

数 学〔問 題〕

(100点・90分)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は4ページあり、解答用紙は4ページ(2つ折り2枚)あります。
試験中に問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁などに気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
3. 解答用紙は2つ折りで4ページですが、切り離してはいけません。
4. 試験開始後、ただちに**解答用紙各ページ**の所定記入欄のすべてに、**受験番号と氏名**を記入しなさい。
5. 問題冊子の余白や解答用紙の裏面余白は、計算などに適宜利用してよいが、**解答は必ず解答用紙の所定の場所**に答えだけでなく、**その過程も記述**しなさい。
6. 試験終了後、**提出は解答用紙のみ**とし、問題冊子は持ち帰りなさい。

1. 次の問に答えよ。

- (1) $x^2 - xy + x - y = 7$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。
(2) i を虚数単位とする。複素数平面上に相異なる 3 点 $O(0)$, $A(z)$, $B(4i)$ がある。

z が

$$|z| = 3, \quad |z - 4i| = 2, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとき, $\cos \angle AOB$ を求めよ。さらに z を求めよ。

- (3) 座標空間内の 3 点 $A(1, 1, 2)$, $B(2, 4, 2)$, $C(3, 1, -1)$ が定める平面上に点 $P(k, 10, -4)$ があるとき, k の値を求めよ。

2. 次の問に答えよ。

- (1) $a > 0$ とする。直線 $y = \frac{1}{3}x$ が曲線 $y = \log(ax)$ の接線であるとき, a の値を求めよ。

- (2) 関数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{x}{2}\right)$ に対して, $f'(x)$ を求めよ。さらに極限值

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{xf(\pi) - \pi f(x)}{x - \pi}$$

を求めよ。

- (3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ を求めよ。

3. 2つの袋 A, B がある。A には赤玉 3 個と白玉 6 個, B には赤玉 4 個と白玉 5 個が入っている。A から 2 個, B から 2 個, 合計 4 個の玉を取り出す。次の問に答えよ。

- (1) 取り出した 4 個の玉がすべて赤玉である確率を求めよ。
- (2) 取り出した 4 個の玉の色がすべて同じである確率を求めよ。
- (3) 取り出した 4 個の玉において, 赤玉が 2 個, 白玉が 2 個である確率を求めよ。

4. 関数 $f(x) = e^{-2\sin x} \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) に対して, 次の問に答えよ。

- (1) $0 < x < \pi$ の範囲で $f'(x) = 0$ となる x の値をすべて求めよ。
- (2) $f(x)$ の増減を調べて, $y = f(x)$ のグラフを描け。ただし, グラフの凹凸は調べなくてよい。
- (3) $f(x) = k$ となる x の個数がちょうど 2 個であるような定数 k の値の範囲を求めよ。

(下書き用紙)