2015 年度卒業研究概要

″POLYGON12″におけるヒューリスティクスを用いた組み合せ爆発の回避

大谷紀子研究室

1232026　伊藤詞航

1.　研究の背景・目的

多角形 12 変化問題(POLYGON12)[1]とは、長さ 12 の糸を使って、面積 n が 1 から 11 の整数となる凸多角形をそれぞれ作るパズルである。ただし、凸多角形の全頂点は一辺の長さを任意とする正方形状の格子点上にあるものとする。また、格子点間隔の逆数を「縮尺」とし、縮尺が最小となる図形を最適図形とする。縮尺が同じ図形が存在する場合は、対称的で頂点の数が少ない図形をより良い図形とする。本パズルでは、各面積 n における図形の縮尺の積が最小になる図形の組み合せを最適解とする。

多角形 12 変化問題の考案者である大守が現在までに見つけた図形の縮尺は、n=1 から順に 15, 6, 1, 1, 1, 1, 2, 1/2, 1/3, 2, 6 で、積は 360 である[1]。ただし、発見されている図形が最適図形であることは証明されていない。本パズルは、頂点の数が増える、あるいは縮尺が大きくなるにつれ最適図形候補が爆発的に増加するので、人間が直感的に解くことは困難である。また、全探索により解くことも極めて難しい。例えば縮尺が 6 の場合、探索範囲は 36×36 の格子点上となる。36×36 すなわち 1296 個の格子点のうちの k 個を頂点とする k 角形は ${}_{1296}C_k$ 個あるので、すべての最適図形候補を対象として探索する際の計算量は 1296^k のオーダーである。11 角形を全探索するには ${}_{1296}C_{11}$ すなわち約 415 秭(10^{24})通りの図形の面積と周囲の長さを計算する必要があり、1 秒間に 2000 億通りの組み合せを探索できるとしても 6594 万年かかる。また、縮尺が 15 の場合、計算量は $O(8100^k)$ と爆発的に増加する。

本研究では、最適図形候補の組み合せ爆発に対処するアルゴリズムを提案し、面積 n が 1 から 11 について、長さ 12 の糸からなる面積 n の図形をヒューリスティクスによって探索する。探索結果から現在見つかっている図形がそれぞれ最適図形であることを明らかにする。最適図形でない場合には、より良い図形を見つけることを目指す。また、各面積 n における最適図形の縮尺の積を計算する。

2.　ヒューリスティクスを用いた最適図形探索

提案手法では、長さ 12 の糸の一端を固定し、もう一端を 180 度回転させ格子点に引っ掛けることで多角形を表現する。本アルゴリズムの優れた点は、生成される多角形が凸多角形であることが保証される点である。ただし、全探索した場合、組み合せが膨大で最適図形が求まらないので、探索範囲に様々な制限をかけ、計算量を減らすことにより最適図形を求める。全体の処理の流れを以下に示す。

①　xy 平面上の原点をひとつ目の頂点とし、基準点とする。また、基準角度を 0° とする。

②　「基準点から各点へ引いた直線と x 軸のなす角度」をそれぞれ計算し、基準角度より大きくなる点を候補点とする。

③　「基準点から候補点へ引いた直線と x 軸のなす角度」が最も小さくなる候補点を頂点とし、新たな基準点とする。また、求めた角度を新たな基準角度とする。以降、基準点が更新されるたびに、基準角度も更新する。頂点が 2 つ以下の場合は②に戻る。頂点が 3 つ以上の場合は④に進む。す

べての候補点を探索したら⑤に進む。

④ 決定した頂点からできる多角形の周囲の長さと面積を計算する。
周囲の長さが 12、かつ面積が n のとき、探索している多角形を最適図形候補として⑤に進む。
周囲の長さが 12 未満、かつ面積が n 未満のとき、②に戻る
周囲の長さが 12 以上、または面積が n 以上のとき、⑤に進む。

⑤ 最後に追加した頂点を削除し、基準点に隣接する頂点を新たな基準点として②に戻る。すべての組み合せが探索済みの場合は、⑥に進む。

⑥ 最適図形候補のうち、最も頂点の数が少なく対称的な図形を最適図形として処理を終了する。最適図形候補がない場合は、最適図形なしとして処理を終了する。

以上の処理によって最適図形になり得ない多角形についての計算を省くことができる。また、本パズルでは周囲の長さが 12 という制約があるので一辺の長さは 6 未満でなければならない。さらに、一辺でも長さが無理数になると周囲の長さは有理数の 12 になり得ないので、各辺の長さは有理数でなければならない。上記の手順②において基準点から各点までの長さを三平方の定理により求め、長さが 6 未満かつ有理数になる点のみを候補点とする。したがって、基準点を$v_1(x_1, y_1)$、対象点を$v_2(x_2, y_2)$としたとき、式(1)と式(2)が共に成り立つ点のみを候補点とする。ここで Z は整数の集合とする。

$$\begin{cases}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 < 6^2 & (1)\\(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \in \mathrm{Z}^2 & (2)\end{cases}$$

本研究では、縮尺が取り得る値を「自然数」と「1 を自然数で割った値」とし、縮尺の変化範囲の下限は$1/\sqrt{2 \cdot n}$とする。各面積 n に対し、範囲内で最も小さな縮尺から順に探索する。最適図形が求まれば処理を終了し、それ以上の縮尺に関しては探索しない。

3. 結果と考察

本研究で提案したアルゴリズムにより最適図形候補が最多となる面積 11 において、415秭通りの候補を 2800 万通りまで削減することに成功した。本アルゴリズムを用いて、各面積 n に対しそれぞれ求めた最適図形を図 1 に示す。面積 n=1, 11 においては新たな最適図形が発見され、それ以外の n に関しては現在までに発見されていた最適図形と同様の最適図形が得られた。新たに発見した最適図形の縮尺の積は 264 である。ただし、本研究では縮尺の取り得る値に制限を設けたため、見つかった多角形が最適図形であることを証明するには至らなかった。縮尺の取り得る値に制限をかけず、すべての場合を探索することは不可能なので、今後は最適図形としての妥当性を数学的知見に基づき検証する必要がある。

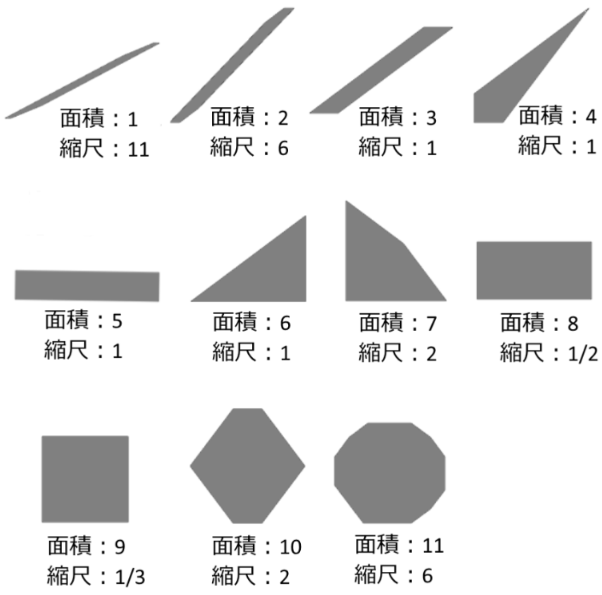

図 1：各面積 n に対する最適図形

参考文献

[1]大守隆, “POLYGON12” http://www2.tr.nir.jp/~taomori/pz15.pdf