一般選抜〈中期２教科型〉

解　説

傾　向

２次不等式、複素数、指数、三角関数、数列、多項式の割り算、確率、ベクトル、放物線、微分、積分など、数学Ⅰ、Ⅱ、A、B（数列）、C（ベクトル）の範囲からまんべんなく出題された。大半は標準的な解法、計算量で解くことができる問題であるので、それぞれの分野における基本事項を確実に押さえた上で、標準的な問題をスムーズに解けるような実力を養っておくことが肝要である。また、簡単な問題であっても不注意による計算ミスをしないように注意したい。

対　策

1.⑵は２次不等式の問題であるが、不等式の解が与えられているので、２次不等式を直接解くのではなく、解きやすい解法を工夫することが大事である。

1.⑶は指数関数の基本的な性質を使った変形を着実にすること。また指数関数の定義域は正ではなく実数全体であることや、式変形中の不等号の向きや、符号の向きを間違えないよう注意深く解きたい。

1.⑹では多項式の除算の定義を理解し立式すること。

1.⑺は座標空間内の円や距離を適切に扱えるようにしておくことが大事である。

1.⑻は座標空間内の正六面体（立方体）やその切り口を正しくイメージすることと、ベクトルの扱い方を習得しておくことが重要である。

2.では、２次関数の接線や、直線と２次関数の囲む図形の面積、といった基本的なものであるので確実に解きたい。

解答

環境学部：全学科　　メディア情報学部：全学科
デザイン・データ科学部：デザイン・データ科学科
都市生活学部：都市生活学科
人間科学部：人間科学科

［令和７年２月20日（木）実施］

1. ⑴　２次関数 $f(x)$ を $f(x)=(x-a)(x-b)-(x+1)$ とすると，２次不等式 $f(x)<0$ の解が $1<x<5$ となるから，$f(1)=(1-a)(1-b)-2=0$ および $f(5)=(5-a)(5-b)-6=0$ が成り立つ。これらを整理すると，$ab-a-b-1=0$ および $ab-5a-5b+19=0$。ここから $a+b=5$，$ab=6$ を得て，$b=5-a$ を後者の式に代入して得られる $a(5-a)=6$ を解くと，$a=2, 3$ である。$a=2$ は $a>b$ すなわち $a>5-a$ を満たさないから，$a=\boxed{3}$ ア）であり，$b=\boxed{2}$ イ）である。

⑵　$\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ だから $\dfrac{1}{1+i}$ の実部は $\boxed{\dfrac{1}{2}}$ ウ）であり，虚部は $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$ エ）である。

$\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{(1+i)^3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^3=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}i$

だから $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{(1+i)^3}$ の実部は $\boxed{\dfrac{1}{4}}$ ウ）であり，虚部は $\boxed{-\dfrac{3}{4}}$ エ）である。

⑶　$2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x+1}>\dfrac{27}{4}$ の両辺を２で割ると，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x+1}>\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$ となる。この不等式の両辺の $\dfrac{2}{3}$ を底とする対数をとると，$0<\dfrac{2}{3}<1$ だから $2x+1<-3$ となる。これより $\boxed{x<-2}$ キ）を得る。

⑷　三角関数の２倍角の公式より $x^2+2xy-3y^2=\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta-3\sin^2\theta=2\sin\theta\cos\theta+2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-1=\boxed{\sin 2\theta+2\cos 2\theta-1}$ ク）$=\sqrt{5}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\theta+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\theta\right)-1$ となる。いま，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ で $\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる t をとると，$\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ だから，$x^2+2xy-3y^2=\sqrt{5}\,(\sin 2\theta\cos t+\cos 2\theta\sin t)-1=\sqrt{5}\,(\sin(2\theta+t))-1$ となる。$t\leqq 2\theta+t<4\pi+t$ の範囲で θ が動くとき，$x^2+2xy-3y^2$ の最大値は $\boxed{\sqrt{5}-1}$ ケ）であり，最小値 $\boxed{-\sqrt{5}-1}$ コ）である。

⑸　$\{a_n\}$ は初項が３で６ずつ増える，公差が６の等差数列なので，その一般項は $a_n=3+6(n-1)=\boxed{6n-3}$ サ）であり，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{1}{2}n(a_1+a_n)=\boxed{3n^2}$ シ）である。数列 $\{b_n\}$ の第２項から第11項ま

での 10 個の数を並べると 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61 であり，この中で素数でないのは $25=5^2$, $49=7^2$，$55=5\times 11$ の 3 個だから，現れる素数は $\boxed{7}$ ス) 個である。表の 5 で始まる縦の列は，6 で割った余りが 5 であり，6 で割った余りが 5 である自然数が全て含まれる。したがって，自然数 k が，表の 5 で始まる縦の列に現れるための必要十分条件は k を 6 で割った余りが 5 であることである。二項定理より，$(6-1)^n={}_nC_0 6^n+{}_nC_1 6^{n-1}(-1)+{}_nC_2 6^{n-2}(-1)^2+\cdots+{}_nC_{n-1}6^1(-1)^{n-1}+{}_nC_n(-1)^n$ となる。n が偶数のとき ${}_nC_n(-1)^n=1$ だから，n によって異なる適当な整数 Q_n を用いて $c_n=5^n=6\times Q_n+1$ と書け c_n を 6 で割った余りが 5 ではないため，n が偶数のとき c_n は表の 5 で始まる縦の列に現れない。一方で，n が奇数のとき ${}_nC_n(-1)^n=-1$ だから，n によって異なる適当な整数 Q_n を用いて $c_n=5^n=6\times Q_n-1=6\times(Q_n-1)+5$ と書け c_n を 6 で割った余りが 5 であり，n が奇数のとき c_n は表の 5 で始まる縦の列に現れる。これらより，$d_1=c_1$，$d_2=c_3$，$d_3=c_5$ のように $\{d_n\}$ は $\{c_n\}$ の奇数番目の項を取り出した数列であるから，$d_n=c_{2n-1}=\boxed{5^{2n-1}}$ セ) となる。

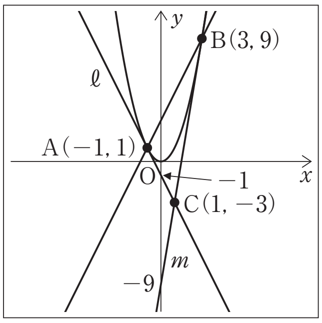
(6)　$P(x)$ は多項式 $Q_1(x)$ を用いて $P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+10x-1$ と表せる。$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+10x-1=(x-1)^2Q_1(x)+10(x-1)+9=(x-1)\{(x-1)Q_1(x)+10\}+9$ だから，$P(x)$ を $x-1$ で割った余りは $\boxed{9}$ ソ) である。$P(x)$ を $(2x+1)(x-1)$ で割った余りは定数 a，b を用いて $ax+b$ と表せ，$P(x)$ は多項式 $Q_2(x)$ を用いて，$P(x)=(2x+1)(x-1)Q_2(x)+ax+b$ と表せる。$P(x)=(2x+1)\left\{(x-1)Q_2(x)+\dfrac{a}{2}\right\}-\dfrac{a}{2}+b$ であるが，$P(x)$ を $2x+1$ で割った余りは 3 だから $-\dfrac{a}{2}+b=3$ である。$P(x)=(x-1)\{(2x+1)Q_2(x)+a\}+a+b$ であるが，$P(x)$ を $x-1$ で割った余りは 9 だから $a+b=9$ である。これらより，$a=4$，$b=5$ となるから，$P(x)$ を $(2x+1)(x-1)$ で割った余りは $\boxed{4x+5}$ タ) である。$P(x)$ を $(2x+1)(x-1)^2$ で割った余りは定数 s，t，u を用いて sx^2+tx+u と表せ，$P(x)$ は多項式 $Q_3(x)$ を用いて，$P(x)=(2x+1)(x-1)^2Q_3(x)+sx^2+tx+u$ と表せる。$P(x)=(2x+1)\left\{(x-1)^2Q_3(x)+\dfrac{1}{2}sx-\dfrac{1}{4}s+\dfrac{1}{2}t\right\}+\dfrac{1}{4}s-\dfrac{1}{2}t+u$ であるが，$P(x)$ を $2x+1$ で割った余りは 3 だから $\dfrac{1}{4}s-\dfrac{1}{2}t+u=3$ である。$P(x)=(x-1)^2\{(2x+1)Q_3(x)+s\}+(2s+t)x+(-s+u)$ であるが，$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは $10x-1$ だから $2s+t=10$，$-s+u=-1$ である。これらから s，t，u，を求めるとそれぞれ $s=4$，$t=2$，$u=3$ だから $P(x)$ を $(2x+1)(x-1)^2$ で割った余りは $\boxed{4x^2+2x+3}$ チ) である。

(7)　球面 Q が xy 平面，yz 平面，zx 平面のどれとも共有点を持たないのは Q の中心の x，y，z 座標のすべてが Q の半径よりも大きいときだから，$a>d$ かつ $b>d$ かつ $c>d$ となる確率を求めればよい。ある d のとき a，b，c 数の組は $(d-1)^3$ 通りあるから，共有点を持たない確率は $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(k-1)^3\div 6^4=(1+8+27+64+125)\div 6^4=\frac{225}{1296}=\boxed{\frac{25}{144}}$ ツ) である。球面 Q が xy 平面と交わって円ができるのは $c<d$ のときである。このとき，交わってできる円の半径は $\sqrt{d^2-c^2}$ だから，交わって円ができその半径が 4 以上となるのは，$d^2-c^2\geqq 4^2$ のとき，すなわち $d=5$ で $c=1, 2, 3$ のときか，$d=6$ で $c=1, 2, 3, 4$ のときだから，その確率は $7\times 6^2\div 6^4=\boxed{\dfrac{7}{36}}$ テ) である。交わって半径最大の円ができるのは a，b，c が最小の 1 で，d が最大の 6 のとき。このとき Q の方程式は $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6^2$ すなわち $\boxed{x^2-2x+y^2-2y+z^2-2z-33=0}$ ト) である。

(8)　平面 OPQ は $\boxed{0<t\leqq\dfrac{1}{2}}$ ナ) のとき線分 BF と共有点を 1 点持ち，正六面体との切り口はひし形となる。このとき，平面 OPQ と線分 BF との共有点を T とすると，対角線 PQ の長さは $\mathrm{PQ}=3\sqrt{2}$，対角線 OT の長さは $\mathrm{OT}=\sqrt{\mathrm{OB}^2+\mathrm{BT}^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(3\times 2\times t)^2}=3\sqrt{2+4t^2}$ だから，ひし形の面積は $\mathrm{PQ}\times\mathrm{OT}\div 2=\boxed{9\sqrt{1+2t^2}}$ ニ) である。$\boxed{\dfrac{1}{2}<t<1}$ ヌ) のとき，平面 OPQ は，線分 EF および線分 FG とそれぞれの線分の端点以外で 1 点ずつ共有点を持ち，正六面体との切り口は五角形となる。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ である。点 R は平面 OPQ 上の点だから，R の位置ベクトルは実数 u，v を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=u\overrightarrow{\mathrm{OP}}+v\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t(u+v)\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と表せる。点 R は線分 EF 上だから $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の係数は 1 となり $u=1$，$t(u+v)=1$ が成り立つ。これより $v=\dfrac{1}{t}-1$ となり $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{\left(\dfrac{1}{t}-1\right)}$ ネ) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる。線分 ER の長さは $3\left(\dfrac{1}{t}-1\right)$ だから辺 FR の長さは $3-\mathrm{ER}=6-\dfrac{3}{t}$。角 F が直角な直角三角形 RFS は対称性から FR＝FS の 2 等辺三角形であり，辺 RS の長さは $\sqrt{2}\times\mathrm{FR}=\boxed{6\sqrt{2}-\dfrac{3}{t}\sqrt{2}}$ ノ) である。

2. (1) 放物線 Q に点 (k, k^2) で接する接線は傾きが $2k$ なので，その方程式は $y=2k(x-k)+k^2$ すなわち $y=2kx-k^2$ である。これが点 $(1, -3)$ を通るから $-3=2k-k^2$ であり，これを k について解くと $k=-1, 3$ となる。この k がそれぞれ点 A，B の x 座標であり，点 A の座標は $\underline{(-1, 1)}$，点 B の座標は $\underline{(3, 9)}$ となり，接線 ℓ の方程式は $\underline{y=-2x-1}$，接線 m の方程式は $\underline{y=6x-9}$ となる。

(2) 次の図のとおり。



(3) 点 A，B を通る直線は傾き $\dfrac{9-1}{3-(-1)}=2$ で点 $(-1, 1)$ を通るからその方程式は $y=2(x+1)+1$，すなわち $y=2x+3$ となる。求める面積は

$\displaystyle\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\,dx=\underline{\frac{32}{3}}$ である。

(4) 求める面積は，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{x^2-(-2x-1)\}\,dx+\int_{1}^{3}\{x^2-(6x-9)\}\,dx=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\underline{\frac{16}{3}}$ である。

数学（環・メ・デ・都・人）