

一般選抜〈中期 3 教科型〉

解説

傾向

複素数、2 次方程式の解、平面ベクトル、指数関数、三角関数、対数関数、積分、平面図形、関数のグラフ、体積が出題された。いずれも基本的な理解と計算力を問う標準的な問題である。

対策

教科書の基本事項を確実に理解し、使いこなせる能力を身につけておくことが必要である。指数関数、対数関数、三角関数及び分数関数の性質を正しく理解するとともに、それらの関数の微分や積分、特に合成関数の微分、置換積

分・部分積分の計算を正しくできるように十分練習すること、またそれらの関数のグラフを描く練習をすることが重要である。また、いろいろな数列やその和の計算ができるようにすること。また、平面上のベクトル、曲線および複素平面に関する問題では、単に式の計算だけでなく、図示して幾何的に考察することが有効である。問われている内容を理解して、見通しを立てる習慣を身につけておくことも必要である。出題されるほとんどの問題の難易度は、通常の教科書の基本問題や発展問題の水準であるので、教科書の例題や巻末問題を十分復習し、解答に際して、自分の考えを論理的に記述する能力を身につけることが重要である。

解答

理工学部：全学科
建築都市デザイン学部：全学科
情報工学部：全学科

[令和 8 年 2 月 20 日(金)実施]

- P と Q の中点を R とおくと、 $\triangle OPQ$ は正三角形であるから、直線 OR と直線 PR は直交し、 $PR = \frac{1}{\sqrt{3}} OP$ となっている。したがって、
$$z = 2 - 6i + \frac{1}{\sqrt{3}}(6 + 2i) = (2 + 2\sqrt{3}) + \left(-6 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)i$$
 または
$$z = 2 - 6i - \frac{1}{\sqrt{3}}(6 + 2i) = (2 - 2\sqrt{3}) + \left(-6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)i$$
 となる。z の実部は正であるから
$$z = (2 + 2\sqrt{3}) + \left(-6 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)i。$$
 - $a \neq 0$ であるから、2 次方程式を a で割ると、 $x^2 - (1 - a^{-1})x + 1 = 0$ となる。
$$f(x) = x^2 - (1 - a^{-1})x + 1 = \left(x - \frac{1 - a^{-1}}{2}\right)^2 - \frac{(a^{-1} - 3)(a^{-1} + 1)}{4}$$
 とおく。 $f(0) = 1 > 0$ であるから、 $f(x) = 0$ が $x \geq 0$ となる解を持つためには、 $\frac{1 - a^{-1}}{2} \geq 0$ かつ判別式 $(1 - a^{-1})^2 - 4 = (a^{-1} - 3)(a^{-1} + 1) \geq 0$ が条件となる。したがって $a^{-1} \leq -1$ 、つまり $-1 \leq a < 0$ 。

$$(3) \quad |\vec{b}|^2 = 1 \neq 0 \text{ より, } |\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + t^2|\vec{b}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 \left(t + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right)^2 + \frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{b}|^2}$$

の最小値は

$$\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{b}|^2} = \frac{3^2 \cdot 1^2 - (3 \cdot 1 \cdot \cos \theta)^2}{1^2}$$

$= 9 - 9(\cos \theta)^2$ となる。この値が $2^2 = 4$ に一致するから $9 - 9(\cos \theta)^2 = 4$ で、 $\cos \theta \geq 0$ より

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}。$$

- $p = \log_3 2$ とおくと、 $3^p = 2$ である。 p は方程式の解の 1 つであるから、 $3^{3p+1} - 3^{2p} - 12 \cdot 3^p + \alpha = 3 \cdot 2^3 - 2^2 - 12 \cdot 2 + \alpha = -4 + \alpha = 0$ となる。したがって $\alpha = 4$ である。 $3^{3x+1} - 3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 4 = (3^x - 2)(3 \cdot 3^x - 1)(3^x + 2)$ より、他の解は $x = -1$ 。
 - 等差数列の公差を d とおくと、 $-1 = \log_2 \sin 3\theta + d$ 、 $\log_2 \cos 3\theta = \log_2 \sin 3\theta + 2d$ を得る。この 2 つの等式から d を消去して整理すると $\log_2 \sin 3\theta + \log_2 \cos 3\theta = -2$ を得る。 $\log_2 \sin 3\theta + \log_2 \cos 3\theta = \log_2 (\sin 3\theta \cos 3\theta) = \log_2 \frac{\sin 6\theta}{2} = \log_2 \sin 6\theta - \log_2 2 = \log_2 \sin 6\theta - 1$ より $\log_2 \sin 6\theta - 1 = -2$ 、したがって $\sin 6\theta = \frac{1}{2}$ である。 $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ であるから、 $0 < 6\theta < \pi$ で、したがって $6\theta = \frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{5\pi}{6}$ となる。したがって $\theta = \frac{\pi}{36}$ 、 $\frac{5\pi}{36}$ 。

(3) $t = \frac{1}{x}$ とおく。 $dt = -\frac{1}{x^2} dx$ で

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 -e^t dt = [-e^t]_{\frac{1}{2}}^1 = -\sqrt{e} + e。$$

3. (1) 余弦定理より $(\sqrt{2})^2 = 2^2 + 1^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ となるから、 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{3}{2}$ 。

(2) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos \angle BAC = 2 \cos \angle BAC$
 $= \frac{3}{2}$ であるから、 $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$ である。

したがって、 $\sin \angle BAC = \sqrt{1 - (\cos \angle BAC)^2}$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ となる。正弦定理より}$$

$$2R \sin \angle BAC = |\vec{BC}| \text{ で } R = \frac{2\sqrt{14}}{7}。$$

(3) $\vec{AO} = \vec{AB} + \vec{BO}$ から

$$\vec{BO} = \vec{AO} - \vec{AB} = (x-1)\vec{AB} + y\vec{AC}。$$

$\vec{AO} = \vec{AC} + \vec{CO}$ から

$$\vec{CO} = \vec{AO} - \vec{AC} = x\vec{AB} + (y-1)\vec{AC}。$$

(4) $|\vec{AO}|^2 = x^2|\vec{AB}|^2 + y^2|\vec{AC}|^2 + 2xy\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

$$= x^2 + 4y^2 + 2xy \cdot \frac{3}{2} = x^2 + 4y^2 + 3xy,$$

$$|\vec{BO}|^2 = (x-1)^2|\vec{AB}|^2 + y^2|\vec{AC}|^2$$

$$+ 2(x-1)y\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (x-1)^2 + 4y^2 + 2(x-1)y \cdot \frac{3}{2}$$

$$= x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 3y + 1,$$

$$|\vec{CO}|^2 = x^2|\vec{AB}|^2 + (y-1)^2|\vec{AC}|^2$$

$$+ 2x(y-1)\vec{AB} \cdot \vec{AC} = x^2 + 4y^2 - 2xy - 2x + 4y - 1$$

$$= x^2 + 4y^2 - 3xy - 3x - 8y + 4$$

である。 $|\vec{AO}|^2 = |\vec{BO}|^2 = |\vec{CO}|^2$ より

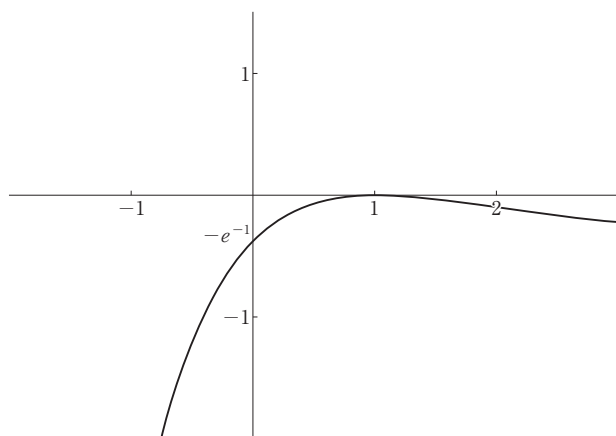
$$x = \frac{-4}{7}, \quad y = \frac{5}{7}。$$

4. (1) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ より $x=1$ 。

(2) 増減表は

x	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	0	↘

で、グラフは



(3) 体積は $\pi \int_0^1 (xe^{-x} - e^{-1})^2 dx$

$$= \pi \int_0^1 x^2 e^{-2x} - 2xe^{-x-1} + e^{-2} dx$$

$$= \pi \left[\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{-x}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{-2x} + 2(1+x)e^{-x-1} + e^{-2}x \right]_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{15}{4} e^{-2} - 2e^{-1} + \frac{1}{4} \right)。$$