilford 予想**から $\mathcal{C}_N$ の既約成分で $\mathcal{W}$ 上有限なものは全て傾き 0 の p 進族であることが従う．Buzzard-Kilford 予想とは，固有形式の重さが重さ空間 $\mathcal{W}$（これは単位開円盤の有限直和だった）の境界に近付くとき傾きは 0 に収束するだろう，という主張であり，多くの場合に正しいことが知られている [BK, LWX]．従って上の定理は，$\mathcal{C}_N$ の既約成分で $\mathcal{W}$ 上有限次数のものは多くの場合（Buzzard-Kilford 予想を仮定すれば全ての場合）に傾き 0 である，ということを意味している．これも Coleman-Mazur が提出した問いの一つだった [CM, p. 5]．

2 主定理

2.1 Hilbert 保型形式の場合

F を次数 g の総実代数体とする．Coleman-Mazur 固有値曲線は傾き有限な楕円固有形式のモジュライ空間だったが，F 上の Hilbert 固有形式で傾きが有限なもののモジュライ空間に当たる **Hilbert 固有値多様体**の存在が知られている．Hilbert 固有値多様体の構成法も複数あるが，ここでは Andreatta-Iovita-Pilloni [AIP1] による Hilbert-Blumenthal モジュライ空間を用いた構成を採用する．

有限次拡大 $K/\mathbb{Q}_p$ で，K 代数 $F \otimes_{\mathbb{Q}} K$ が K の g 階直積と同型になるものを固定する．$G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(GL_2)$ と $\mathbb{T} = \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ に対し，G の重さ空間 $\mathcal{W}^G$ として

$$\mathcal{W}^G(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(\mathbb{T}(\mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times)$$

と同一視できるような K 上のリジッド解析多様体を考える．($\mathcal{W}^G$ は $g+1$ 次元単位開円盤の有限個の直和である.）$\mathcal{W}^G(\mathbb{C}_p)$ の元は，二つの指標

$$\nu : \mathbb{T}(\mathbb{Z}_p) = (\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)^\times \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times, \quad w : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$$

の組 (ν, w) で与えられる．

注 2.1. 重さ指標として ν だけでなく組 (ν, w) を考えるのは，古典的な Hilbert 保型形式の重さが，$g+1$ 個の整数の組 $(k_1, \ldots, k_g, w)$ で任意の i に対し k_i と w の偶奇が同じもの，として与えられることに対応している．G から定まる志村多様体 $\mathrm{Sh}(G, X)$（Hilbert モジュラー多様体）上には，このような組を重さとする古典的 Hilbert 保型形式を与える保型線束が存在する．ここから §1 のように，Abel 多様体の標準部分群を用いて過収束 Hilbert 保型形式の概念を定義したいが，問題は $F \neq \mathbb{Q}$ のとき，$\mathrm{Sh}(G, X)$ は Abel 多様体の粗（coarse）モジュライに過ぎず，Abel 多様体の精（fine）モジュライになるのは $G^\star = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(GL_2) \times_{\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}})} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ から定まる志村多様体 $\mathrm{Sh}(G^\star, X^\star)$ の方（Hilbert-Blumenthal モジュライ空間）だということである．そこで，過収束 Hilbert 保型形式の定義のためには，一旦 $\mathrm{Sh}(G^\star, X^\star)$ 上で過収束保型形式の定義を行い，総正な単数の群 $\mathcal{O}_F^{\times,+}$ の自然な作用での固定部分を取ることで G 上に移行する，という手段を採る．

$N \geq 4$ を p と素な整数とする．このとき，等次元 $g+1$ のリジッド解析多様体 $\mathcal{E}_N$ と射 $\kappa : \mathcal{E}_N \to \mathcal{W}^G$ で次を満たすものが構成できる：任意の $x \in \mathcal{W}^G(\mathbb{C}_p)$ に対しファイバー $\kappa^{-1}(x)$ は，重さ x，従順レベル N の過収束 Hilbert 正規尖点固有形式で U_p の傾きが有限であるもの全体の集合と同一視できる．$\mathcal{E}_N$ が Andreatta-Iovita-Pilloni [AIP1] の（尖点的）Hilbert 固有値多様体である．

2.2 Hilbert 固有値多様体の整数重さでの固有性

本稿の主定理は次のものである．

定理 2.2. （[Hat2], Theorem 1.1）F は奇素数 p 上不分岐で，かつ p を割る F の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し，$\mathfrak{p}$ における剰余次数 $f_{\mathfrak{p}}$ が 1 か 2 だとする．このとき，F 上の Hilbert 保型形式に関する Hilbert 固有値多様体 $\mathcal{E}_N$ は整数重さで固有である．つまり，任意の射 $\varphi : \mathcal{D}^\times \to \mathcal{E}_{N,\mathbb{C}_p}$ は，$\kappa \circ \varphi : \mathcal{D}^\times \to \mathcal{W}^G_{\mathbb{C}_p}$ の唯一の延長 $\psi : \mathcal{D} \to \mathcal{W}^G_{\mathbb{C}_p}$ による原点の像 $\psi(O)$ が代数的指標 $\mathbb{T} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ に対応しているとき，射 $\bar{\varphi} : \mathcal{D} \to \mathcal{E}_{N,\mathbb{C}_p}$ に延長される．

注 2.3. 高次元の固有値多様体について次元以外の大域的な性質が分かったのは（筆者の知る限り）これが最初のようだ．また，任意の代数群に対し固有値多様体が固有であると強く期待する理由は今の所なさそうだが，少なくともこの定理によって Hilbert 固有値多様体の場合には状況証拠が与えられたことになる．一方で，整数重さでの固有性だけでは（例えば [HN] のような）数論的により興味のある主張は示せそうにない．

注 2.4. $p = 2$ の時には，2 が F で完全分解なら少し弱い結果を証明できる．$p = 2$ の場合に条件が必要なのは $1 + 2\mathbb{Z}_2$ がねじれ元 -1 を持つことに起因する事情で，整 p 進 Hodge 理論的な理由ではない．

注 2.5. F が p 上不分岐であるという仮定は，最近研究が進んでいる Pappas-Rapoport の分裂モデルを用いれば外せるかもしれない．一方で，剰余次数の仮定は本質的である（注 3.6）．また，定理の証明は過収束保型形式の解析接続性の分析に基づいており，そのために固有値多様体への射 φ から過収束保型形式の族を構成する必要がある．そこに Hecke 固有値系と正規固有形式の概念が一致することを用いるので，証明の手法を GL_2 以外の代数群に一般化するのは難しそうだ．

3 証明の概略

以下 F は奇素数 p 上で不分岐とし，$\mathcal{D}_F$ で $F/\mathbb{Q}$ の共役差積を表す．F の狭義類群 Cl_F^+ の完全代表系 $[\mathrm{Cl}_F^+]$ で p と素なイデアルからなり $\mathcal{O}_F$ を含むものを固定する．

3.1 Hilbert-Blumenthal Abel 多様体

過収束楕円保型形式の定義には楕円曲線のモジュライ空間であるモジュラー曲線が用いられたが，過収束 Hilbert 保型形式を定義するにはその高次元化に当たる **Hilbert-Blumenthal Abel 多様体**（以下 **HBAV** と略す）のモジュライ空間を用いる．

S を $\mathcal{O}_K$ 上のスキームとする．S 上の HBAV とは，S 上の Abel スキーム A と，環準同型 $\iota : \mathcal{O}_F \to \mathrm{End}_S(A)$，$F$ の 0 でない分数イデアル $\mathfrak{c}$ に対する $\mathcal{O}_F$ 同変な同型 $\lambda : A \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathfrak{c} \to A^\vee$， S 上の群スキームの閉埋め込み $i : \mathcal{D}_F^{-1} \otimes \mu_N \to A$ の組 (A, ι, λ, i) で適切な条件を満たすものである．上のような λ を $\mathfrak{c}$ 偏極（$\mathfrak{c}$-polarization），i をレベル $\Gamma_{00}(N)$ 構造と呼ぶ．S 上の $\mathcal{O}_F$ 作用，$\mathfrak{c}$ 偏極，レベル $\Gamma_{00}(N)$ 構造付き HBAV の同型類は $\mathcal{O}_K$ 上準射影的スムーズなスキーム $M(\mu_N, \mathfrak{c})$ を精モジュライとして持つ．各カスプに対し適切な錐体分解を固定することで，$M(\mu_N, \mathfrak{c})$ の $\mathcal{O}_K$ 上射影的スムーズなトロイダルコンパクト化 $\bar{M}(\mu_N, \mathfrak{c})$ を得る．$\bar{M}(\mu_N, \mathfrak{c})$ の上には普遍的 HBAV と Tate 対象との貼り合わせで得られる半 Abel スキーム $\bar{A}^{\mathrm{un}}$ が存在する．また，$D = \bar{M}(\mu_N, \mathfrak{c}) \setminus M(\mu_N, \mathfrak{c})$ を境界因子とする．$\bar{M}(\mu_N, \mathfrak{c})$ に伴う K 上のリジッド解析多様体を $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})$ と書く．

F から K への体の埋め込み全体の集合を $\mathbb{B}$ で表わし，その中で素イデアル $\mathfrak{p} \mid p$ での完備化 $F_\mathfrak{p}$ を通るもの全体のなす部分集合を $\mathbb{B}_\mathfrak{p}$ と書く．F が p 上不分岐という仮定から，各 $\mathbb{B}_\mathfrak{p}$ には p 乗 Frobenius 写像（の持ち上げ）σ が自然に作用する．このとき，HBAV A の $\mathcal{O}_F$ 作用により，A の Hodge 高さ $\mathrm{Hdg}(A)$ は各 $\beta \in \mathbb{B}$ ごとのより精密な不変量 $\mathrm{Hdg}_\beta(A) \in [0,1]$ の和に分解される：

$$\mathrm{Hdg}(A) = \min\{1, \sum_{\beta \in \mathbb{B}} \mathrm{Hdg}_\beta(A)\}.$$

Hdg_β は $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})$ 上の関数に適切に拡張され，モジュラー曲線の場合と同様に，任意の有理数 $v \geq 0$ に対し

$$\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})(v) = \{y \in \bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c}) \mid \mathrm{Hdg}_\beta(y) \leq v \ (\forall \beta \in \mathbb{B})\}$$

と定義する．これは $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})$ の許容開集合である．

$G^\star$ の重さ空間 $\mathcal{W}^{G^\star}$ を，

$$\mathcal{W}^{G^\star}(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(\mathbb{T}(\mathbb{Z}_p), \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times)$$

を満たす K 上のリジッド解析多様体とする．重さ指標 $(\nu, w) \in \mathcal{W}^G(\mathbb{C}_p)$ の過収束 Hilbert 保型形式を定義するためには，まず重さ指標 $\kappa \in \mathcal{W}^{G^\star}(\mathbb{C}_p)$ に対する $G^\star$ 上の過収束保型形式を定義する必要がある．そのうえで，$\kappa(t) = \nu(t)^2 w(N_{F/\mathbb{Q}}(t))$ で定まる κ を重さ指標とする $G^\star$ 上の過収束保型形式の中で自然な $\mathcal{O}_F^{\times,+}$ 作用で固定されるもの，として重さ指標 (ν, w) の過収束 Hilbert 保型

形式を定義する．重さ指標 (ν, w) が代数的指標なら，対応する κ もそうであり，従って整数の組 $(k_\beta)_\beta \in \mathbb{Z}^{\mathbb{B}}$ と対応する．この場合は保型線束として古典的な層 $\Omega^\kappa = \bigotimes_{\beta\in\mathbb{B}} \omega_{\bar{A}^{\mathrm{un}},\beta}^{\otimes k_\beta}$ を採用すれば，重さ指標 κ に対する $G^\star$ 上の過収束保型形式の空間を $\bigcup_{v>0} H^0(\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})(v)_{\mathbb{C}_p}, \Omega^\kappa)$ として定義できる．特に，この場合の保型線束は $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})_{\mathbb{C}_p}$ 全体で定義される．問題は (ν, w) が代数的でない場合であり，ここに**高次元標準部分群**の理論が必要になる．

3.2 HBAV の標準部分群と過収束 Hilbert 保型線束

定理 3.1. （[GK]）L/K を有限次拡大とし，A を $\mathcal{O}_L$ 上の HBAV，$\mathfrak{p} \mid p$ を F の素イデアル，$n > 0$ を整数とする．任意の $\beta \in \mathbb{B}_\mathfrak{p}$ に対し

$$\mathrm{Hdg}_\beta(A) + p\mathrm{Hdg}_{\sigma^{-1}\circ\beta}(A) < p^{2-n} \tag{3.1}$$

が成り立つと仮定する．このとき，$A[\mathfrak{p}^n]$ に $\mathcal{O}_L$ 上階数 $p^{nf_\mathfrak{p}}$ の有限平坦閉部分 $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$ 加群スキーム $\mathcal{C}_{n,\mathfrak{p}}$ が存在して，他の閉部分群スキームと区別できる性質を持つ．$\mathcal{C}_{n,\mathfrak{p}}$ を $A[\mathfrak{p}^n]$ の標準部分群と呼ぶ．また，条件が任意の $\mathfrak{p} \mid p$ で満たされるときは，$\mathcal{C}_n = \bigoplus_{\mathfrak{p}|p} \mathcal{C}_{n,\mathfrak{p}}$ を $A[p^n]$ の標準部分群と呼ぶ．

「他のものと区別できる性質」については詳しく述べないが，例えば $\mathcal{C}_{1,\mathfrak{p}}$ は次の性質を持つ．$\mathcal{O}_L$ 上階数 $p^{f_\mathfrak{p}}$ の有限平坦閉部分 $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$ 加群スキーム $\mathcal{H} \subseteq A[\mathfrak{p}]$ で $\mathcal{H}_L \cap \mathcal{C}_{1,\mathfrak{p},L} = 0$ を満たすものに対し，

$$\mathrm{Hdg}_\beta(A/\mathcal{H}) = \frac{1}{p}\mathrm{Hdg}_{\sigma\circ\beta}(A) \tag{3.2}$$

であり，$A[\mathfrak{p}]/\mathcal{H}$ は $(A/\mathcal{H})[\mathfrak{p}]$ の標準部分群である．楕円保型形式の場合と同様にこの性質が，過収束 Hilbert 保型形式の空間における U_p 作用素のコンパクト性や，傾き有限の過収束 Hilbert 保型形式が $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})$ 上の大きな領域にまで解析接続されることを保証する．

過収束保型線束の定義においては，標準部分群と **Hodge-Tate 写像**との関係が重要になる．$\mathcal{G}$ を環 R 上の p^n で消える有限平坦群スキームとし，$\mathcal{G}^\vee$ で $\mathcal{G}$ の Cartier 双対を表す．$\mathcal{G}^\vee$ の不変微分形式の加群を $\omega_{\mathcal{G}^\vee}$ と書く．任意の R 代数 R' に対し，$\mathcal{G}^\vee$ は同型

$$\mathcal{G}(R') \simeq \mathrm{Hom}_{R'\text{-gp.}}(\mathcal{G}^\vee_{R'}, \mu_{p^n,R'})$$

を与えるので，準同型

$$\mathrm{HT}_\mathcal{G} : \mathcal{G}(R') \to \omega_{\mathcal{G}^\vee} \otimes_R R', \quad x \mapsto x^*(\frac{dT}{T})$$

が定まる．これを Hodge-Tate 写像と呼ぶ．

命題 3.2. （[Hat3, Theorem 8.1]）$v = \max\{\mathrm{Hdg}_\beta(A) \mid \beta \in \mathbb{B}\}$ とおく．このとき，$v < (p-1)/p^n$ なら次が成立する．

1. Hodge-Tate 写像 $\mathrm{HT}_{\mathcal{C}_n^\vee} : \mathcal{C}_n^\vee(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}} \to \omega_{\mathcal{C}_n} \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}}$ の余核は $m_{\bar{K}}^{\geqslant v/(p-1)}$ で消える．
2. $i \leq n - v(p^n-1)/(p-1)$ なら，自然な写像 $\omega_A \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,i} \to \omega_{\mathcal{C}_n} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{L,i}$ は同型．

注 3.3. 証明には，[Hat1] とそれを一般化した [Tia] で用いられた，有限平坦群スキームの Breuil-Kisin 分類を用いた標準部分群の構成法を用いる．Hdg_β ではなく Hdg に関する条件を課せば，これは（$p > 2$ なら）Fargues の標準部分群の理論 [Far] からも従うが，その場合保型線束の定義域が小さくなり，$p < 5$ の場合が主定理から除かれる．

命題 3.2 を用いると，F が p 上不分岐な場合に，[AIP1] における過収束 Hilbert 保型線束の定義域を $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N,\mathfrak{c})(\frac{1}{p+1})$ に拡張することができる．[AIP1] の構成を説明するために，まず重さ指標 $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ の p 進楕円保型形式の定義について述べる．E を $\mathcal{O}_L$ 上の通常楕円曲線とすると，任意の n に対し $E[p^n]$ は標準部分群 $\mathcal{C}_n = E[p^n]^0$ を持つ．命題 3.2 に対応するこの場合の（以前から知られていた）主張は，Hodge-Tate 写像が「Betti 対 de Rham」の比較同型

$$\mathcal{C}_n^\vee(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}} \simeq \omega_E \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\bar{K},n}$$

を引き起こすということである．右辺（de Rham 側）を $n \to \infty$ とすれば ω_E の情報，従って保型形式を復元できるので，左辺（Betti 側）の極限を考えても何らかの保型形式が定義できそうに思える．実際，$x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対し，通常跡 $X_1(N)(0)_{\mathbb{C}_p}$ の形式モデル $\mathfrak{X} = X_1(N)(0)^\wedge_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$ 上に標準部分群の族 $\mathfrak{C}_n$ と，$\mathfrak{X}$ 上 Galois 群 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ を持つ Galois 被覆 $\mathfrak{M}_n = \mathrm{Isom}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathfrak{C}_n^\vee)$ を考えると，$\varinjlim \mathcal{O}(\mathfrak{M}_n)$ の p 進完備化 V には $\mathbb{Z}_p^\times$ が作用する．そこで，$V[1/p]$ の中で $\mathbb{Z}_p^\times$ が指標 x で作用する部分を，重さ指標 x の p 進保型形式の空間と定義する．($\varprojlim_n \mathfrak{M}_n$ は**井草塔** (Igusa tower) と呼ばれる.)

過収束保型形式を定義するには $X_1(N)(0)$ ではなく $r > 0$ に対する $X_1(N)(r)$ を考えなければならないが，問題はその場合，$X_1(N)(r)$ 上に標準部分群は $1/(p^{n-2}(p-1)) > r$ を満たす n に関する $\mathcal{C}_n$ しか存在できない，ということである．従って，上の構成で $n \to \infty$ とすることはできず，このままでは de Rham 側の情報を復元できない.

これに対する Pilloni [Pil] のアイデアは次のようなものである．まず，重さ指標 $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に依存して決まる $n_x > 0$ に対し，$X_1(N)(r_x)$ 上に命題 3.2（に相当する楕円曲線についての主張）を満たすレベル n_x の標準部分群の族 C_{n_x} が存在するような r_x を取り，$X_1(N)(r_x)$ の Galois 被覆 $M_{n_x} = \mathrm{Isom}(\mathbb{Z}/p^{n_x}\mathbb{Z}, C_{n_x}^\vee)$ を考える．M_{n_x} は楕円曲線 E の標準部分群（の双対）$\mathcal{C}_{n_x}^\vee$ の自明化を分類するリジッド解析多様体だが，これだけでは de Rham 側の情報を復元できない．そこで，命題 3.2（に相当する楕円曲線についての主張）を用いて，この自明化の Hodge-Tate 写像による像の ω_E への持ち上げを分類する捻子 $\mathcal{IW} \to M_{n_x}$ を構成する．$\pi : \mathcal{IW} \to X_1(N)(r_x)$ には $\mathbb{Z}_p^\times$ が作用するので，$\pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{IW}_{\mathbb{C}_p}})$ における x 同変部分を，重さ指標 x の過収束保型線束 ω^x と定義する．$\mathcal{IW}$ は井草塔の構成が $n \to \infty$ の途中でできなくなる代わりに de Rham 側の情報を補ったものである.

Hilbert 保型形式の場合もこれと同じ構成によって，$\bar{\mathcal{M}}(\mu_N,\mathfrak{c})$ の許容開集合上に，$\mathbb{T}(\mathbb{Z}_p)$ が作用する捻子 $\mathcal{IW}_\mathfrak{c}$ と，重さ指標 $x \in \mathcal{W}^{G^\star}(\mathbb{C}_p)$ に対する過収束 Hilbert 保型線束 $\Omega_\mathfrak{c}^x$ を定義することができる．構成から分かるように，$\Omega_\mathfrak{c}^x$ は $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N,\mathfrak{c})_{\mathbb{C}_p}$ の中で命題 3.2 が成立する領域で定義されるもので，x が 1 **解析的**（1-analytic）という条件を満たす場合は，定義域が $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N,\mathfrak{c})(\frac{1}{p+1})_{\mathbb{C}_p}$ を含む．x が代数的指標の場合は，古典的な保型線束の制限と $\Omega_\mathfrak{c}^x$ が一致することを示せるので，定義域は全体になる．被約アフィノイド代数 R を終域に持つ重さ指標 $x : \mathbb{T}(\mathbb{Z}_p) \to R^\times$ の場合も，同様の構成で $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N,\mathfrak{c})(r_x) \times \mathrm{Sp}(R)$ 上の過収束 Hilbert 保型形式の層を定義できる.

古典的な Hilbert 保型形式は，狭義類群 Cl_F^+ で添え字付けられた連結成分ごとの関数の組として定義されていた．同様に，重さ指標 $(\nu, w) \in \mathcal{W}^G(\mathbb{C}_p)$ に対する過収束 Hilbert 尖点形式のなす加群が，(ν, w) に対応する $\kappa \in \mathcal{W}^{G^\star}(\mathbb{C}_p)$ を用いて，$\bigoplus_{\mathfrak{c}\in[\mathrm{Cl}_F^+]} H^0(\Omega_\mathfrak{c}^\kappa(-D))$ における $\mathcal{O}_F^{\times,+}$ の自然な作用での固定部分，として定義される.

3.3 臨界跡の分析

定理 2.2 の証明の鍵になるのは，**臨界的**（critical）な HBAV の部分群の分析であり，ここに剰余次数 $f_{\mathfrak{p}}$ に関する仮定が必要になる．

定義 3.4. 完備付値体の拡大 L/K に対し，$\mathcal{O}_L$ 上の HBAV が臨界的とは，任意の $\beta \in \mathbb{B}$ に対し $\mathrm{Hdg}_\beta(A) = p/(p+1)$ が成立することを言う．条件が任意の $\beta \in \mathbb{B}_{\mathfrak{p}}$ で成立するとき，A は $\mathfrak{p}$ 臨界的（$\mathfrak{p}$-critical）であると言う．

臨界的な HBAV には標準部分群が存在しないが，$\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})$ の中で標準部分群が存在する領域の突端に接して位置しており，標準部分群が存在するものに最も近いクラスの HBAV と考えられる．臨界的 HBAV については次が成立する．

命題 3.5. （[Hat3], Proposition 6.1）$\mathfrak{p} \mid p$ を F の素イデアルで $f_{\mathfrak{p}} \leq 2$ を満たすもの，L/K を有限次拡大，A を $\mathcal{O}_L$ 上の $\mathfrak{p}$ 臨界的な HBAV とする．$\mathcal{H} \subseteq A[\mathfrak{p}]$ を $\mathcal{O}_L$ 上階数 $p^{f_{\mathfrak{p}}}$ の有限平坦閉部分 $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$ 加群スキームとする．このとき，任意の $\beta \in \mathbb{B}_{\mathfrak{p}}$ に対し $\mathrm{Hdg}_\beta(A/\mathcal{H}) = 1/(p+1)$ が成立し，$A[\mathfrak{p}]/\mathcal{H}$ は $(A/\mathcal{H})[\mathfrak{p}]$ の標準部分群になる．

この命題は，$\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})(\frac{1}{p+1})_{\mathbb{C}_p}$ 上定義された過収束 Hilbert 保型形式 f に対し，その U_p 作用素による像 $U_p(f)$ が，臨界的 HBAV とその階数 p^g の巡回部分 $\mathcal{O}_F$ 加群スキーム $\mathcal{H}$ の組 $(A, \mathcal{H})$ に対応する点で定義されることを意味している．

注 3.6. 剰余次数 3 の場合には，頂切 Barsotti-Tate $\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}}$ 加群での対応する主張に反例があり [Hat3, Remark 6.2]，HBAV の場合も成立しないと思われる．剰余次数 2 が限界なのは，標準部分群の存在条件 (3.1) が Hdg_β とその一つ隣の Hdg_β とを組にした形で書かれているため，Hdg_β が三つ出てくる場合には三つ目が統制できなくなる，という事情による．

3.4 主定理の証明

以上の準備の下で，定理 2.2 の証明の方針を説明する．証明の中心的原理は次のもので，楕円保型形式の場合に [BuC, Cal] で用いられた原理の Hilbert 保型形式への一般化に当たる．

> 整数重さの過収束 Hilbert 正規尖点固有形式は，傾き有限なら $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})(\frac{1}{p+1})_{\mathbb{C}_p}$ にまで解析接続されるが，傾き無限なら $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N, \mathfrak{c})(\frac{1}{p+1})_{\mathbb{C}_p}$ には解析接続されない．

まず，必要なら $\mathcal{D}$ の半径を小さくして，$\psi : \mathcal{D} \to \mathcal{W}^G_{\mathbb{C}_p}$ が 1 解析的であるとしてよい．

ステップ 1　Deligne-Serre 持ち上げ

与えられた $\varphi : \mathcal{D}^\times \to \mathcal{E}_{N,\mathbb{C}_p}$ に対し，$\mathcal{D}^\times$ の許容アフィノイド被覆 $\mathcal{D}^\times = \bigcup_{i \in I} U_i$ と，重さ指標 $U_i \to \mathcal{W}^G_{\mathbb{C}_p}$ に対する傾き有限の過収束 Hilbert 正規尖点固有形式 f_i が存在して，$\varphi|_{U_i}$ が f_i の与える Hecke 固有値系で定まることを示す．証明は，法 p 固有形式を標数 0 の固有形式に持ち上げる Deligne-Serre の補題 [DS, Lemme 6.11] の証明で用いられた手法による．つまり，適切な Hecke 環の極小素イデアル P が，保型形式の適切な加群 N の台に入ることを示すことで，$P = \mathrm{Ann}(h)$ を満たす $h \in N$ の存在を保証する．h から求める固有形式が構成できる．過収束 Hilbert 保型形式の定義から，各 f_i は $\bigoplus_{\mathfrak{c} \in [\mathrm{Cl}^+_F]} \mathcal{O}(\mathcal{IW}_{\mathfrak{c},\mathbb{C}_p} \times U_i)$ の元で，重さ指標についての適切な変換性を満たし $\mathcal{O}_F^{\times,+}$ で固定され境界因子で消えるもの，と解釈できる．

ステップ 2　U_p による解析接続

(3.2) により，U_p 作用素は過収束 Hilbert 固有形式の過収束性を向上する．このことを用いると，傾き有限の過収束 Hilbert 固有形式 f_i を過収束保型線束の定義域全体にまで解析接続することができる．特に，f_i は各連結成分では $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N,\mathfrak{c})(\frac{1}{p+1})_{\mathbb{C}_p}\times U_i$ 上で定義されているとしてよい．

ステップ 3　q 展開による貼り合わせ

f_i は正規尖点形式だが，その全ての Hecke 固有値は φ によって指定されている．従って，弱重複度 1 定理（の p 進版，つまり p 進 Hilbert 正規尖点固有形式が Hecke 固有値系と重さ指標で決まること）により f_i と f_j は $U_i\cap U_j$ で一致する．このことから $\{f_i\}_{i\in I}$ は貼り合わさって $\bigoplus_{\mathfrak{c}\in[\mathrm{Cl}_F^+]}\mathcal{O}(\mathcal{IW}_{\mathfrak{c},\mathbb{C}_p}\times\mathcal{D}^\times)$ の元 $f=(f_\mathfrak{c})_{\mathfrak{c}\in[\mathrm{Cl}_F^+]}$ を与えることが分かる．

ステップ 4　O での特異点除去

f が $\bigoplus_{\mathfrak{c}\in[\mathrm{Cl}_F^+]}\mathcal{O}(\mathcal{IW}_{\mathfrak{c},\mathbb{C}_p}\times\mathcal{D})$ の元で O では消えないものに延長されることを示す．（これも $f=(f_\mathfrak{c})_{\mathfrak{c}\in[\mathrm{Cl}_F^+]}$ と書く．）$\mathcal{D}^\times$ 上で重さ指標の変換性などを満たすことから，延長された f は $\mathcal{D}$ 上の重さ指標 $\psi:\mathcal{D}\to\mathcal{W}^G_{\mathbb{C}_p}$ に対する過収束 Hilbert 正規尖点固有形式を定める．

f が延長されるのは「$\mathcal{D}^\times$ 上の有界関数は $\mathcal{D}$ に延長される」という事実（複素解析での除去可能特異点に関する Riemann の定理の類似）の帰結であり，有界性は過収束 Hilbert 正規尖点固有形式の任意の Hecke 固有値が $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ の元であることから従う．必要なら O での素元で割ることで f が O で消えないようにできる．

f は固有値多様体への射 $\varphi:\mathcal{D}^\times\to\mathcal{E}_{N,\mathbb{C}_p}$ から構成したので，$\mathcal{D}^\times$ 上は傾き有限である．従って，f の O での特殊化 $f(O)$ が傾き有限であることさえ示せば，f の Hecke 固有値系を考えることで求める射 $\bar{\varphi}:\mathcal{D}\to\mathcal{E}_{N,\mathbb{C}_p}$ を得られる．$\psi(O)$ に関する仮定より，$f(O)$ は整数重さの過収束 Hilbert 正規尖点固有形式で，各連結成分では $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N,\mathfrak{c})(\frac{1}{p+1})_{\mathbb{C}_p}$ 上定義されている．

ステップ 5　臨界点の絶対連結近傍

$\bar{\mathcal{M}}(\mu_N,\mathfrak{c})$ の良還元部分を $\mathcal{X}_\mathfrak{c}$，$\bar{\mathcal{M}}(\mu_N,\mathfrak{c})(\frac{1}{p+1})$ の良還元部分を $\mathcal{X}_\mathfrak{c}(\frac{1}{p+1})$ と書く．レベル $\Gamma_0(p)$ に相当する $\mathcal{X}_\mathfrak{c}$ の被覆を $\mathcal{Y}_\mathfrak{c}$ と書き，$\mathcal{X}_\mathfrak{c}(\frac{1}{p+1})$ の逆像を $\mathcal{Y}_\mathfrak{c}(\frac{1}{p+1})$ と書く．標準部分群が被覆 $\mathcal{Y}_\mathfrak{c}(\frac{1}{p+1})\to\mathcal{X}_\mathfrak{c}(\frac{1}{p+1})$ の切断 s を与える．s による像 $\mathcal{S}=s(\mathcal{X}_\mathfrak{c}(\frac{1}{p+1}))$ は，適当な有限次拡大 L/K に対する $\mathcal{O}_L$ 上の HBAV A と，A の階数 p^g の有限平坦巡回閉部分 $\mathcal{O}_F$ 加群スキーム $\mathcal{H}$ の組 $(A,\mathcal{H})$（の同型類）で，任意の $\beta\in\mathbb{B}$ に対し $\mathrm{Hdg}_\beta(A)\leq 1/(p+1)$ であり，かつ $\mathcal{H}$ が $A[p]$ の標準部分群であるようなもの全体，と同一視される．s によって $f_\mathfrak{c}(O)$ を古典的保型線束の $\mathcal{S}_{\mathbb{C}_p}$ 上の切断と考える．

L/K を有限次拡大，A を $\mathcal{O}_L$ 上の臨界的 HBAV，$\mathcal{H}$ を A の階数 p^g の有限平坦巡回閉部分 $\mathcal{O}_F$ 加群スキームとする．$y=(A,\mathcal{H})$ は $\mathcal{Y}_\mathfrak{c}(\mathbb{C}_p)$ の元を定める．このとき，$\mathcal{Y}_{\mathfrak{c},\mathbb{C}_p}$ における y の連結なアフィノイド許容開近傍 $V_{y,\mathbb{C}_p}$ で，

1. $V_{y,\mathbb{C}_p}$ は $\mathcal{S}_{\mathbb{C}_p}$ と交わる
2. K の有限次拡大の整数環上定義された任意の組 $(A',\mathcal{H}')\in V_{y,\mathbb{C}_p}$ と，$\mathcal{L}\subseteq A'[p]$ で $\mathcal{H}'_{\mathbb{C}_p}\cap\mathcal{L}_{\mathbb{C}_p}=0$ を満たすものに対し，$(A'/\mathcal{L},A'[p]/\mathcal{L})$ は $\mathcal{S}_{\mathbb{C}_p}$ に入る

の二条件を満たすものを，$\mathcal{Y}_{\mathfrak{c}}$ の整モデルの完備局所環の記述 [Sta] を用いて構成する．構成のうち，二つの条件を満たすように取れるのは標準部分群の理論と命題 3.5 から従う．連結性は $V_{y,\mathbb{C}_p}$ の還元を具体的に計算することで証明する．

ステップ 6　組み合わせ論

$f_{\mathfrak{c}}(O)$ の定義域は $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N,\mathfrak{c})(\frac{1}{p+1})_{\mathbb{C}_p}$ を含むので，$V_{y,\mathbb{C}_p}$ に関する二つ目の条件から $U_p(f_{\mathfrak{c}}(O))$ が $V_{y,\mathbb{C}_p}$ 上で定義できることを示せる．（ここで，整数重さの仮定より重さ指標 $\psi(O)$ の保型線束が $\bar{\mathcal{M}}(\mu_N,\mathfrak{c})$ 全体で定義できることを使っている．）もし $f(O)$ が傾き無限だったとすると，$U_p(f_{\mathfrak{c}}(O))$ は $\mathcal{S}_{\mathbb{C}_p}$ では 0 である．$V_{y,\mathbb{C}_p}$ に関する一つ目の条件と連結性より，$U_p(f_{\mathfrak{c}}(O))$ は $V_{y,\mathbb{C}_p}$ 全体で 0 である．従って，$y=(A,\mathcal{H})$ で特殊化すると 0 になる．つまり次の式が成り立つ．

$$\sum_{\mathcal{D}_L\cap\mathcal{H}_L=0} f_{\mathfrak{c}}(O)(A/\mathcal{D},A[p]/\mathcal{D})|_{A_L}=0.$$

ここで，$\mathcal{H}$ を動かしてこの式を色々なやり方で足すことで十分多くの線型関係が生じ，結果的に $f_{\mathfrak{c}}(O)(A/\mathcal{H},A[p]/\mathcal{H})|_{A_L}=0$ となることを示す．ここから任意の $\mathfrak{c}\in[\mathrm{Cl}_F^+]$ に対し $f_{\mathfrak{c}}(O)=0$ であることが従うが，これは f が正規だったことに反し，定理 2.2 が証明される．

この部分の議論を，簡単のため楕円曲線の場合に説明する．（この場合は [BuC] による．）E を $\mathcal{O}_L$ 上の臨界的な楕円曲線とし，$g=f_{\mathfrak{c}}(O)$ とおく．E の階数 p の任意の部分群スキーム $\mathcal{H}$ に対し，

$$\sum_{\mathcal{D}_L\cap\mathcal{H}_L=0} g(E/\mathcal{D},E[p]/\mathcal{D})|_{E_L}=0 \tag{3.3}$$

が成り立つとする．これを全ての $\mathcal{H}$ について足すと，総和の中に各 $g(E/\mathcal{D},E[p]/\mathcal{D})|_{E_L}$ が丁度 p 回ずつ現れるから，総和は E の階数 p の任意の部分群スキーム $\mathcal{D}$ をわたる和

$$p\sum_{\mathcal{D}} g(E/\mathcal{D},E[p]/\mathcal{D})|_{E_L}=0$$

となる．(3.3) をここから引くと $g(E/\mathcal{H},E[p]/\mathcal{H})|_{E_L}=0$ が分かる．E が標準部分群 $\mathcal{C}_1$ を持つ場合は，$E[p]/\mathcal{C}_1$ が $E/\mathcal{C}_1$ の標準部分群になるとは限らないので $g(E/\mathcal{C}_1,E[p]/\mathcal{C}_1)$ を定義できず，等式 (3.3) が $\mathcal{H}=\mathcal{C}_1$ でしか成立しない．従って，全ての $\mathcal{H}$ に関する総和を考えるためには標準部分群を持たない E に特殊化する必要がある．HBAV の場合は，各素イデアル $\mathfrak{p}\mid p$ ごとに $\mathcal{H}$ の $\mathfrak{p}$ 部分を動かして総和を取ると，線型関係を十分作れて各項が 0 になることを示せる．

参考文献

[AIP1] F. Andreatta, A. Iovita and V. Pilloni: *On overconvergent Hilbert modular cusp forms*, Astérisque **382** (2016), 163–193.

[AIP2] F. Andreatta, A. Iovita and V. Pilloni: *Le halo spectral*, preprint.

[Bel1] J. Bellaïche: *Critical p-adic L-functions*, Invent. Math. **189** (2012), no. 1, 1–60.

[Bel2] J. Bellaïche: *Eigenvarieties, families of Galois representations, p-adic L-functions*, available at `http://people.brandeis.edu/~jbellaic/`.

[BeC] J. Bellaïche and G. Chenevier: *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque **324** (2009), xii+314 pp.

[Buz1] K. Buzzard: *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 29–55.

[Buz2] K. Buzzard: *Eigenvarieties*, L-functions and Galois representations, 59–120, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **320**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[BuC] K. Buzzard and F. Calegari: *The* 2*-adic eigencurve is proper*, Doc. Math. (2006) Extra Vol., 211–232.

[BK] K. Buzzard and L. J. P. Kilford: *The* 2*-adic eigencurve at the boundary of weight space*, Compos. Math. **141** (2005), 605-619.

[Cal] F. Calegari: *The Coleman-Mazur eigencurve is proper at integral weights*, Algebra Number Theory **2** (2008), no. 2, 209–215.

[Che] G. Chenevier: *Représentations galoisiennes automorphes et conséquences arithmétiques des conjectures de Langlands et Arthur*, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris XI (2013), available at `http://gaetan.chenevier.perso.math.cnrs.fr/pub.html`.

[CH] G. Chenevier and M. Harris: *Construction of automorphic Galois representations II*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 1, 53–73.

[Col] R. F. Coleman: *p-adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. Math. **127** (1997), no. 3, 417–479.

[CM] R. Coleman and B. Mazur: *The eigencurve*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 1–113, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **254**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[CS] R. Coleman and W. Stein: *Approximation of eigenforms of infinite slope by eigenforms of finite slope*, Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, 437–449, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.

[DL] H. Diao and R. Liu: *The eigencurve is proper*, Duke Math. J. **165**, no. 7 (2016), 1381–1395.

[DS] P. Deligne and J.-P. Serre: *Formes modulaires de poids 1*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 507–530 (1975).

[Eme] M. Emerton: *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Invent. Math. **164** (2006), no. 1, 1–84.

[Far] L. Fargues: *La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles, avec la collaboration de Yichao Tian*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **44** (2011), no. 6, 905–961.

[GK] E. Z. Goren and P. L. Kassaei: *Canonical subgroups over Hilbert modular varieties*, J. Reine Angew. Math. **670** (2012), 1–63.

[Gou] F. Q. Gouvêa: *Arithmetic of p-adic modular forms*, Lecture Notes in Mathematics **1304**, Springer-Verlag, Berlin (1988), viii+121 pp.

[Hat1] S. Hattori: *Canonical subgroups via Breuil-Kisin modules*, Math. Z. **274** (2013), no. 3–4, 933–953.

[Hat2] S. Hattori: *On a properness of the Hilbert eigenvariety at integral weights: the case of quadratic residue fields*, preprint.

[Hat3] S. Hattori: *On canonical subgroups of Hilbert-Blumenthal abelian varieties*, preprint.

[HN] S. Hattori and J. Newton: *Irreducible components of the eigencurve of finite degree are finite over the weight space*, in preparation.

[Hid] H. Hida: *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 2, 231–273.

[Kat] N. M. Katz: *p-adic properties of modular schemes and modular forms*, Modular functions of one variable III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 69–190. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **350**, Springer, Berlin, 1973.

[LWX] R. Liu, D. Wan and L. Xiao: *Eigencurve over the boundary of the weight space*, to appear in Duke Math. J.

[Loe] D. Loeffler: *Overconvergent algebraic automorphic forms*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **102** (2011), no. 2, 193–228.

[Pil] V. Pilloni: *Overconvergent modular forms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), no. 1, 219–239.

[Ser] J.-P. Serre: *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques*, Modular functions of one variable III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972), pp. 191–268. Lecture Notes in Math., Vol. **350**, Springer, Berlin, 1973.

[Sta] H. Stamm: *On the reduction of the Hilbert-Blumenthal-moduli scheme with $\Gamma_0(p)$-level structure*, Forum Math. **9** (1997), no. 4, 405–455.

[Tia] Y. Tian: *Classicality of overconvergent Hilbert eigenforms: case of quadratic residue degrees*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **132** (2014), 133–229.

[Urb] E. Urban: *Eigenvarieties for reductive groups*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 3, 1685–1784.

[Wil] A. Wiles: *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94** (1988), no. 3, 529–573.