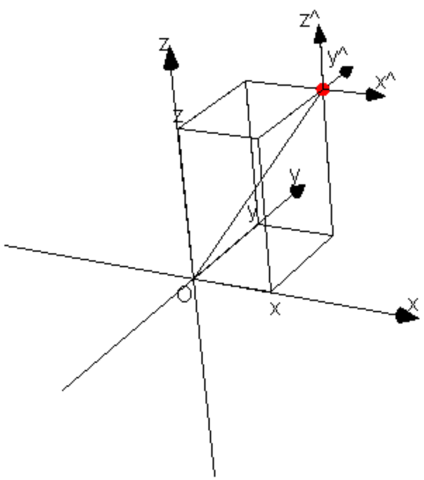
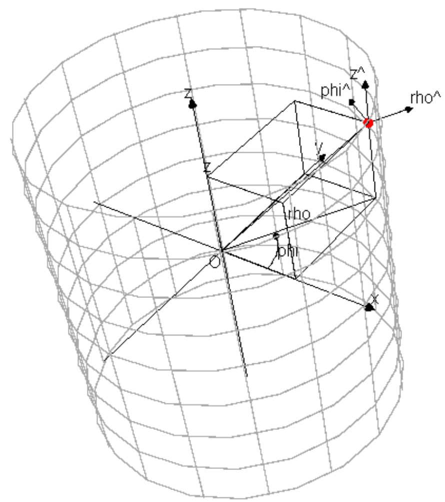
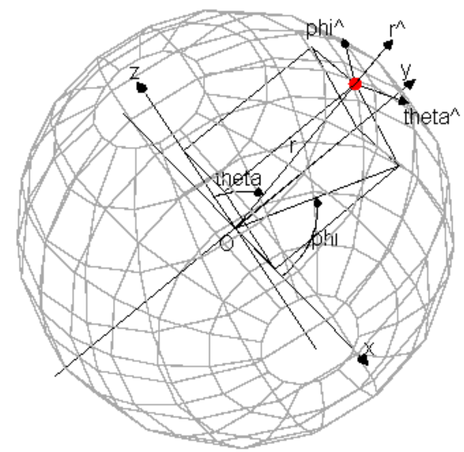
座標系



直角直交座標



円筒座標



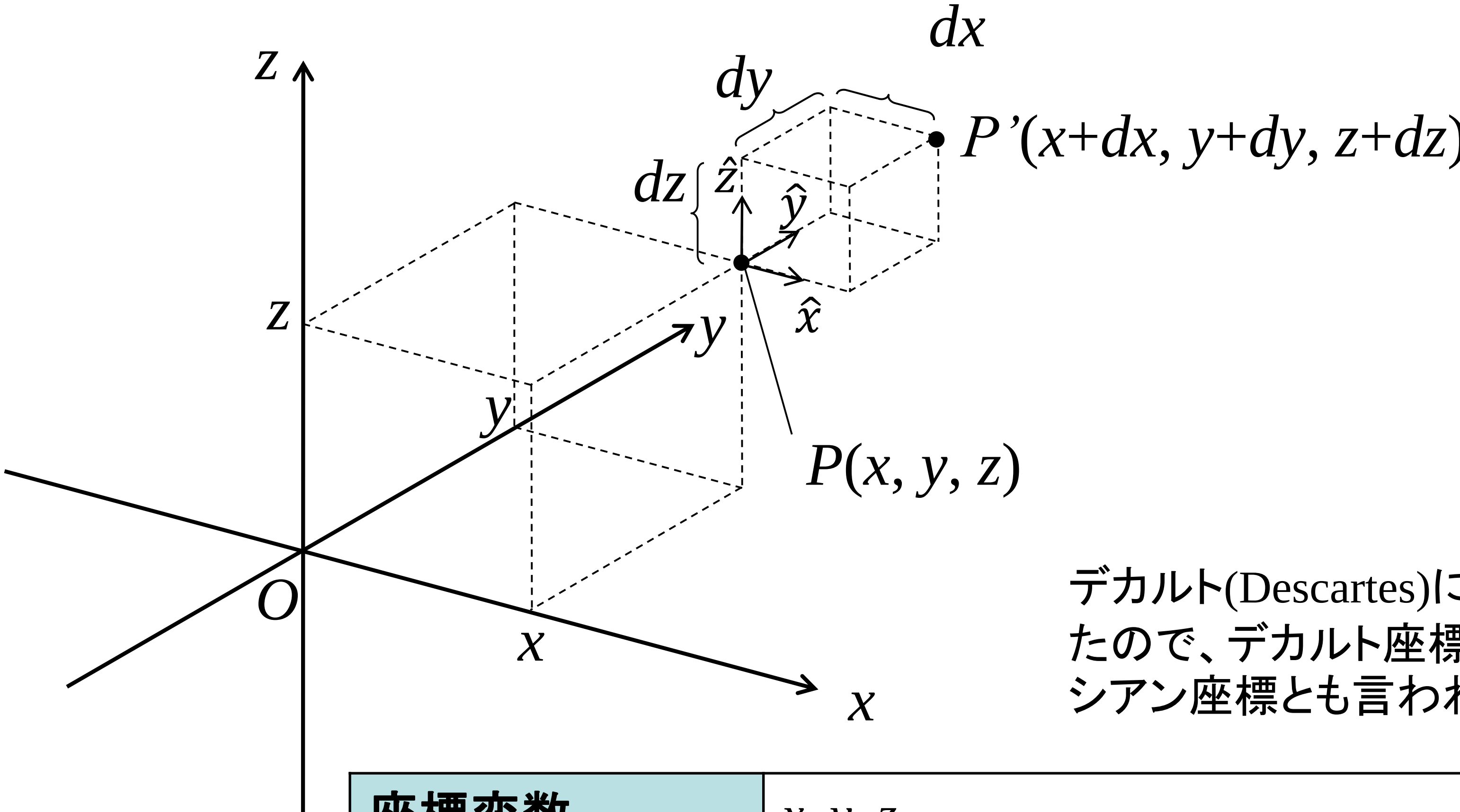
球座標

平野　拓一

座標系

- 直角直交座標
- 円筒座標
- 球座標

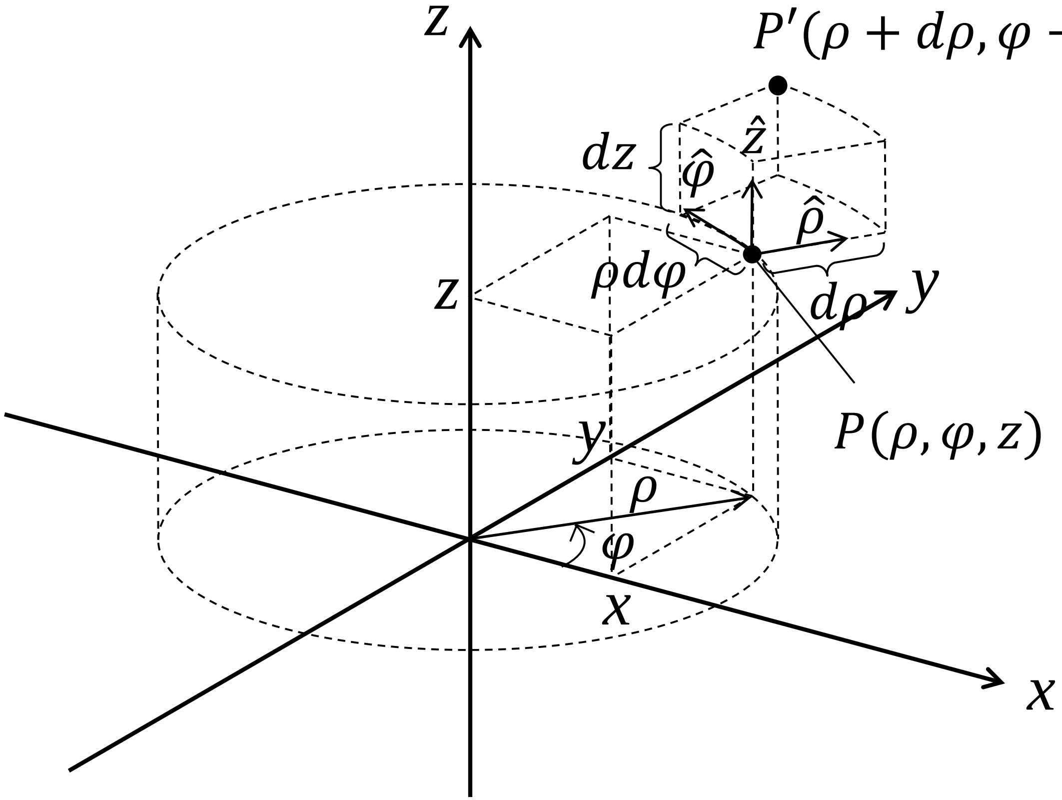
直角直交座標(Cartesian Coordinates)

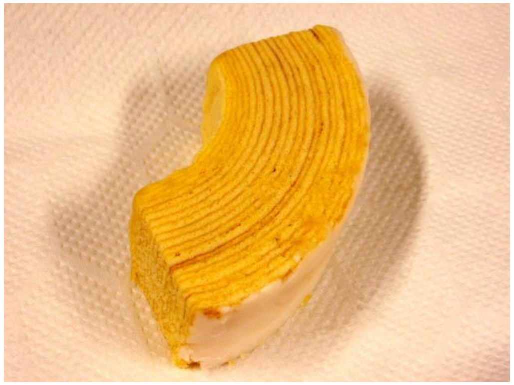


デカルト(Descartes)によって考案されたので、デカルト座標あるいはカルテシアン座標とも言われる。

座標変数	x, y, z
基底	$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$
線素ベクトル	$d\boldsymbol{l} = \overrightarrow{PP'} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$
面素ベクトル	$d\boldsymbol{S}_x = \hat{x}dydz, d\boldsymbol{S}_y = \hat{y}dxdz, d\boldsymbol{S}_z = \hat{z}dxdy$
体積素	$dV = dxdydz$

円筒座標(Cylindrical Coordinates)

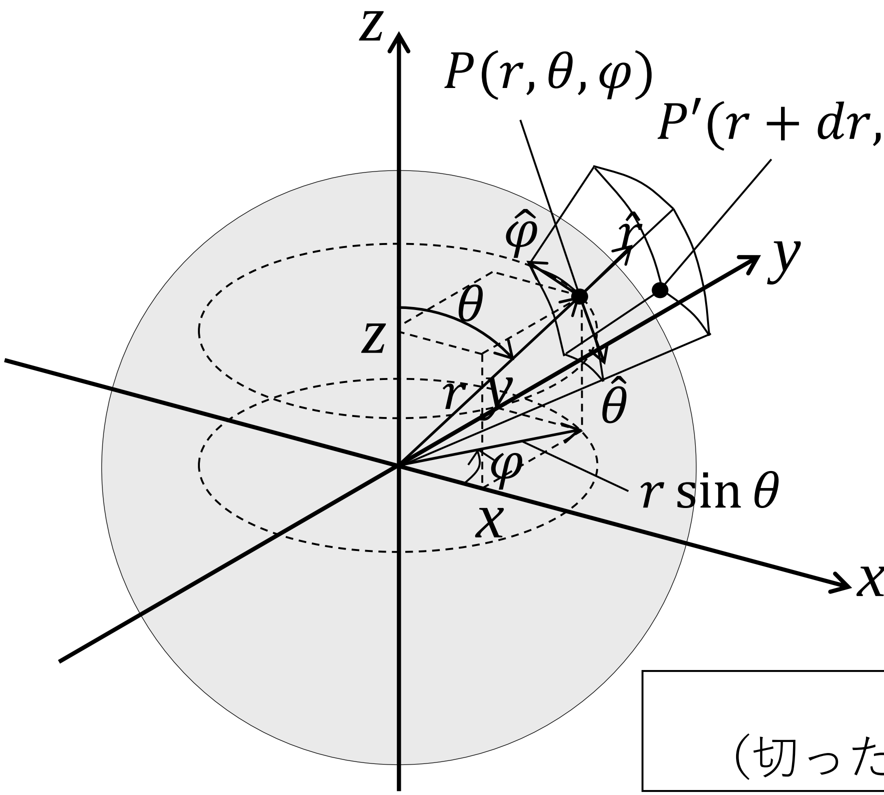


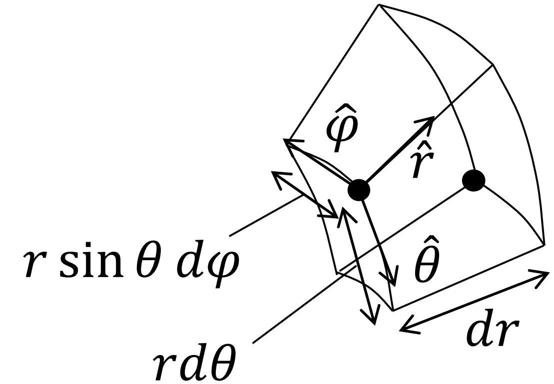


体積素
（バウムクーヘンみたい）

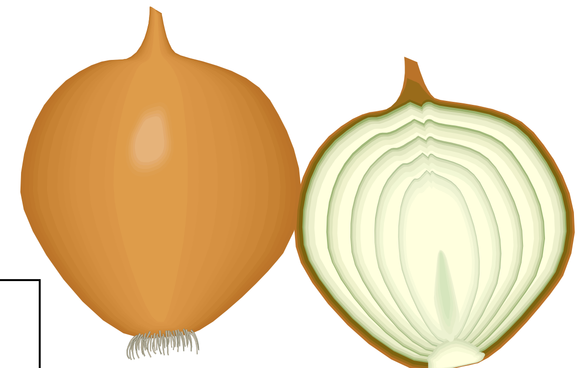
座標変数	ρ, φ, z
基底	$\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$
線素ベクトル	$d\boldsymbol{l} = \overrightarrow{PP'} = \hat{\rho} d\rho + \hat{\varphi} \rho d\varphi + \hat{z} dz$
面素ベクトル	$d\boldsymbol{S}_\rho = \hat{\rho} \rho d\varphi dz, d\boldsymbol{S}_\varphi = \hat{\varphi} d\rho dz, d\boldsymbol{S}_z = \hat{z} \rho d\rho d\varphi$
体積素	$dV = \rho d\rho d\varphi dz$

球座標(Spherical Coordinates)





体積素
（切った玉ネギみたい）



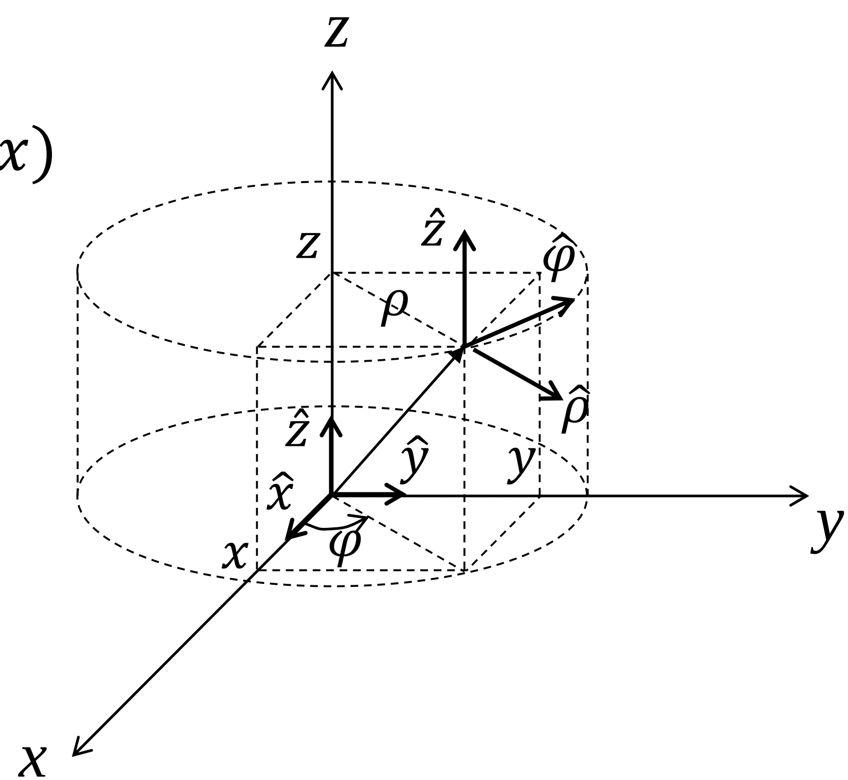
座標変数	r,θ,φ
基底	$\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}$
線素ベクトル	$d\boldsymbol{l}=\overrightarrow{PP'}=\hat{r}dr+\hat{\theta}rd\theta+\hat{\varphi}r\sin\theta\,d\varphi$
面素ベクトル	$d\boldsymbol{S}_r=\hat{r}r^2\sin\theta\,d\theta d\varphi,\ d\boldsymbol{S}_\theta=\hat{\varphi}r\sin\theta\,drd\varphi,\ d\boldsymbol{S}_\varphi=\hat{z}rdrd\theta$
体積素	$dV=r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$

座標変換: 直角直交座標⇔円筒座標

座標の変換

$$(\rho, \varphi, z) \to (x, y, z) \quad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$(x, y, z) \to (\rho, \varphi, z) \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$



座標変換: 直角直交座標⇔円筒座標

ベクトルの変換

まず、変換前・後の基底同士の内積を計算しておく。

$$\begin{cases} \hat{x}\cdot\hat{\rho} = \cos\varphi \\ \hat{x}\cdot\hat{\varphi} = -\sin\varphi \\ \hat{x}\cdot\hat{z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{y}\cdot\hat{\rho} = \sin\varphi \\ \hat{y}\cdot\hat{\varphi} = \cos\varphi \\ \hat{y}\cdot\hat{z} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{z}\cdot\hat{\rho} = 0 \\ \hat{z}\cdot\hat{\varphi} = 0 \\ \hat{z}\cdot\hat{z} = 1 \end{cases}$$

変換前(x,y,z)座標系の表現$\boldsymbol{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$を
(ρ,φ,z)座標系に変換することを考える。

$$\boldsymbol{A} = \hat{\rho}(\hat{\rho}\cdot\boldsymbol{A}) + \hat{\varphi}(\hat{\varphi}\cdot\boldsymbol{A}) + \hat{z}(\hat{z}\cdot\boldsymbol{A})$$

変換後の座標系での表現

$$= \hat{\rho}\big(\hat{\rho}\cdot(\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z)\big)$$

変換前の座標系での表現

$$+\hat{\varphi}\big(\hat{\varphi}\cdot(\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z)\big)$$
$$+\hat{z}\big(\hat{z}\cdot(\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z)\big)$$

代入すれば変換完了

$$= \hat{\rho}\Big((\hat{\rho}\cdot\hat{x})A_x + (\hat{\rho}\cdot\hat{y})A_y + (\hat{\rho}\cdot\hat{z})A_z\Big)$$
$$+\hat{\varphi}\Big((\hat{\varphi}\cdot\hat{x})A_x + (\hat{\varphi}\cdot\hat{y})A_y + (\hat{\varphi}\cdot\hat{z})A_z\Big)$$
$$+\hat{z}\Big((\hat{z}\cdot\hat{x})A_x + (\hat{z}\cdot\hat{y})A_y + (\hat{z}\cdot\hat{z})A_z\Big)$$

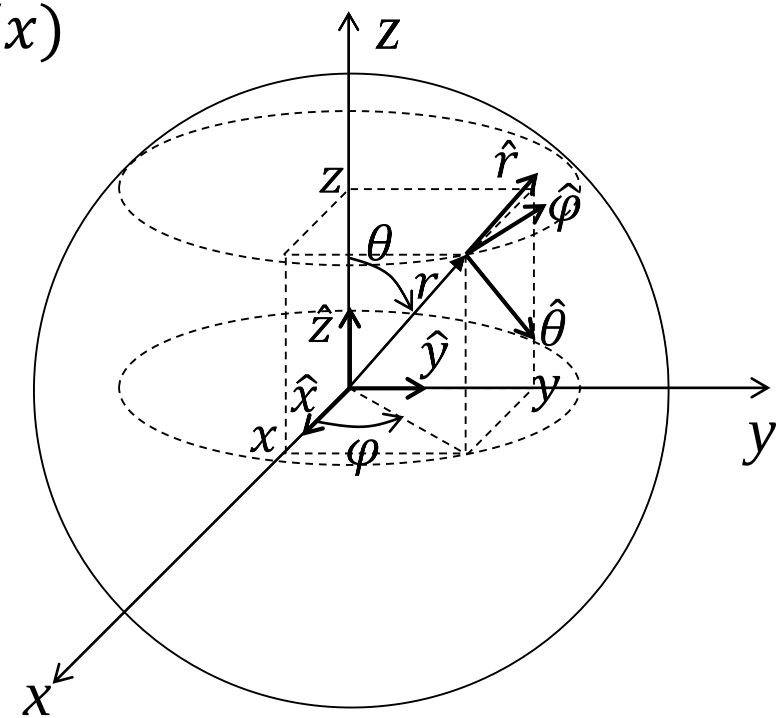
逆の変換も同様にすればよい。

座標変換: 直角直交座標⇔球座標

座標の変換

$(r, \theta, \varphi) \to (x, y, z)$
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$(x, y, z) \to (r, \theta, \varphi)$
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1}(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$



座標変換: 直角直交座標⇔球座標

ベクトルの変換

まず、変換前・後の基底同士の内積を計算しておく。

$$\begin{cases} \hat{x}\cdot\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi \\ \hat{x}\cdot\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi \\ \hat{x}\cdot\hat{\varphi} = -\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{y}\cdot\hat{r} = \sin\theta\sin\varphi \\ \hat{y}\cdot\hat{\theta} = \cos\theta\sin\varphi \\ \hat{y}\cdot\hat{\varphi} = \cos\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{z}\cdot\hat{r} = \cos\theta \\ \hat{z}\cdot\hat{\theta} = -\sin\theta \\ \hat{z}\cdot\hat{\varphi} = 0 \end{cases}$$

あとは円筒座標と同じように変換する。