一般選抜〈中期 3 教科型〉

解　説

傾　向

２次方程式の解、対数関数、積分、接線、空間図形、整数、面積、関数のグラフが出題された。いずれも基本的な理解と計算力を問う標準的な問題である。

対　策

教科書の基本事項を確実に理解し、使いこなせる能力を身につけておくことが必要である。指数関数、対数関数、三角関数及び分数関数の性質を正しく理解するとともに、それらの関数の微分や積分、特に合成関数の微分、置換積分・部分積分の計算を正しくできるように十分練習することと、またそれらの関数のグラフを描く練習をすることが重要である。また、いろいろな数列やその和の計算ができるようにすること。また、平面上のベクトル、曲線および複素平面に関する問題では、単に式の計算だけでなく、図示して幾何的に考察することが有効である。問われている内容を理解して、見通しを立てる習慣を身につけておくことも必要である。出題されるほとんどの問題の難易度は、通常の教科書の基本問題や発展問題の水準であるので、教科書の例題や巻末問題を十分復習し、解答に際して、自分の考えを論理的に記述する能力を身につけることが重要である。

解答

理工学部：全学科
建築都市デザイン学部：全学科
情報工学部：全学科

[令和７年２月20日(木)実施]

1. (1) $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ で,

$-b=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-a}{b}$ より $a=b^2$ となる。

また, $\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{\alpha\beta}=8a$ より, $1=8ab=8b^3$ となる。

したがって $b=\dfrac{1}{2}$ となる。したがって

$\underline{a=\dfrac{1}{4}}$, $\underline{b=\dfrac{1}{2}}$ となる。

(2) $2=\log(x+2)-\log x=\log\dfrac{x+2}{x}$ となるから

$\dfrac{x+2}{x}=e^2$ となる。これを解くと $x=\underline{\dfrac{2}{e^2-1}}$。

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(3x)+\sin(-x)\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(3x)}{3}+\cos(x)\right]_0^{\pi}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(3\pi)}{3}+\cos(\pi)-\left(\frac{-\cos(0)}{3}+\cos 0\right)\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{-1}{3}+1\right)\right)=\underline{\frac{-2}{3}}$。

2. (1) $\dfrac{dy}{dx}=-2xe^{-x^2}$ であるから $x=t$ での接線の方程式は $y=-2te^{-t^2}(x-t)+e^{-t^2}$ である。$(a,0)$を通るから, $0=-2te^{-t^2}(a-t)+e^{-t^2}=e^{-t^2}(2t^2-2ta+1)$

$=e^{-t^2}\left(2\left(t-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{2}+1\right)$ となる。接線がただひとつであるから, この方程式を満たす t の値は一つである。したがって, $a=\underline{\pm\sqrt{2}}$。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-1,1,0)$で, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(a,a,a-1)$より,
直線 BA と直線 DC が交点を持つためには,
$(-1,1,0)s+(1,0,0)=(a,a,a-1)t+(0,0,1)$が解を持つことが必要十分である。これを解いて

$s=\dfrac{1}{2}$, $t=\dfrac{3}{2}$, $\underline{a=\dfrac{1}{3}}$。

(3) $a=\displaystyle\int_{-1}^{2}f(t)\,dt$ とおくと $f(x)=3x^2+2x-a$ となる。

したがって $a=\displaystyle\int_{-1}^{2}3t^2+2t-a\,dt=\left[t^3+t^2-at\right]_{-1}^{2}$

$=12-3a$ となる。この方程式を解くと, $a=3$ となる。また逆に $f(x)=3x^2+2x-3$ は等式

$f(x)=3x^2+2x-\displaystyle\int_{-1}^{2}f(t)\,dt$ をみたすから,

$f(x)=\underline{3x^2+2x-3}$。

3. (1) $\underline{37}$。

(2) $p_n\geqq 3n+2$ ならば, $p_{n+1}>p_n$ より $p_{n+1}\geqq 3(n+1)$ となる。$p_n=3n+1$ とする。$n\geqq 1$ より, $4\leqq 3n+1$ となり $p_n\neq 2$ で, p_n は奇数であることを分かる。したがって $3n+2$ は偶数で $3n+2\geqq 5$ であるから $3n+2$ が素数になることはない。したがって $p_{n+1}\geqq 3(n+1)$となる。

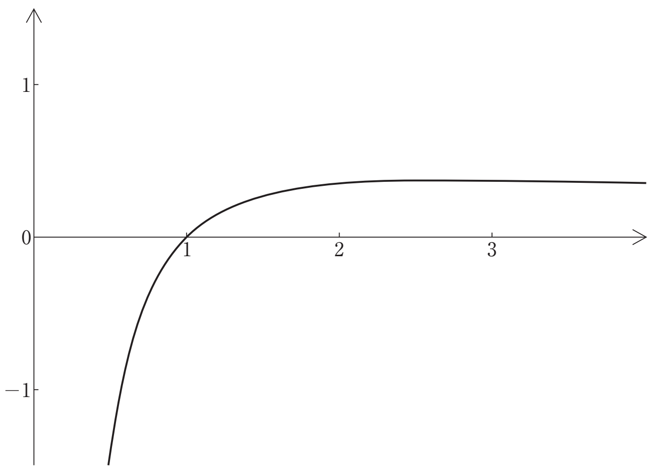
(3) $n=12$ のとき，$37=3\cdot 12+1$ が成り立っている。n まで $p_n \geqq 3n+1$ が成り立つと仮定して，$p_{n+1} \geqq 3(n+1)+1$ が成り立つことを示す。(2)より $p_{n+1} \geqq 3(n+1)$ が分かる。$n \geqq 12$ より $3(n+1)>3$ で，$3(n+1)$ は 3 とは異なる 3 の正の倍数であるから素数ではない。したがって，$p_{n+1}>3(n+1)$ となり，$p_{n+1} \geqq 3(n+1)+1$ が示された。

4. (1) $f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ となる。増減表

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

より，$f(x)$ は $x=e$ で<u>極大値 e^{-1}</u> をとる。

(2)



(3) $x=a$ での接線の方程式は
$y=\dfrac{1-\log a}{a^2}(x-a)+\dfrac{\log a}{a}$ である。$(0,0)$ を通るから $0=\dfrac{1-\log a}{a^2}(-a)+\dfrac{\log a}{a}=\dfrac{-1}{a}+\dfrac{2\log a}{a}$，
したがって $a=e^{1/2}$ となる。面積は
$\dfrac{1}{2}e^{1/2}\dfrac{e^{1/2}}{2e}-\displaystyle\int_1^{e^{1/2}}\dfrac{\log x}{x}dx=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\left[(\log x)^2\right]_1^{e^{1/2}}$
$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}=\underline{\dfrac{1}{8}}$。

数学(理・建・情)