

一般選抜〈前期 3 教科型〉

解説

傾向

1 日目は、数列、複素数、平面図形、不等式、対数関数、積分、確率、関数のグラフが出題された。2 日目は、2 次方程式の解、複素数、空間ベクトル、対数関数、領域と最大・最小、積分、平面図形、関数のグラフが出題された。3 日目は、2 次方程式の解、平面図形、空間図形、接線、三角関数、極限、関数のグラフ、面積が出題された。いずれも基本的な理解と計算力を問う標準的な問題である。

対策

教科書の基本事項を確実に理解し、使いこなせる能力を身につけておくことが必要である。指数関数、対数関数、三角関数及び分数関数の性質を正しく理解するとともに、

それらの関数の微分や積分、特に合成関数の微分、置換積分・部分積分の計算を正しくできるように十分練習すること、またそれらの関数のグラフを描く練習をすることが重要である。また、いろいろな数列やその和の計算ができるようにすること。また、平面上のベクトル、曲線および複素素平面に関する問題では、単に式の計算だけでなく、図示して幾何的に考察することが有効である。問われている内容を理解して、見通しを立てる習慣を身につけておくことも必要である。出題されるほとんどの問題の難易度は、通常の教科書の基本問題や発展問題の水準であるので、教科書の例題や巻末問題を十分復習し、解答に際して、自分の考えを論理的に記述する能力を身につけることが重要である。

解答

理工学部：全学科
建築都市デザイン学部：全学科
情報工学部：全学科

[令和 8 年 2 月 1 日(日)実施]

1. (1) $a_1 = 3$ である。 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= n^4 + n^2 + 1 - ((n-1)^4 + (n-1)^2 + 1) \\ &= n^4 - (n-1)^4 + n^2 - (n-1)^2 \\ &= (n^2 - (n-1)^2)(n^2 + (n-1)^2 + 1) \\ &= 2(2n-1)(n^2 - n + 1) \\ &= 2(2n-1)(n^2 - n + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x^2 + y^2 &= (x + iy)(x - iy) = (x + iy)(\overline{x + iy}) \\ &= (8 + 6i)^3 (\overline{8 + 6i})^3 = (8 + 6i)^3 (\overline{8 + 6i})^3 \\ &= ((8 + 6i)(\overline{8 + 6i}))^3 = (8^2 + 6^2)^3 \\ &= 100^3 = 1000000. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \overrightarrow{PA} &= (x+1, y+4), \quad \overrightarrow{PB} = (x-3, y+2) \text{ で,} \\ 11 &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (x+1)(x-3) + (y+4)(y+2) \\ &= x^2 - 2x + y^2 + 6y + 5 = (x-1)^2 + (y+3)^2 - 5 \\ \text{より } (x-1)^2 + (y+3)^2 &= 16 \text{ となる。これは中心が } (1, -3) \text{ で半径が } 4 \text{ の円であるから, } |\overrightarrow{OP}| \text{ の} \\ \text{最大値は } \sqrt{1^2 + (-3)^2} + 4 &= 4 + \sqrt{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (1) \quad \sqrt{2x-1} \text{ の定義域の条件から } x &\geq \frac{1}{2} \text{ である。} \\ \frac{1}{2} \leq x < 3 \text{ のときは, } \sqrt{2x-1} &\geq 0 > x-3 \text{ が成立} \\ \text{する。} x \geq 3 \text{ とする。両辺を 2 乗して} \\ 2x-1 &> (x-3)^2, \text{ したがって } x^2 - 8x + 10 < 0 \\ \text{であるから, } 4 - \sqrt{6} < x < 4 + \sqrt{6} &\text{ となる。} x \geq 3 \text{ で} \\ \text{あったから, } 3 \leq x < 4 + \sqrt{6} &\text{ となる。以上から,} \\ \frac{1}{2} \leq x < 4 + \sqrt{6}. & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 1 + \log_2(5x+9) &= \log_2(2(5x+9)), \\ 3\log_8 x + \log_2(x+1)^2 &= \log_2(x(x+1)^2) \text{ より} \\ 2(5x+9) &= x(x+1)^2 \text{ となる。したがって} \\ 0 &= x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x+2)(x-3)(x+3) \text{ で,} \\ x &= -3, -2, 3 \text{ となる。} 5x+9 > 0, x > 0, \\ (x+1)^2 > 0 \text{ より, } x &= 3. \end{aligned}$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 2x dx = \left[x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \cos 2x dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

3. (1) $(a, b) = (6, 5)$ で硬貨が表の場合のみであるから

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10C_2} = \frac{1}{90}.$$

- (2) $(a, b) = (6, 4)$ で硬貨が表, または $a = 10$, $1 \leq b \leq 9$ で硬貨の表裏は関係なしの場合であるから

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10C_2} + \frac{9}{10C_2} = \frac{19}{90}.$$

- (3) $(a, b) = (4, 1)$ で硬貨が表, $(a, b) = (3, 2)$ で硬貨が表, $(a, b) = (6, 1)$ で硬貨が裏の場合であるから

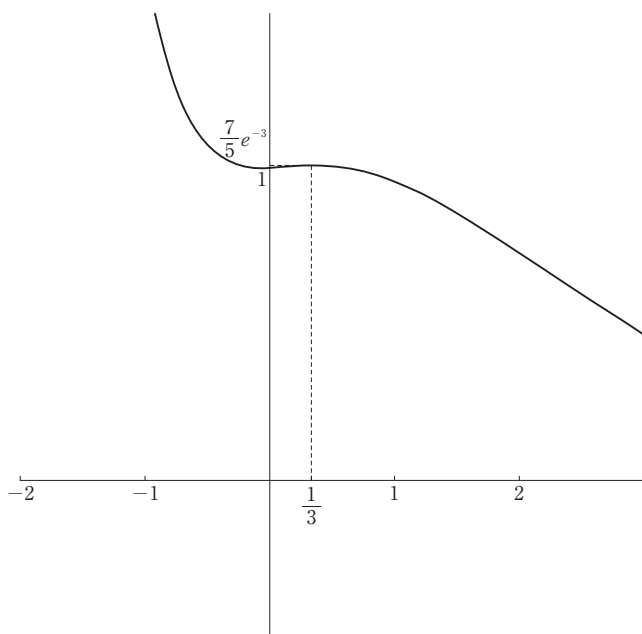
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10C_2} = \frac{1}{30}.$$

4. (1) $f'(x) = \frac{-x(3x-1)}{5} e^{-x} = 0$ より $x = 0, \frac{1}{3}$.

- (2) 増減表は

x	...	0	...	$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{7}{5}e^{-\frac{1}{3}}$	$\searrow$

で, グラフは



- (3) $1 < k < \frac{7}{5}e^{-\frac{1}{3}}$.

- (4) (3)より $e < \frac{7^3}{5^3} = 2.744$.

[令和8年2月2日(月)実施]

$$1. (1) \alpha + \beta = \frac{-5}{2}, \alpha\beta = 3 \text{ より } \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{-5}{2}\right)^3 - 3 \cdot 3 \cdot \frac{-5}{2}}{3} \\ = \frac{55}{24}.$$

- (2) $z^2 = \bar{z}$ の両辺の絶対値をとると $|z|^2 = |z|$ となるから, $|z| = 0$ または $|z| = 1$ である。 $|z| = 0$ ならば $z = 0$ である。 $|z| = 1$ とする。 $z\bar{z} = 1$ であるから $\bar{z} = z^{-1}$ で, $z^2 = z^{-1}$, したがって $z^3 = 1$ となる。

$$\text{したがって } z = 1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \text{ となる。}$$

$$\text{また逆に, } z = 0, 1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},$$

$$\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \text{ は } z^2 = \bar{z} \text{ を満たす。したがって}$$

$$z = 0, 1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

- (3) $0 = \vec{d} \cdot \vec{a} = s\vec{a} \cdot \vec{a} + t\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 9s + 17t - 1$,
 $0 = \vec{d} \cdot \vec{b} = s\vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{b} = 17s + 33t - 1$
 となる。これを解くと, $s = 2, t = -1$ 。

2. (1) $2^{10} = 1024 < 2026 < 2048 = 2^{11}$ と $a = \log_2 2026$ より $10 < a < 11$ である。したがって

$$\sqrt{(10-a)^2} + \sqrt{(11-a)^2} = a - 10 + 11 - a = 1.$$

- (2) $k = 2x + y$ とおくと, $y = -2x + k$ となる。直線 $y = -2x + k$ は, D の頂点 $(1, 1)$ を通るとき k は最大で $k = 3$, D の頂点 $(0, 0)$ を通るとき k は最小で $k = 0$ である。したがって $2x + y$ の最大値は3で, 最小値は0。

- (3) $t = \sqrt{x}$ とおくと, $t^2 = x$, $2t dt = dx$ で,
 $\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2t \sin t dt = [-2t \cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$
 $+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \cos t dt = [-2t \cos t + 2 \sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$
 $= -2\pi(-1) + 0 - (0 + 2) = 2(\pi - 1).$

3. (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。 $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ である。 $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = k\vec{b} - \vec{a}$ と $\overrightarrow{OP}$ は直交するから, $0 = (k\vec{b} - \vec{a}) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{-2}{3}|\vec{a}|^2$
 $+ \frac{k}{3}|\vec{b}|^2 + \left(\frac{2k}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{-2}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{k}{3}|\vec{b}|^2$
 $+ \left(\frac{2k}{3} - \frac{1}{3}\right)|\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle AOB = \frac{-2}{3} \cdot 1 + \frac{k}{3} \cdot 6^2$
 $+ \left(\frac{2k}{3} - \frac{1}{3}\right)1 \cdot 6 \cdot t$ より, $(6t + 18)k - 3t - 1 = 0$
 となる。 $-1 < t \leq 0$ より $6t + 18 \neq 0$ であるから
 $k = \frac{3t + 1}{6t + 18}.$

(2) $t = \cos \angle AOB$ で $\frac{\pi}{2} \leq \angle AOB < \pi$ であったから、
 まず $-1 < t \leq 0$ である。したがって、 $6t + 18 > 0$
 が分かる。 $0 \leq k \leq 1$ より $0 \leq \frac{3t+1}{6t+18} \leq 1$ となる。
 $6t + 18 > 0$ が分かっているから、 $0 \leq 3t + 1$ かつ
 $3t + 1 \leq 6t + 18$ となる。したがって $\frac{-1}{3} \leq t$ かつ
 $\frac{-17}{3} \leq t$ である。以上より $\frac{-1}{3} \leq t \leq 0$ 。

(3) s を実数として $\overrightarrow{OR} = s\vec{a}$ とする。 $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{QR}$ は直
 交するから、 $0 = (s\vec{a}) \cdot \left(s\vec{a} - \frac{3t+1}{6t+18}\vec{b}\right)$
 $= s\left(s|\vec{a}|^2 - \frac{3t+1}{6t+18}\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = s\left(s - \frac{t(3t+1)}{t+3}\right)$
 となる。したがって $s = 0$ または $s = \frac{t(3t+1)}{t+3}$ と
 なる。 $t = 0$ のとき、 $\frac{t(3t+1)}{t+3} = 0$ であるから、
 $s = \frac{t(3t+1)}{t+3}$ としてよい。 $\frac{-1}{3} \leq t \leq 0$ のとき、
 $|\overrightarrow{OR}| = |s\vec{a}| = |s| = \left|\frac{t(3t+1)}{t+3}\right| = -\frac{t(3t+1)}{t+3}$
 となる。 $f(t) = -\frac{t(3t+1)}{t+3}$ とおくと、
 $f'(t) = 3\frac{(t+3)^2 - 8}{(t+3)^2}$ となる。増減表は

t	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$-3+2\sqrt{2}$	$\cdots$	0
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

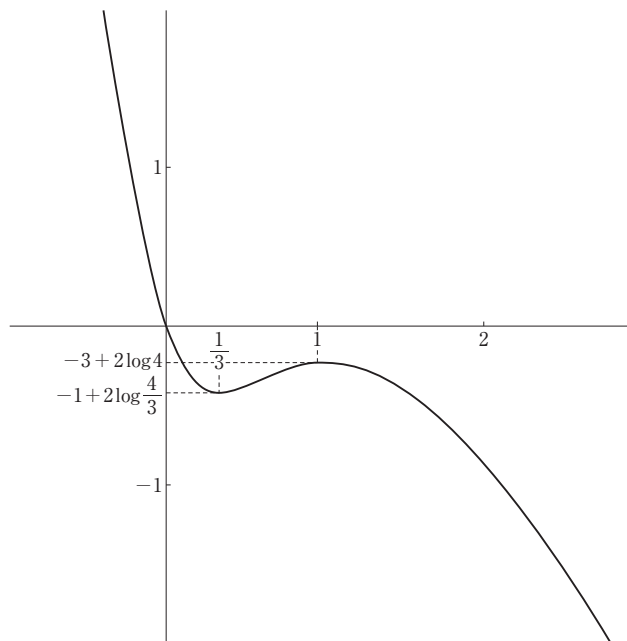
であるから、 $|\overrightarrow{OR}|$ が最大となる t の値は
 $-3+2\sqrt{2}$ 。

4. (1) $f'(x) = -\frac{3(1-4x+3x^2)}{1+3x^2} = 0$ より $x = \frac{1}{3}, 1$ 。

(2) 増減表は

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-1+2\log\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$-3+2\log 4$	$\searrow$

で、グラフは



(3) $-1+2\log\frac{4}{3} < k < -3+2\log 4$ 。

[令和8年2月3日(火)実施]

1. (1) $\alpha + \beta = 7$, $\alpha\beta = p$ より

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 7^3 - 3 \cdot 7p = 7$$

となる。これより $p = 16$ 。

(2) 円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおく。

$O(0, 0)$ を通るから $c = 0$ である。 $A(1, -1)$ を通る
 から $2 + a - b = 0$, $B(4, 4)$ を通るから
 $32 + 4a + 4b = 0$ を得る。これを解くと、 $a = -5$,
 $b = -3$ となる。したがって円の方程式は
 $x^2 + y^2 - 5x - 3y = 0$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{34}{4}。$$

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は平行でないから、実数 p, q を用い
 て $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB}$ と書くことが出来る。した
 がって、 $(2, 2, t) = p(1, 2, -1) + q(4, 5, 2)$ となる。
 これを解くと、 $p = \frac{-2}{3}$, $q = \frac{2}{3}$, $t = 2$ 。

2. (1) 曲線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の方程式は
 $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$ となる。

曲線 $y = x^2 + x + 1$ 上の点 $(b, b^2 + b + 1)$ における
 接線の方程式は $y = (2b + 1)(x - b) + b^2 + b + 1$
 $= (2b + 1)x - b^2 + 1$ となる。したがって
 $2a = 2b + 1$, $-a^2 = -b^2 + 1$ となる。これを解く
 と、 $a = \frac{-3}{4}$, $b = \frac{-5}{4}$ となるから、接線の方程
 式は $y = \frac{-3}{2}x - \frac{9}{16}$ 。

$$(2) \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos(-30^\circ) \\ + \cos 45^\circ \sin(-30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-1}{2} \\ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

半径1の円に内接する正24角形は、面積が

$$\sin\left(\frac{15}{2}\right)^\circ \cos\left(\frac{15}{2}\right)^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8} \text{ の三角} \\ \text{形を24個集めたものだから、その面積は} \\ 24 \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

$$(3) -\log n + \sum_{k=1}^n \frac{\log(n+k)}{n} = -\frac{n \log n}{n} \\ + \sum_{k=1}^n \frac{\log(n+k)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\log(n+k) - \log n) \\ = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) \text{ となる。したがって、} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\log n + \sum_{k=1}^n \frac{\log(n+k)}{n} \right] = \int_0^1 \log(1+x) dx \\ = [(1+x)\log(1+x) - x]_0^1 = 2\log 2 - 1.$$

3. (1) 円Cの方程式 $(x-1)^2 + (y-3)^2 - 1 = 0$ に
 $y = ax + 1$ を代入して整理すると
 $(a^2 + 1)x^2 - 2(2a + 1)x + 4 = 0$ となる。 x^2 の係数
 $a^2 + 1$ は0でなく、判別式を考えると
 $(2a + 1)^2 - 4(a^2 + 1) = 4a - 3 > 0$ となる。
 したがって、 $a > \frac{3}{4}$ 。

$$(2) \frac{|1 \cdot a - 3 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + a^2}} = \frac{|a - 2|}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

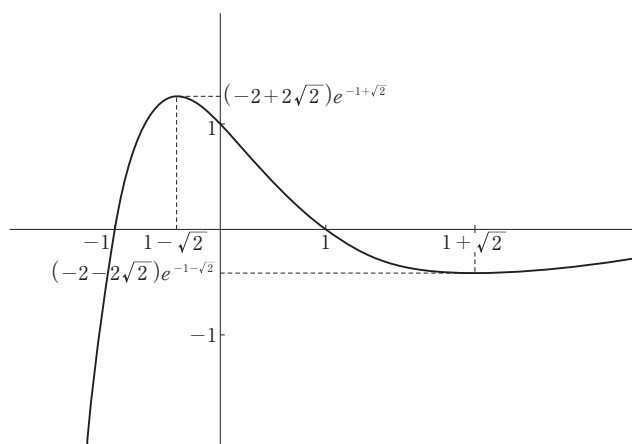
- (3) $\triangle PHQ$ は $\angle PHQ$ が直角である直角三角形である。
 $PQ = 1$, $QH = \frac{QR}{2} = 3PH$ であるから、
 $(1 + 3^2) \left(\frac{|a - 2|}{\sqrt{1 + a^2}} \right)^2 = 1$ となる。これより
 $(a - 3)(9a - 13) = 0$ となるから、 $a = 3, \frac{13}{9}$ 。

4. (1) $f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x} = ((x - 1)^2 - 2)e^{-x}$ より
 $x = 1 \pm \sqrt{2}$ 。

(2) 増減表は

x	...	$1 - \sqrt{2}$	...	$1 + \sqrt{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$(-2 + 2\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}$	↘	$(-2 - 2\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$	↗

で、グラフは



$$(3) \int_{-1}^1 (1 - x^2)e^{-x} dx = [-(1 - x^2)e^{-x}]_{-1}^1 \\ - \int_{-1}^1 2xe^{-x} dx = [(x^2 - 1)e^{-x}]_{-1}^1 + [2xe^{-x}]_{-1}^1 \\ - \int_{-1}^1 2e^{-x} dx = [(x^2 + 2x + 1)e^{-x}]_{-1}^1 = 4e^{-1}.$$