数学（理工学部 建築都市デザイン学部 情報工学部）解答と解説

一般選抜〈前期３教科型〉

解　説

傾　向

１日目は、整数、複素数、空間図形、対数、接線、極限、積分、確率、関数のグラフが出題された。２日目は、ベクトル、集合、対数関数、指数関数、接線、複素数、積分、整数、関数のグラフが出題された。３日目は、複素数、ベクトル、積分、極限、接線、指数関数、平面図形、面積、関数のグラフが出題された。いずれも基本的な理解と計算力を問う標準的な問題である。

対　策

教科書の基本事項を確実に理解し、使いこなせる能力を身につけておくことが必要である。指数関数、対数関数、三角関数及び分数関数の性質を正しく理解するとともに、それらの関数の微分や積分、特に合成関数の微分、置換積分・部分積分の計算を正しくできるように十分練習すること、またそれらの関数のグラフを描く練習をすることが重要である。また、いろいろな数列やその和の計算ができるようにすること。また、平面上のベクトル、曲線および複素平面に関する問題では、単に式の計算だけでなく、図示して幾何的に考察することが有効である。問われている内容を理解して、見通しを立てる習慣を身につけておくことも必要である。出題されるほとんどの問題の難易度は、通常の教科書の基本問題や発展問題の水準であるので、教科書の例題や巻末問題を十分復習し、解答に際して、自分の考えを論理的に記述する能力を身につけることが重要である。

解答

理工学部：全学科
建築都市デザイン学部：全学科
情報工学部：全学科

［令和７年２月１日（土）実施］

1. (1)　$(x+1)(x-y)=7$ より $(x+1,\,x-y)=(1,7),\,(7,1),\,(-1,-7),\,(-7,-1)$ となる。したがって，
$\underline{(x,y)=(0,-7),\,(6,5),\,(-2,5),\,(-8,-7)}$。

(2)　余弦定理より $2^2=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cos\angle\mathrm{AOB}$ となり，$\underline{\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{7}{8}}$ となる。$0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ と
$z=3\sin\angle\mathrm{AOB}+(3\cos\angle\mathrm{AOB})i$ より
$\underline{z=\dfrac{3\sqrt{15}}{8}+\dfrac{21}{8}i}$。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(1,3,0)$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(2,0,-3)$ より
$\mathrm{P}=s(1,3,0)+t(2,0,-3)+(1,1,2)$ となる。
これを解くと $s=3$，$t=2$，$\underline{k=8}$。

2. (1)　$(\log(ax))'=\dfrac{1}{x}$ より $(t,\log(at))$ における接線の方程式は $y=\dfrac{1}{t}(x-t)+\log(at)$ となる。
これが $y=\dfrac{1}{3}x$ と一致するから，
$\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{3}$，$0=-1+\log(at)$ となる。
これを解くと，$t=3$，$\underline{a=\dfrac{e}{3}}$。

(2)　$\underline{f'(x)=\dfrac{\pi}{4}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{x}{2}\right)}$ となる。

$$\frac{xf(\pi)-\pi f(x)}{x-\pi}=\frac{(x-\pi)f(\pi)-\pi(f(x)-f(\pi))}{x-\pi}$$
$$=f(\pi)-\pi\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$$ より
$$\lim_{x\to\pi}\frac{xf(\pi)-\pi f(x)}{x-\pi}=f(\pi)-\pi f'(\pi)$$ となる。
$f(\pi)=1$ と $f'(\pi)=0$ より
$$\underline{\lim_{x\to\pi}\frac{xf(\pi)-\pi f(x)}{x-\pi}=1}。$$

(3)
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x(\tan x)'dx$$
$$=[x\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx=[x\tan x+\log(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{\pi}{3}\sqrt{3}+\log\frac{1}{2}-\log1=\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\log2}。$$

3. (1) $\dfrac{{}_3C_2}{{}_9C_2}\dfrac{{}_4C_2}{{}_9C_2}=\dfrac{1}{72}$。

(2) A から赤玉 2 個と B から赤玉 2 個，A から白玉 2 個と B から白玉 2 個の場合であるから
$\dfrac{{}_3C_2}{{}_9C_2}\dfrac{{}_4C_2}{{}_9C_2}+\dfrac{{}_6C_2}{{}_9C_2}\dfrac{{}_5C_2}{{}_9C_2}=\dfrac{7}{54}$。

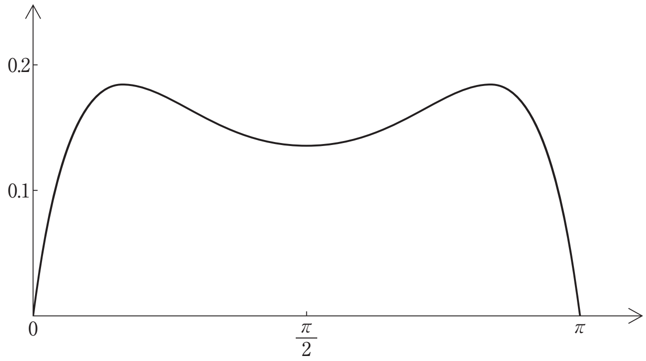
(3) A から赤玉 2 個と B から白玉 2 個，A から白玉 2 個と B から赤玉 2 個，または A から赤玉 1 個と白玉 1 個および B から赤玉 1 個と白玉 1 個の場合であるから
$\dfrac{{}_3C_2}{{}_9C_2}\dfrac{{}_5C_2}{{}_9C_2}+\dfrac{{}_6C_2}{{}_9C_2}\dfrac{{}_4C_2}{{}_9C_2}+\dfrac{{}_3C_1\cdot{}_6C_1}{{}_9C_2}\dfrac{{}_5C_1\cdot{}_4C_1}{{}_9C_2}=\dfrac{10}{27}$。

4. (1) $f'(x)=e^{-2\sin x}(\cos x-2(\cos x)(\sin x))$
$\quad=e^{-2\sin x}\cos x(1-2\sin x)=0$ より，
$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{6}$。

(2) 増減表は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{5\pi}{6}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘	$\dfrac{1}{e^2}$	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘	0

で



(3) $0\leqq k<\dfrac{1}{e^2}$，$k=\dfrac{1}{2e}$。

[令和 7 年 2 月 2 日(日)実施]

1. (1) $9=(4\vec{a}-3\vec{b})\cdot(4\vec{a}-3\vec{b})$
$\quad=16|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2-24\vec{a}\cdot\vec{b}=64+81-24\vec{a}\cdot\vec{b}$
$\quad=145-24\vec{a}\cdot\vec{b}$
となるから $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{17}{3}$ である。
$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}$
$\quad=9t^2+2\dfrac{17}{3}t+4$
$\quad=9\left(t+\dfrac{17}{27}\right)^2+4-9\left(\dfrac{17}{27}\right)^2$ より
$t=\dfrac{-17}{27}$。

(2) 実数 x が A にはいるとき，$a-1\leqq x\leqq a+1$ である。したがって $0\leqq 2a+3-(a+1)=a+2$ より
$a\geqq -2$。

(3) 対数関数の定義域に関する条件より $x>0$，$y>0$ となる。$\log_4\dfrac{x}{y}=1=\log_4 4$ より $x=4y$ である。
$0=\dfrac{x}{2^x}-\dfrac{y}{2^y}=\dfrac{4y}{2^{4y}}-\dfrac{y}{2^y}=\dfrac{y}{2^{4y}}(4-2^{3y})$ となる。
したがって $y=\dfrac{2}{3}$ となる。したがって
$x=\dfrac{8}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$。

2. (1) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ の両辺を x で微分すると
$x\dfrac{1}{6}+y\dfrac{y'}{2}=0$ となるから，$y\neq 0$ のとき
$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{3y}$ を得る。したがって点$(3,-1)$における接線の傾きは 1 となり，接線の方程式は
$y=x-4$。

(2) $|z|^2=|z|z||=|3+4i|=\sqrt{25}=5$ であるから
$|z|=\sqrt{5}$ で，$z=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(3+4i)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}(3+4i)$ となる。逆に $z=\dfrac{\sqrt{5}}{5}(3+4i)$ は確かに
$z|z|=3+4i$ を満たすから $z=\dfrac{\sqrt{5}}{5}(3+4i)$。

(3) $t=\sqrt{x}$ とおくと，$t^2=x$，$2tdt=dx$ で，
$\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx=\int_1^2 2te^t dt=2[(t-1)e^t]_1^2=2e^2$。

3. (1) $(3,5,7)$。(他には$(3,7,11)$，$(3,11,19)$，$(5,11,17)$，$(7,13,19)$)。

(2) $a_1=2$ とすると，$a_3=a_1+2d$ は偶数となる。a_3 は素数であるから $a_3=2$ となって矛盾する。

(3) $a_1<a_2<a_3$ より a_2，a_3 は奇素数であるから，
$d=a_3-a_2$ は偶数。

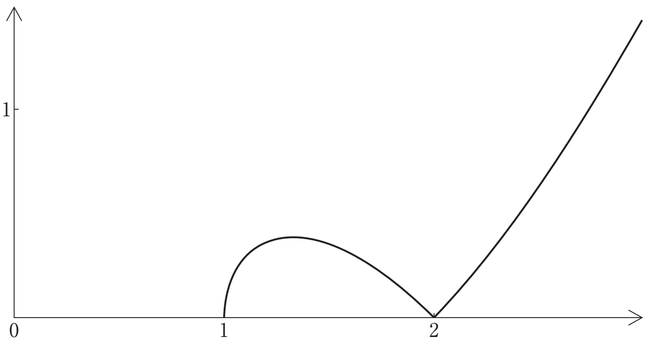
(4) $d=3k+r$，$r=1,2$ とする。
$a_2=a_1+d=3k+a_1+r$，$a_3=3k+a_1+2r$ である。
$r=1$ のとき $a_2=3k+a_1+1$，$a_3=3k+a_1+2$ で，
$r=2$ のとき $a_2=3k+a_1+2$，$a_3=3(k+1)+a_1+1$
となるから，a_1，a_2，a_3 のどれかは 3 の倍数となる。a_1，a_2，a_3 は素数で $a_1<a_2<a_3$ であるから
$a_1=3$ となる。

4. (1) $\underline{x \geqq 1}$。

(2) $f'(x)=\dfrac{(x-2)(3x-4)}{2\sqrt{(x-1)(x-2)^2}}$ より増減表は

x	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

でグラフは



(3) $\underline{k=0,\ \dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$。

[令和7年2月3日(月)実施]

1. (1) $(z-i)^3=-i=\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$ であるから

$z-i=\cos\left(\dfrac{1}{2}\pi+\dfrac{2}{3}\pi k\right)+i\sin\left(\dfrac{1}{2}\pi+\dfrac{2}{3}\pi k\right)$

$(k=0, 1, 2)$ である。したがって

$z-i=i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$ で,

$\underline{z=2i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}}$。

(2) $0=(k, k+1, k)\cdot(2k+2, -3, 2k+5)$

$=4k^2+4k-3=(2k+3)(2k-1)$ となる。

したがって,$\underline{k=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-3}{2}}$。

(3) $t=4-x^2$ とおくと

x	0	$\to$	1
t	4	$\to$	3

と $dt=-2xdx$ より

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^1\frac{-1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=\frac{-1}{2}\int_4^3\frac{1}{\sqrt{t}}dt=-[t^{1/2}]_4^3$$

$$=\underline{2-\sqrt{3}}。$$

2. (1) $F'(x)=xe^{x^2}$ である。

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{F(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}=F'(2)=\underline{2e^4}$。

(2) $y=x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の方程式は

$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$ となる。

$y=(x-1)^2+1$ 上の点 $(b, (b-1)^2+1)$ における

接線の方程式は $y=2(b-1)(x-b)+(b-1)^2+1$

$=2(b-1)x-b^2+2$ となる。

したがって,$a=b-1$,$-a^2=-b^2+2$ となる。

これを解くと,$a=\dfrac{1}{2}$,$b=\dfrac{3}{2}$ となるから,

直線の方程式は $\underline{y=x-\dfrac{1}{4}}$。

(3) $0=9^x-6^x-2\cdot4^x=(3^x+2^x)(3^x-2\cdot2^x)$ より

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=2$ となる。したがって,$\underline{x=\log_{\frac{3}{2}}2}$。

3. (1) $\cos\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\underline{\dfrac{4}{5}}$。

(2) $\angle\mathrm{BOC}$ は鈍角より,$\cos\angle\mathrm{BOC}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\angle\mathrm{AOC}\right)$

$=-\sin\angle\mathrm{AOC}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=-\dfrac{3}{5}$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{BOC}=5\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\underline{-3}$。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ で,$0=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$-(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=(1-t)(-3)+5t-4-5(1-t)-t(-3)$

$=16t-12$ となるから,$\underline{t=\dfrac{3}{4}}$。

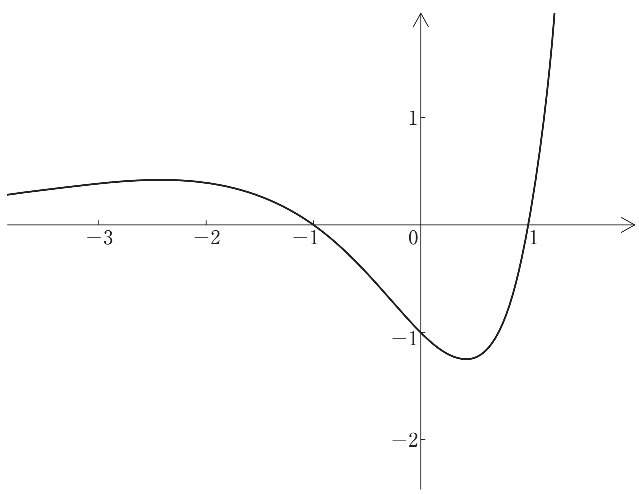
4. (1) $f'(x)=(x^2+2x-1)e^x=((x+1)^2-2)e^x$ より

$x=\underline{-1\pm\sqrt{2}}$。

(2) 増減表は

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2(1+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-2(-1+\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}$	$\nearrow$

でグラフは



数学(理・建・情)

(3) $\int_{-1}^{1} -(x^2-1)e^x dx = [-(x^2-1)e^x]_{-1}^{1}$
$+\int_{-1}^{1} 2xe^x dx = [-(x^2-1)e^x]_{-1}^{1} + [2xe^x]_{-1}^{1}$
$-\int_{-1}^{1} 2e^x dx = [-(x^2-1)e^x]_{-1}^{1} + [2xe^x]_{-1}^{1}$
$+[-2e^x]_{-1}^{1} = [(-x^2+2x-1)e^x]_{-1}^{1} = \underline{4e^{-1}}$。

数学(理・建・情)