

数 学〔問 題〕

(100点・90分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は4ページあり、解答用紙は4ページ(2つ折り2枚)あります。
試験中に問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁などに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
3. 解答用紙は2つ折りで4ページですが、切り離してはいけません。
4. 試験開始後、ただちに**解答用紙各ページ**の所定記入欄のすべてに、**受験番号と氏名**を記入しなさい。
5. 問題冊子の余白や解答用紙の裏面余白は、計算などに適宜利用してよいが、**解答は必ず解答用紙の所定の場所**に答えだけでなく、**その過程も記述**しなさい。
6. 試験終了後、**提出は解答用紙のみ**とし、問題冊子は持ち帰りなさい。

1. 次の問に答えよ。

- (1) a, b を実数とする。2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解を α, β とおくと、2次方程式 $x^2 + bx + 8a = 0$ の解が $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ であるとする。このとき a, b の値を求めよ。
- (2) 方程式 $\log(2+x) = 2 + \log x$ を解け。
- (3) 定積分 $\int_0^{\pi} \sin x \cos 2x dx$ を求めよ。

2. 次の問に答えよ。

- (1) 曲線 $y = e^{-x^2}$ の接線で点 $P(a, 0)$ を通るものがただ1つであるとき、 a の値をすべて求めよ。
- (2) 座標空間の4点 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), D(a, a, a)$ に対し、直線 AB と直線 CD が交点をもつような a の値を求めよ。
- (3) 等式 $f(x) = 3x^2 + 2x - \int_{-1}^2 f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

3. n を自然数とし, n 番目の素数を p_n で表す。例えば

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$$

である。このとき, 次の間に答えよ。

- (1) p_{12} を求めよ。
- (2) $p_n \geq 3n + 1$ が成り立つならば, $p_{n+1} \geq 3(n+1)$ が成り立つことを示せ。
- (3) 12 以上のすべての自然数 n に対して不等式 $p_n \geq 3n + 1$ が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて示せ。

4. 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ に対して, 次の間に答えよ。

- (1) $f(x)$ の増減を調べて, $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ のグラフを描け。ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ を用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。
- (3) 点 $O(0, 0)$ から $y = f(x)$ のグラフに引いた接線を l とする。 $y = f(x)$ のグラフ, 接線 l および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(下 書 き 用 紙)