Coleman-Mazur 固有値曲線の次数有限な既約成分は重さ空間上有限

服部 新
九州大学数理学研究院

平成 29 年 3 月 21 日

概 要

本稿では，2017 早稲田整数論研究集会における講演に基づき，Coleman-Mazur 固有値曲線の既約成分で重さ空間上次数有限のものは必ず重さ空間上有限になる，という結果 [HN] を紹介する．

1 背景

1.1 楕円保型形式

p を素数，$\mathbb{Q}_p$ を p 進数体とする．加法的 p 進付値 v_p を $v_p(p) = 1$ と正規化し，$\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}_p$ に拡張する．$\mathbb{C}_p$ で $\bar{\mathbb{Q}}_p$ の p 進完備化を表す．また，$a \in \mathbb{C}_p$ の p 進絶対値を $|a|_p = p^{-v_p(a)}$ で定める．また，$\bar{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{C}$ における $\mathbb{Q}$ の代数閉包とし，体の埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}_p$ を固定する．

$N \geq 1$ を p と素な整数とする．整数 $m > 0$ と整数 k，体の拡大 $E/\mathbb{Q}$ に対し，E 上定義されたレベル $\Gamma_1(Np^m)$，重さ k の楕円保型形式の空間を

$$M_k(\Gamma_1(Np^m))_E$$

で表す．$E = \mathbb{C}$ の場合が古典的な楕円保型形式の空間である．この空間には，各素数 l に対する Hecke 作用素 T_l（$l \nmid Np$），U_l（$l \mid Np$）と，$a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$，$b \in (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$ に対するダイヤモンド作用素 $\langle a \rangle_N$，$\langle b \rangle_{p^m}$ が作用する．これらの作用素全てについての同時固有ベクトルのことを**固有形式（eigenform）**と呼ぶ．

保型形式の p 進理論において最も重要なのは p に対する Hecke 作用素 U_p で，これは q 展開に

$$f(q) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \Rightarrow (U_p f)(q) = \sum_{n \geq 0} a_{pn} q^n$$

を引き起こす作用素である．U_p は $M_k(\Gamma_1(Np^m))_E = M_k(\Gamma_1(Np^m))_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} E$ に作用するが，この作用素の固有値は代数的数であり，固定した埋め込み $\bar{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}_p$ によって p 進付値を取ることができる．U_p 固有値の p 進付値のことを**傾斜（slope）**と呼ぶ．傾斜は $\mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ の元である．

1.2 保型形式の p 進解析族

現代の整数論において重要な役割を果たしてきたのが,「傾斜有限な固有形式は p 進解析的な族をなす」という事実である．レベル 1 の Eisenstein 形式（の p 安定化）が p 進解析族をなすことは

Serre [Ser] によって示されていたが，これは傾斜 0 の固有形式の例である．傾斜 0 の固有形式は**通常（ordinary）**固有形式とも呼ばれるが，それらが p 進解析族—**肥田族（Hida family）**—をなすことが肥田 [Hid] によって発見され，1980 年代から今に至る整数論の一大潮流を生み出した．肥田族（のリジッド生成ファイバー）の傾斜 $\neq 0$ の場合への一般化に成功したのは Coleman [Col] だが，その後 Coleman-Mazur [CM] により，彼の族（Coleman 族）を開集合として含む，傾斜有限な固有形式の普遍的な p 進解析族が構成された．これが **Coleman-Mazur 固有値曲線（eigencurve）**である．

固有値曲線の定義を説明する前に，固有形式の p 進解析族を考える代表的な恩恵について述べておく．例えば，固有形式の p 進解析族の存在から，与えられた固有形式に q 展開が p 進的にいくらでも近い固有形式の存在が従う．保型形式の合同の中には，q 展開の具体的な形から初等的に証明できるものもあるが，そういった組み合わせ論的な方法では散在的にしか得られなかった合同を，体系的に大量に得られる，というのが固有形式の p 進解析族を考える利点の一つである．

このような合同を用いると，直接研究するのが難しい固有形式についての主張を，より易しい固有形式の場合に帰着させることがしばしば可能になる．固有値曲線は固有形式の合同の「親玉」である，と考えると，固有値曲線の幾何を調べることにより合同の深い性質が明らかになり，そのような帰着が強力に行えるようになる，と期待するのはもっともなことのように思える．実際，固有値曲線の既約成分に関するある予想が正しければ，保型形式の L 関数の零点の位数に関する偶奇予想が傾斜有限の場合に証明できる，という結果が Pottharst-Xiao [PX] によってアナウンスされている（§2.1 を参照）．

1.3 重さ空間と過収束保型形式

固有形式の p 進解析的な族を得るためには，保型形式の重さも p 進解析的に変動させる必要がある．そのような p 進的重さのパラメータ空間が**重さ空間（weight space）**と呼ばれるリジッド解析多様体である．これを定義するためにまず，$D(0,1^-)$ を $\mathbb{Q}_p$ 上の単位開円盤とする．これは，$\mathbb{C}_p$ 値点の集合が

$$D(0,1^-)(\mathbb{C}_p) = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x|_p < 1\}$$

を満たすリジッド解析多様体であり，実際は $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p[[X]])$ のリジッド生成ファイバーとして定義する．このとき，重さ空間 $\mathcal{W}$ を

$$\mathcal{W} = \coprod D(0,1^-)$$

で定義する．但し，直和は添字集合 $\mathrm{Hom}((\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z})^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times)$ に関して取るものとする．$D(0,1^-)$ の点 x に対し，$1+2p\mathbb{Z}_p$ の位相的生成元 $1+|2|_p^{-1}p$ を $1+x$ に送る指標を対応させることで，同一視

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times)$$

が得られる．この集合の元のことを**重さ指標（weight character）**と呼ぶ．重さ指標は保型形式の重さと p での指標を組み合わせた概念であり，後で見るように，例えばレベル $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$，重さ k の楕円保型形式には重さ指標 $(t \mapsto t^k)$ が対応する．

これで重さのパラメータ空間が得られたが，固有形式の p 進解析的な族を構成するためにはさらに，不連続的にしか存在しない古典的な固有形式を補間する接合剤が必要になる．それにはいくつかの方法があるが，ここでは過収束保型形式を扱う．古典的な楕円保型形式は，モジュラー曲線上のある線束の切断と解釈できたが，**過収束保型形式（overconvergent modular form）**とは，モジュラー曲線の許容開集合上のある線束の切断である．**許容開集合（admissible open subset）**

とは，リジッド解析多様体における開集合の概念で，例えば「$\mathbb{Q}_p$ 上のモジュラー曲線から，超特異還元を持つ楕円曲線に対応する点を全て除いた集合」は許容開集合になる．これはモジュラー曲線から（標数 p のファイバーにある有限個の超特異点の持ち上げに対応する）無限個の点を除いた集合であり，代数幾何では捉えることができない．

正確な定義は説明しない（例えば [Pil] を参照）が，任意の点 $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対して，従順レベル N，重さ x の過収束保型形式の概念を定義することができる．それらのなす空間を

$$M_x^{\dagger}(\Gamma_1(N), p^{\infty})$$

で表す．これは $\mathbb{C}_p$ 上の Banach 空間の順極限であり，一般には無限次元である．また，ここにも Hecke 作用素 T_l（$l \nmid Np$），U_l（$l \mid Np$）とダイヤモンド作用素 $\langle a \rangle_N$ が作用する．これらの作用素に関する同時固有ベクトルを**過収束固有形式（overconvergent eigenform）**と呼ぶ．過収束保型形式に対しても（∞ における）q 展開の概念が存在し，それを用いることで**過収束正規固有形式（normalized overconvergent eigenform）**の概念を定義することができる．（q 展開の定数項が消えていない場合は，定数項を 1 にするように正規化する．）

古典的な保型形式の空間との関係は次の通りである．任意の $m > 0$ と，任意の有限指標 $\chi : \mathbb{Z}_p^{\times} \to (\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^{\times} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^{\times}$ に対し，重さ指標 $x_{k,\chi}$ を $x_{k,\chi}(t) = t^k \chi(t)$ で定めると，Hecke 作用素・ダイヤモンド作用素と可換な埋め込み

$$M_k(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p^m), \chi)_{\mathbb{C}_p} \subseteq M_{x_{k,\chi}}^{\dagger}(\Gamma_1(N), p^{\infty}) \tag{1.1}$$

が存在する．

1.4 Coleman-Mazur 固有値曲線

Coleman-Mazur [CM] と Buzzard [Buz2] により，$\mathbb{Q}_p$ 上のリジッド解析曲線 $\mathcal{C}_N$ と，リジッド解析多様体の射 $\kappa : \mathcal{C}_N \to \mathcal{W}$ の組で，任意の $x \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ に対し，ファイバー $\kappa^{-1}(x)$ が $M_x^{\dagger}(\Gamma_1(N), p^{\infty})$ における傾斜有限な過収束正規固有形式の集合と同一視できるようなものが構成されている．これを従順レベル N の **Coleman-Mazur 固有値曲線（eigencurve）**と呼ぶ．

埋め込み (1.1) により，$M_k(\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p^m), \chi)_{\mathbb{C}_p}$ における固有形式は $\mathcal{C}_N(\mathbb{C}_p)$ の元を定める．このような点のことを**古典的点（classical point）**と呼ぶ．古典的点は $\mathcal{C}_N$ において Zariski 稠密であることが知られている．（Coleman の古典性（Classicality）定理の帰結．）従って，$\mathcal{C}_N$ は古典的な固有形式の集合を p 進解析的に補間した多様体である，と言うことができる．また，上の全単射は $\mathcal{C}_N$ が過収束固有形式のモジュライ空間と見なせることを示している．

注 1.1. 固有値曲線の構成の詳細は説明しないが，大雑把に言うと固有値曲線とは Spec(Hecke 環) であり，上の全単射は，Hecke 環から $\mathbb{C}_p$ への環準同型が固有形式と対応することを意味する．もちろんこれではリジッド解析多様体の構造が入らず，固有形式の p 進解析族にならないので，実際は Hecke 環がアフィノイド代数になるように過収束保型形式の空間を U_p 作用素を使って切り分ける必要がある．ここに過収束性や U_p のコンパクト性が用いられる．

注 1.2. 固有値曲線は代数曲線ではない．例えば単位開円盤 $D(0, 1^-)$ もリジッド解析曲線だが，代数曲線ではない．固有値曲線 (eigencurve）は普通に訳せば「固有曲線」だが，固有値曲線は普通の意味で固有（proper）にはならない．

2　主定理

2.1　固有値曲線の既約成分

固有値曲線は過収束保型形式のモジュライ空間なので，その幾何的な情報が保型形式の p 進的な性質を反映していると考えるのは自然である．固有値曲線の幾何については Coleman-Mazur [CM, p. 4–8] が多くの問いを提出したが，近年それらの問いについては急速に理解が進んでいる．

本稿で着目するのは固有値曲線 $\mathcal{C}_N$ の既約成分である．それが有限個か無限個か，という基本的な問題もまだ解明されていないが，$\mathcal{C}_N$ の既約成分の例としては肥田族（のリジッド生成ファイバー）がある．（ここでは Eisenstein 族も肥田族に含めている．）各肥田族は $\mathcal{C}_N$ の既約成分を定めるが，肥田族から得られる既約成分 C については，合成

$$C \subseteq \mathcal{C}_N \xrightarrow{\kappa} \mathcal{W}$$

が有限射になることが（肥田 Hecke 環の岩澤代数上の有限性から）分かる．

注 2.1. リジッド解析多様体の間の有限射は代数幾何と同様に定義する．つまり，局所的にはアフィノイド代数の準同型 $A \to B$ で B が A 加群として有限生成なものと対応することを言う．

一方で，重さ空間 $\mathcal{W}$ 上の有限性よりも弱い性質として，$\mathcal{W}$ 上の次数有限性がある．

定義 2.2. $\mathcal{C}_N$ の既約成分 C が**次数有限（finite degree）**であるとは，κ との合成 $C \subseteq \mathcal{C}_N \to \mathcal{W}$ の任意のファイバーが有限集合であること．そうでないとき次数無限と言う．Fredholm 超平面の一般論により，次数有限ならファイバーの濃度は有界であることが示せる．合成 $C \to \mathcal{W}$ が有限射であれば，もちろん C は次数有限である．

肥田族の定める既約成分は $\mathcal{W}$ 上有限だから次数有限でもある．$\mathcal{C}_N$ の既約成分は固有形式の何らかの p 進解析族と見なせるが，肥田族は固有形式の最も重要な p 進解析族であり，傾斜 0 の特殊事情によって傾斜 > 0 の場合に比べてより多くのことが分かる．従って，ある既約成分が肥田族かどうかを判定することには意義がありそうだ．これについては Coleman-Mazur が次の問いを提出した．

問 2.3 ([CM], p. 5)**.** $\mathcal{C}_N$ の次数有限な既約成分は肥田族と一致するか？

言い換えれば，二つの包含関係

$$\{\text{ 肥田族 }\} \subseteq \{\mathcal{W} \text{ 上有限な } \mathcal{C}_N \text{ の既約成分 }\} \subseteq \{\mathcal{W} \text{ 上次数有限な } \mathcal{C}_N \text{ の既約成分 }\}$$

はどちらも等号か？

この問いが肯定的であれば，それは与えられた既約成分が肥田族かどうか，つまり傾斜が 0 かどうかが，次数有限性という位相的な条件で決まっていることを意味する．

2.2　第一の包含関係：重さ空間の境界での挙動

問 2.3 の一つ目の包含関係については，Chenevier による（短い）議論 [Che, Ch. 1, §3.7] により，これが等号であることが次の予想—Coleman-Mazur-Buzzard-Kilford 予想—から従うことが分かっている．

予想 2.4 ([LWX], Conjecture 1.2 を参照)**.** 重さ空間 $\mathcal{W}$ の各連結成分 $D(0,1^-)$ に対し，円環 D_r を

$$D_r(\mathbb{C}_p) = \{x \in \mathbb{C}_p \mid r < |x|_p < 1\}$$

で定義し，$\mathcal{C}_N$ の D_r への制限 $\mathcal{C}_N|_{D_r}$ を考える．このとき，r が 1 に十分近ければ次が成立するだろう．

1. $\mathcal{C}_N|_{D_r}$ は可算無限個の連結成分 C_n（$n \in \mathbb{Z}_{>0}$）の直和であり，各 n に対し $\kappa : C_n \to D_r$ は有限平坦.

2. 任意の n に対し $\alpha_n \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ が存在して次を満たす：任意の $z \in C_n$ に対し，z に対応する過収束固有形式の傾斜は $\alpha_n v_p(\kappa(z))$ に等しい.

3. $\{\alpha_n\}_n$ は，十分大きい n から先では有限個の算術級数の合併になる.

Buzzard-Kilford [BK] はこの予想の $p = 2$，$N = 1$ の場合を（一般化の難しい具体的な計算により）解決した．この場合 $\kappa : C_n \to D_r$ は同型になる．重さ空間の外縁にある円環 D_r の上に，光輪のように無限個の円環 C_n が浮かんでいることになる．そのため，この予想のもう少し強い形のものは，**スペクトル光輪予想（spectral halo conjecture）**と呼ばれている [BP2, Conjecture 4.1]. ([BP1, Theorem B] も参照.）

この予想の二つ目の主張は,「重さが重さ空間 $\mathcal{W}$ の境界に近付くと固有形式の傾斜は 0 に近付く」ということを意味している．$\mathcal{W}$ の境界近くには，整数 k を固定するとき，導手の大きい有限指標 χ に対する点 $x_{k,\chi}$ が集まっており，χ の導手が大きいほど $x_{k,\chi}$ は $\mathcal{W}$ の境界に近付く．このことと Coleman の古典性定理を組み合わせると次のことが分かる：予想 2.4 が正しければ，$\mathcal{C}_N$ の任意の既約成分に重さ 2 の古典的点が存在する.

重さ 2 の保型形式は（例えば Abel 多様体を使えるので）最も調べやすい保型形式のクラスである．一方で，p 進解析族の存在により，重さ 2 の点 x で何かを証明できれば，その何かが x を含む既約成分全体で成立する，ということがしばしば起こる．Pottharst-Xiao [PX, Theorem C] によれば，保型形式の L 関数の零点の位数に関する偶奇予想が，傾斜有限の場合にはこのようにして証明できるという.

2.3　第二の包含関係：固有性

本稿の主定理は，問 2.3 における第二の包含関係が等号であることを主張するものである．これは James Newton（Kings College London）との共同研究による.

定理 2.5 ([HN], Theorem 1.1)**.** $\mathcal{C}_N$ の任意の既約成分 C に対し，C が $\mathcal{W}$ 上次数有限ならば C は $\mathcal{W}$ 上有限.

この節では以下，定理 2.5 の証明のアイデアを説明する．まず，代数幾何における次の定理を思い出そう.

準有限かつ固有な射は有限射.

p 進解析幾何においても対応する定理が成立する．$\mathcal{C}_N$ の既約成分 C の次数有限性は $\mathcal{W}$ 上の準有限性と似た概念である．従って，射 $\kappa : \mathcal{C}_N \to \mathcal{W}$ の固有性が証明できれば合成 $C \to \mathcal{W}$ の有限性も従いそうだ．問題は，$\kappa : \mathcal{C}_N \to \mathcal{W}$ は準コンパクトでないため固有でもないということである.

一方で，Coleman-Mazur は [CM, p. 5] において $\mathcal{C}_N$ が，以下で述べるこれと別の意味での固有性を持つかどうかを問いとして提出した．$D = \mathrm{Sp}(\mathbb{Q}_p\langle X\rangle)$ を $\mathbb{Q}_p$ 上の単位閉円盤とする．つまり

$$D(\mathbb{C}_p) = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x|_p \leq 1\}.$$

D において $x = 0$ に対応する点を O と書き，$D^\times = D \setminus \{O\}$ とおく．これは穴開き単位閉円盤である．完備付値体の拡大 L/K に対し，K 上準分離的なリジッド解析多様体 X の L への係数拡大を X_L で表す．

定義 2.6. $\mathbb{C}_p$ 上のリジッド解析多様体としての任意の射 $\varphi : D^\times_{\mathbb{C}_p} \to \mathcal{C}_{N,\mathbb{C}_p}$ が $\bar{\varphi} : D_{\mathbb{C}_p} \to \mathcal{C}_{N,\mathbb{C}_p}$ に延長されるとき，固有値曲線 $\mathcal{C}_N$ は**固有（proper）**であると言う．

注 2.7. この性質は慣例的に固有性と呼ばれているが，リジッド解析幾何における普通の意味での固有性（Kiehl による）とは同値ではない.「完備」「穴がない」などと呼ぶ方が適切だろう.

注 2.8. 任意の射 $D^\times_{\mathbb{C}_p} \to \mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}$ は自動的に $D_{\mathbb{C}_p} \to \mathcal{W}_{\mathbb{C}_p}$ に延長されることが（穴開き閉円盤上の有界な解析関数は穴に延長される，ということから）直ちに分かる．このことと合わせると，上の定義が固有性の付値判定法の類似であることが見て取れる

「$\mathcal{C}_N$ はこの意味で固有か？」という Coleman-Mazur の問いは，Buzzard と Calegari による部分的な結果 [BuC, Cal] を経て，Diao-Liu によって多くの場合に肯定的に解決された.

定理 2.9 ([DL], Theorem 1.1)**.** $K/\mathbb{Q}_p$ を任意の有限次拡大とする．このとき，任意の射 $\varphi : D^\times_K \to \mathcal{C}_{N,K}$ は $\bar{\varphi} : D_K \to \mathcal{C}_{N,K}$ に延長される.

従って，この固有性を普通の意味での固有性の代わりに使うことで，次数有限な既約成分の有限性を示せないか，と考えるのは自然だろう.（Chenevier [Che, loc. cit.] もそう予想していた.）実際，定理 2.5 の証明はそのようにしてなされる.

2.4 証明の方針

定理 2.5 の証明の方針を説明するためには，$\mathcal{C}_N$ の構成に少し立ち入る必要がある．$\mathcal{C}_N$ の構成の基礎になっているのは，過収束保型形式の空間に作用する U_p の特性巾級数 $P_1(X,T)$ とスペクトル曲線 Z_1 である．$P_1(X,T)$ は $\mathcal{W} \times \mathbb{A}^1$ 上のリジッド解析関数で，次の性質を持つ：任意の $(x,t) \in (\mathcal{W} \times \mathbb{A}^1)(\mathbb{C}_p)$ に対し，$P_1(x,t) = 0$ であることと，t^{-1} が $M^\dagger_x(\Gamma_1(N), p^\infty)$ における U_p の固有値であることは同値．$\mathcal{W} \times \mathbb{A}^1$ において $P_1(X,T)$ が定める閉部分多様体を Z_1 と書き，これを**スペクトル曲線（spectral curve）**と呼ぶ．固有値曲線 $\mathcal{C}_N$ は，Z_1 上有限なリジッド解析多様体 $\pi_1 : \mathcal{C}_N \to Z_1$ として構成される．この写像 π_1 は，傾斜有限な過収束固有形式 f に対し，その U_p 固有値の逆数 $a_p(f)^{-1}$ を対応させるものである.

全ての Hecke 作用素と $\langle a\rangle_N$ とで生成される $\mathbb{Z}_p$ 上の抽象的 Hecke 環を $\mathcal{H}$ と書く．より一般に，任意の $\alpha \in 1 + p\mathcal{H}$ に対し，作用素 αU_p に対しても特性巾級数 $P_\alpha(X,T)$ を定義できる．この場合も，$P_\alpha(X,T)$ が定める $\mathcal{W} \times \mathbb{A}^1$ の閉部分多様体を Z_α と書くと，傾斜有限な過収束固有形式 f に対し，その αU_p 固有値の逆数を対応させる写像 $\pi_\alpha : \mathcal{C}_N \to Z_\alpha$ が有限射になる．$p_1 : Z_\alpha \to \mathcal{W}$ を第一射影とする.

以下簡単のために従順レベル N が 1 の場合のみ考える.（一般には帰納法で示す．newform が十分多く含まれている既約成分に対しては $N = 1$ と同様に示せる．そうでない場合は小さな従順レベルの場合に帰着できる.）C を $\mathcal{C}_1$ の次数有限な既約成分とする．このとき，ある α が存在して

次を満たす：$Y = \pi_\alpha(C)$ に reduced structure を入れると，π_α が引き起こす写像 $\pi_\alpha : C \to Y$ が **generic^3 isomorphism** になる．この言葉の意味は，Y の離散的部分集合（＝等次元 0 の解析的閉部分集合）E と，$Y \setminus E$ の離散的部分集合 E'，$(Y \setminus E) \setminus E'$ の離散的部分集合 E'' が存在して，$((Y \setminus E) \setminus E') \setminus E''$ 上では π_α が同型になる，ということである．

これら三つの離散的部分集合の取り方についても詳細は説明しないが，$F \subseteq \mathcal{W}$ を F の外では $p_1 : Y \to \mathcal{W}$ が有限エタールになるような有限集合とすると，$E = p_1^{-1}(F)$ である．このような F が存在することは，C が次数有限であるという仮定によって保証される．E' は，E' の外では話を Z_α の特定のタイプの許容開集合（$\mathcal{C}_N$ の構成に用いられる「標準的許容開被覆」の元）に帰着させられるような部分集合である．E'' は局所的にはある行列の行列式が定める閉部分集合で，ここが π_α を同型にするために除く部分であり，E'' が離散的になるように α を上手く選ぶ必要がある．

α は，$\pi_\alpha : C \to Z_\alpha$ の像が Z_α の中で重複度を持たない既約成分に入るように選ぶ．もしこれが可能なら，Cayley-Hamilton の定理と「固有多項式が重複度を持たなければ最小多項式と一致する」という事実を用いることにより，E や E' と交わらない（特定のタイプの）許容開集合上では，$\pi_\alpha : C \to Z_\alpha$ はアフィノイド代数の間の単射が引き起こす写像であることが示せる．また，保型形式と Hecke 環の双対性から，これらのアフィノイド代数が，あるアフィノイド代数上同じ階数の自由加群であることが示せる．それを同型にするには行列式の零点集合 E'' を除けば良いが，単射性から E'' が離散的であることが従う．

α の取り方については，既約成分が重複度を持たないかどうかは一点でのファイバーで分かるので，結局は，古典的な保型形式のなすある空間に含まれる固有形式を，他の固有形式と αU_p 固有値で区別できるような α を取ることに帰着される．この部分の議論は Coleman-Mazur [CM, Sublemma 6.2.3] の真似である．

これで C を調べることと Y を調べることが「だいたい同じ」であることが分かった．C が次数有限であることから，Y の方は $\mathcal{W}$ 上の有限被覆から有限個の点を抜いたものであることがすぐに分かるので，C に比べて調べやすい対象である．そこで，上で考えた $F \subseteq \mathcal{W}$ に対して任意の $x \in F$ を取る．x の周りの小さな閉円盤 D で，$\mathcal{W}$ の許容開集合になるようなものを取り，$D^\times = D \setminus \{x\}$ とおく．F の取り方から，D の半径を十分小さく取れば，$Y \to \mathcal{W}$ は $D^\times$ 上有限エタールである．すると，**p 進 Riemann 存在定理** [Lüt, Ram] から，D の半径をさらに小さくすれば，$p_1 : Y \to \mathcal{W}$ の制限 $Y|_{D^\times} \to D^\times$ が **$\mathbb{C}_p$ 上では** Kummer 型被覆，つまり

$$D^\times_{\mathbb{C}_p} \to D^\times_{\mathbb{C}_p}, \quad z \mapsto x + z^m$$

の直和になるようにできる．

$\mathbb{C}_p$ 上では定理 2.9 を使えないので，これを $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大に降下させる必要がある．このような降下は一般には不可能だが，今の場合は多くのものが $\mathbb{Q}_p$ 上定義されており，特に Y が $\mathbb{Q}_p$ 上定義された Z_α の閉部分多様体であることから，降下を実行できる．従って，ある有限次拡大 $L/\mathbb{Q}_p$ が存在して，$p_1 : Y \to \mathcal{W}$ の制限 $Y|_{D^\times} \to D^\times$ が **L 上で** Kummer 型被覆，つまり

$$D^\times_L \to D^\times_L, \quad z \mapsto x + z^m$$

の直和になる．

$C \to Y$ が generic^3 isomorphism であることから，ここで構成した直和成分の埋め込み $D^\times_L \to Y|_{D^\times_L}$ は generic^2 には C に延びている．（F の外で考えているので「generic」の巾指数がひとつ減っている．）ここで定理 2.9 を用いると，この除かれている点を全て埋めることができ，generic^2 な切断 $D^\times_L \to C_L$ を射 $D_L \to C_L$ に延長することができる．つまり，局所的には $C \to Y$ を有限射で上から抑えることができる．このことから $C \to Y$ が有限射であることが従う．

3　幽霊予想

問 2.3 や予想 2.4 は，保型形式の傾斜の構造についての主張，と言うことができる．一方でここ数年，傾斜に関する次の問いが多くの研究者の注目を集めてきた．

問 3.1. $M_k(\Gamma_0(Np))_{\mathbb{C}}$ にどのような傾斜が存在し，それらはどのような構造を持つか？

例えば，$M_k(\Gamma_0(Np))_{\mathbb{C}}$ の p-new な尖点固有形式の傾斜は $(k-2)/2$ である [Miy, Theorem 4.6.17 (2)]．また，$M_k(\Gamma_0(Np))_{\mathbb{C}}$ の p-old な尖点固有形式は $M_k(\Gamma_0(N))_{\mathbb{C}}$ の尖点固有形式の二つの p 安定化によって得られるので，足すと $k-1$ になる二つの値が対になって傾斜として現れるが，実際にどのような対が現れるかが問題になる．これは古典的な楕円保型形式の理論の範疇にある問いであり，1990 年代から興味を持たれてきた（例えば [GM]）．

この問いに関して，2010 年代に入り，Bergdall-Pollack は Buzzard の仕事 [Buz1] を下敷きにして，傾斜の構造に関する新しい予想—**幽霊予想（ghost conjecture）**—を提出した [BP2, Conjecture 1.3]．この予想によると，従順レベル $\Gamma_0(N)$，重さ指標 x の過収束尖点形式の空間 $S_x^\dagger(\Gamma_0(N), p^\infty)$ に現れる傾斜を，古典的な尖点形式の空間 $S_k(\Gamma_0(N))_{\mathbb{C}}$ や p-new な尖点形式の空間 $S_k(\Gamma_0(Np))_{\mathbb{C}}^{p\text{-new}}$ の次元から組み合わせ論的に決定できるという．もう少し具体的に言うと，これらの次元のデータから**幽霊級数（ghost series）**と呼ばれる巾級数を構成でき，予想によれば，$S_x^\dagger(\Gamma_0(N), p^\infty)$ に作用する U_p 作用素の特性巾級数の Newton 多角形が，幽霊級数の Newton 多角形と一致する．従って，古典的な尖点形式の空間に現れる傾斜も幽霊級数の Newton 多角形から分かる．（実際は p と N に関する仮定が必要だが，詳細は [BP2] を参照．）

このような傾斜の研究の原動力になってきたのは，計算機による数値計算である．[BP2, Appendix B] では，Hecke 作用素の跡に関する小池の公式 [Koi] を用いて特性巾級数の数値計算を行っている．一方で，Hilbert 保型形式や Siegel 保型形式などの，他の代数群上の保型形式や，楕円保型形式の関数体類似である Drinfeld 保型形式に関しては，傾斜の構造について今の所ほとんど何も分かっていないように思える．計算機に強い研究者の参入を望みます．

謝辞

当初は早稲田大学整数論セミナーでの（押しかけ）講演を，とお願いしていたところ，研究集会での講演にアップグレードして頂きました．講演の機会を与えて下さったオーガナイザーの方々に感謝致します．

参考文献

[BP1] J. Bergdall and R. Pollack: *Arithmetic properties of Fredholm series for p-adic modular forms*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **113** (2016), no. 4, 419–444.

[BP2] J. Bergdall and R. Pollack: *Slopes of modular forms and the ghost conjecture*, to appear in Int. Math. Res. Not.

[Buz1] K. Buzzard: *Questions about slopes of modular forms*, Automorphic forms I, Astérisque **298** (2005), 1–15.

[Buz2] K. Buzzard: *Eigenvarieties*, L-functions and Galois representations, 59–120, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **320**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[BuC] K. Buzzard and F. Calegari: *The 2-adic eigencurve is proper*, Doc. Math. (2006) Extra Vol., 211–232.

[BK] K. Buzzard and L. J. P. Kilford: *The 2-adic eigencurve at the boundary of weight space*, Compos. Math. **141** (2005), 605-619.

[Cal] F. Calegari: *The Coleman-Mazur eigencurve is proper at integral weights*, Algebra Number Theory **2** (2008), no. 2, 209–215.

[Che] G. Chenevier: *Représentations galoisiennes automorphes et conséquences arithmétiques des conjectures de Langlands et Arthur*, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris XI (2013), available at `http://gaetan.chenevier.perso.math.cnrs.fr/pub.html`.

[Col] R. F. Coleman: *p-adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. Math. **127** (1997), no. 3, 417–479.

[CM] R. Coleman and B. Mazur: *The eigencurve*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 1–113, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **254**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[DL] H. Diao and R. Liu: *The eigencurve is proper*, Duke Math. J. **165**, no. 7 (2016), 1381–1395.

[GM] F. Gouvêa and B. Mazur: *Families of modular eigenforms*, Math. Comp. **58** (1992), no. 198, 793–805.

[HN] S. Hattori and J. Newton: *Irreducible components of the eigencurve of finite degree are finite over the weight space*, preprint, arXiv:1701.05721v1.

[Hid] H. Hida: *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 2, 231–273.

[Koi] M. Koike: *On some p-adic properties of the Eichler-Selberg trace formula*, Nagoya Math. J. **56** (1975), 45–52.

[LWX] R. Liu, D. Wan and L. Xiao: *Eigencurve over the boundary of the weight space*, Duke Math. J. **166**, no. 9 (2017), 1739–1787.

[Lüt] W. Lütkebohmert: *Riemann's existence problem for a p-adic field*, Invent. Math. **111** (1993), no. 2, 309–330.

[Miy] T. Miyake: *Modular forms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Pil] V. Pilloni: *Overconvergent modular forms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), no. 1, 219–239.

[PX] J. Pottharst and L. Xiao: *On the parity conjecture in finite-slope families*, preprint, arXiv:1410.5050v2.

[Ram] L. Ramero: *Local monodromy in non-Archimedean analytic geometry*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **102** (2005), 167–280.

[Ser] J.-P. Serre: *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques*, Modular functions of one variable III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972), pp. 191–268. Lecture Notes in Math., Vol. **350**, Springer, Berlin, 1973.