

Q. 複素フーリエ級数とフーリエ変換について教えてください。



A. 複素フーリエ級数とフーリエ変換は、電気電子通信工学では非常に重要な概念です。アンテナ工学や通信工学でも日常的に使われます。

実は、

フーリエ級数 → 周期信号を解析する方法

フーリエ変換 → 非周期信号を解析する方法

と考えると理解しやすいです。

1. なぜフーリエ解析が必要なのか

例えば音声信号を考えます。

複雑な波形

$$x(t)$$

を見ても、その中に

- 100 Hz
- 500 Hz
- 1000 Hz

がどれだけ含まれているか分かりません。

フーリエは

どんな波形も正弦波の重ね合わせとして表せる

ことを示しました。

つまり、

時間波形

↓

周波数成分

に分解する道具です。

2. 複素フーリエ級数

周期 T の信号

$$x(t)$$

を考えます。

基本角周波数を

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

とすると、

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

と表せます。

これを

複素フーリエ級数

といいます。

フーリエ係数

各周波数成分の大きさは

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

で求めます。

意味

$$e^{jn\omega_0 t}$$

は周波数

$$nf_0$$

の複素正弦波です。

したがって

$$C_n$$

は

n 倍高調波がどれだけ含まれているか

を表します。

3. 例：矩形波

振幅 1 の矩形波

$$x(t)$$

を展開すると

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega_0 t + \dots \right)$$

となります。

つまり矩形波は

- 基本波
- 3 次高調波
- 5 次高調波
- 7 次高調波

を重ねたものです。

4. 複素数を使う理由

本来は

$$\sin$$

と

$$\cos$$

で表せます。

しかし

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

(オイラーの公式)

を使うと

$$\sin$$

も

$$\cos$$

も一つの式で扱えます。

通信工学では複素表示が圧倒的に便利です。

5. フーリエ変換

今度は周期が無限大になる場合を考えます。

つまり

$$T \rightarrow \infty$$

です。

このとき周波数間隔

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

は

$$0$$

に近づきます。

高調波が連続になります。

すると和が積分になります。

複素フーリエ級数

$$x(t) = \sum C_n e^{jn\omega_0 t}$$

↓

フーリエ変換

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

になります。

6. フーリエ変換の定義

順変換

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

逆変換

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

です。

意味

時間領域

$$x(t)$$

↓

周波数領域

$$X(\omega)$$

へ変換します。

7. 通信工学での意味

例えば AM 変調波

$$s(t) = A(1 + m(t)) \cos \omega_c t$$

をそのまま見ても分かりにくいですが、

フーリエ変換すると

- 搬送波 f_c
- 上側波帯 $f_c + f_m$
- 下側波帯 $f_c - f_m$

が見えます。

通信機器はほぼ全て

周波数領域で設計する

のでフーリエ変換が不可欠です。

8. アンテナ工学との関係

平野研究室で扱うようなアンテナでは、

電流分布

$$I(z)$$

のフーリエ変換が

遠方界放射パターン

$$F(\theta)$$

になります。

例えば一様線状アレーでは

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jkn d \cos \theta}$$

となり、

これは実質的に

「電流分布の空間フーリエ変換」

です。

そのため

- フーリエ級数
- フーリエ変換
- FFT（高速フーリエ変換）

はアンテナ工学・電磁波工学の基礎中の基礎です。

覚えてほしいポイント

- **複素フーリエ級数**：周期信号を離散的な周波数成分に分解する

$$x(t) = \sum C_n e^{jn\omega_0 t}$$

- **フーリエ変換**：非周期信号を連続的な周波数成分に分解する

$$X(\omega) = \int x(t) e^{-j\omega t} dt$$

- **フーリエ級数はフーリエ変換の特別な場合**

$$T \rightarrow \infty$$

とすると級数から変換へ移行する

- **通信・アンテナ・信号処理の共通言語**である

電磁波工学やアンテナ工学を学ぶ際には、「フーリエ変換とは波形を周波数ごとの成分に分解する操作であり、アンテナの放射パターンは電流分布の空間フーリエ変換である」という視点を持つと理解が深まります。これはマクスウェル方程式と並んで、通信工学の最重要概念の一つです。