

2022.12.01 Lecture 5

15:30 - 17:00

量子ドット 閉じ込めと開放の物理学

Institute for Solid State Physics, University of Tokyo

Shingo Katsumoto

第5章 量子デコヒーレンスと量子ドット

1. 量子輸送と本質的デコヒーレンス(?)
2. 多自由度環境中の量子ドット
3. 量子ドット伝導とスピン散乱によるデコヒーレンス

Length limit quantum coherence (Coherence length)

Monochromaticity: Thermal length

Energy width: $\Delta E = k_B T$

Diffusion length: $l = \sqrt{D\tau}$

Phase width: $2\pi \Delta f \tau = 2\pi \frac{\Delta E \tau}{h} = 2\pi \frac{k_B T \tau}{h} \rightarrow 2\pi : \tau_c = \frac{h}{k_B T}$

Thermal diffusion length $l_{th} = \sqrt{\frac{hD}{k_B T}}$

Ballistic thermal length $l_{th} = \frac{h v_F}{k_B T}$

(Some) inelastic scattering time: τ_{inel}

Ballistic transport:

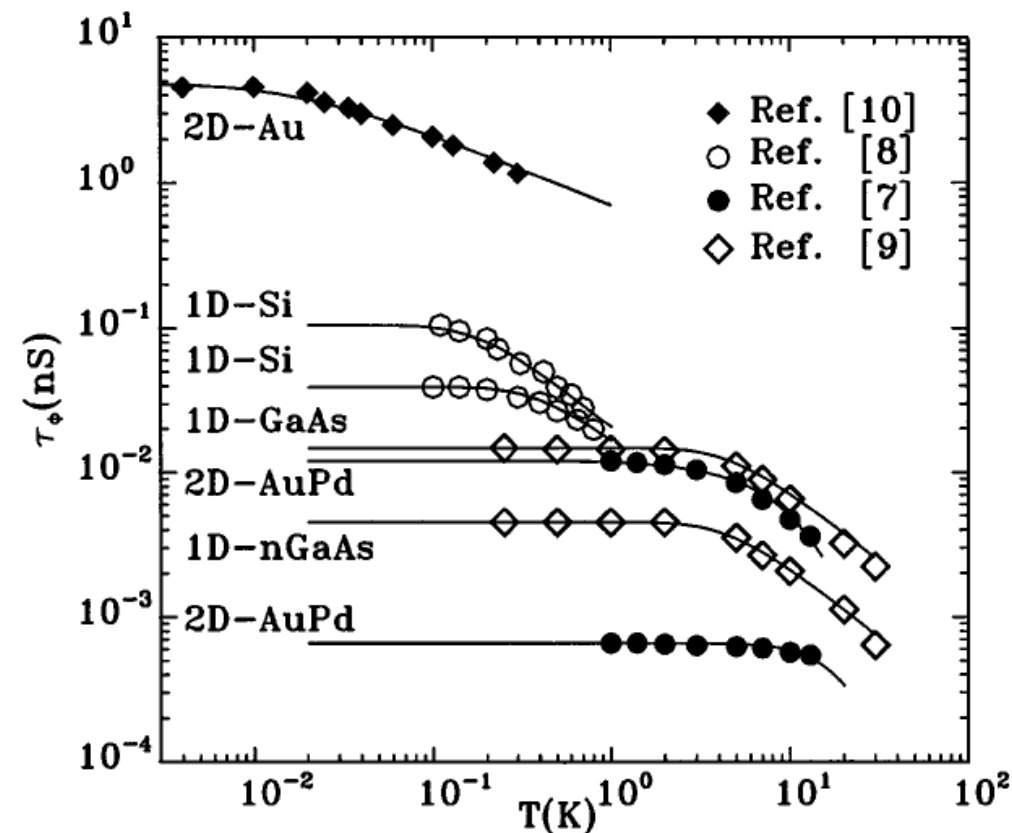
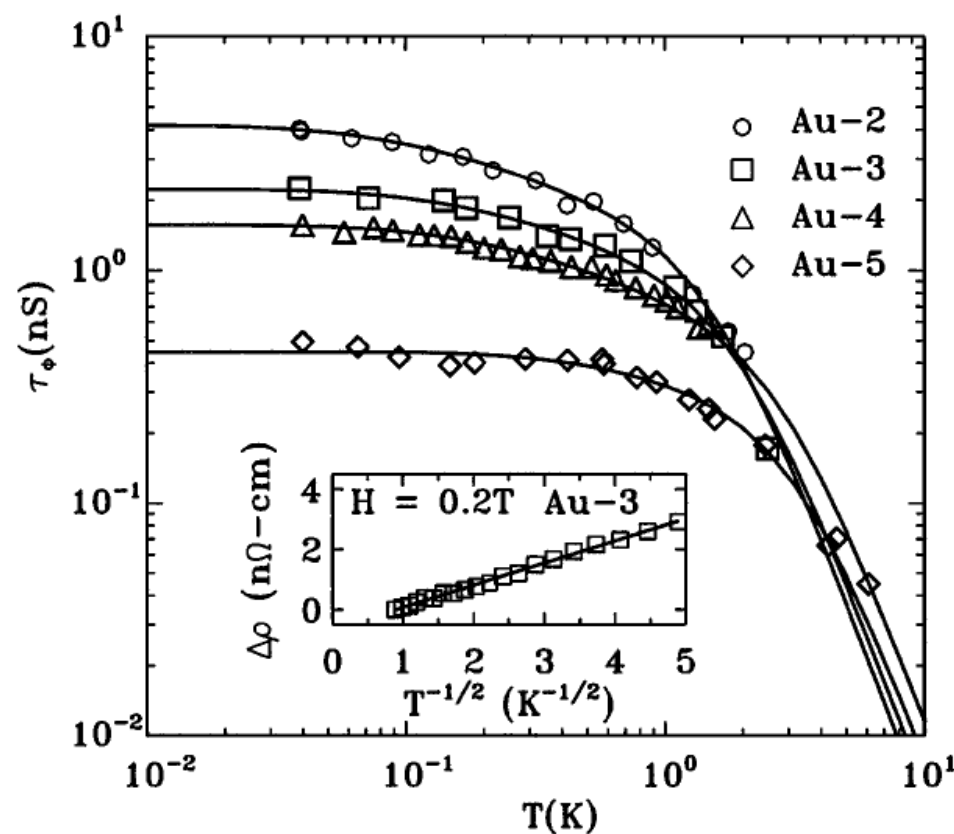
$$l_{inel} = v_F \tau_{inel}$$

Diffusive transport:

$$l_{inel} = \sqrt{D \tau_{inel}}$$

Debate on the existence of “intrinsic decoherence”

Weak localization magnetoresistance $\rightarrow$ phase relaxation time τ_ϕ



Intrinsic decoherence (?)

Mohanty et al., PRL **78**, 3366 (1997)

Golubev & Zaikin, PRL **81**, 1074 (1998) : Intrinsic fluctuation in electric field

Big debate in LT1999 in Helsinki $\Rightarrow$ 恐らくはそのようなものはない. 磁性不純物の効果

基底 $\{|\phi_i\rangle\}$ に対して $\hat{\rho}_m = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|$ ($0 \leq p_i \leq 1, \sum_i p_i = 1$)

$|\phi_i\rangle$ の間の干渉項が存在しない：混合状態 (mixed state) $\Leftrightarrow$ Hilbert空間ベクトルで表される状態
純粋状態 (pure state)

量子情報理論：「観測論」との切り分けが明確になる

Quantum process tomography

Quantum state tomography

それでも

環境論：量子情報のレベルでも重要性を維持  量子開放系

量子コンピュータに現れたカオス  量子→古典の問題を考える上で重要ではないか？

多自由度環境中の量子ドット



Hendrik Anthony Kramers
(1894-1952)



Anthony Leggett
(1938-)



Amir Caldeira
(1950-)

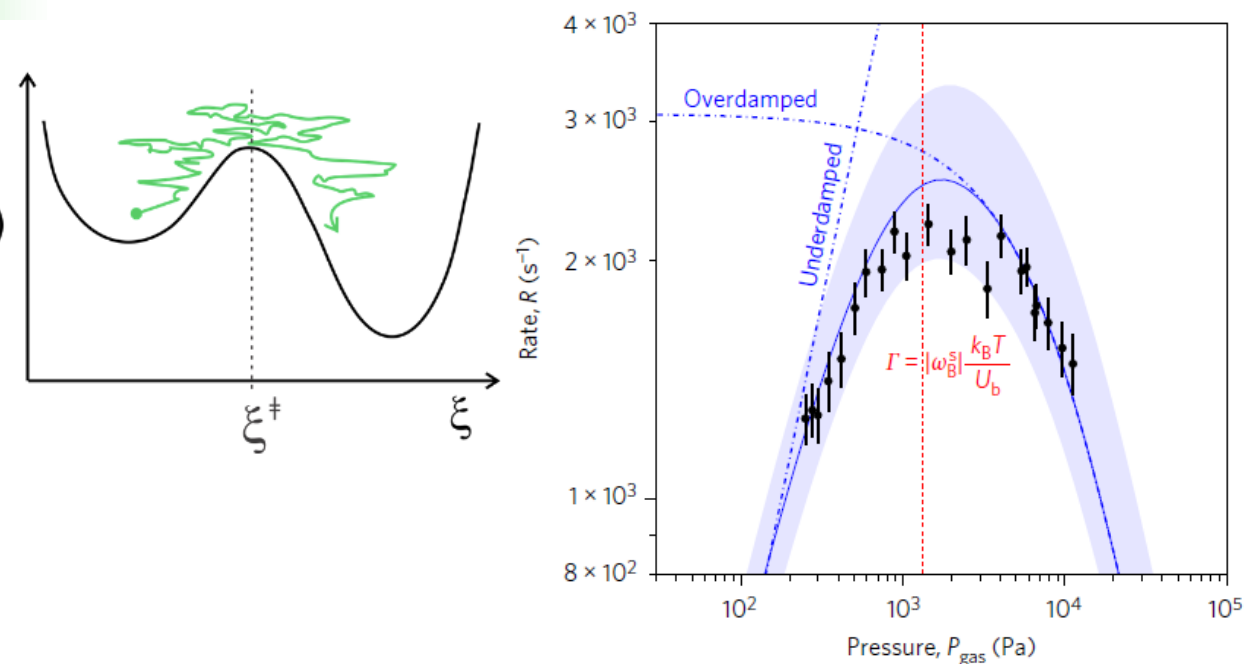
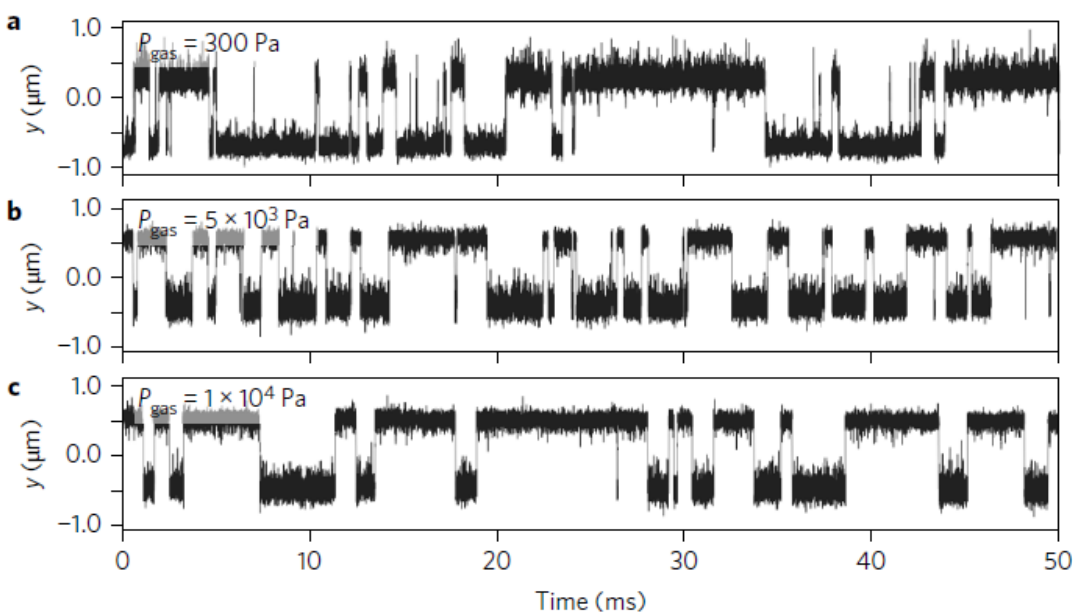
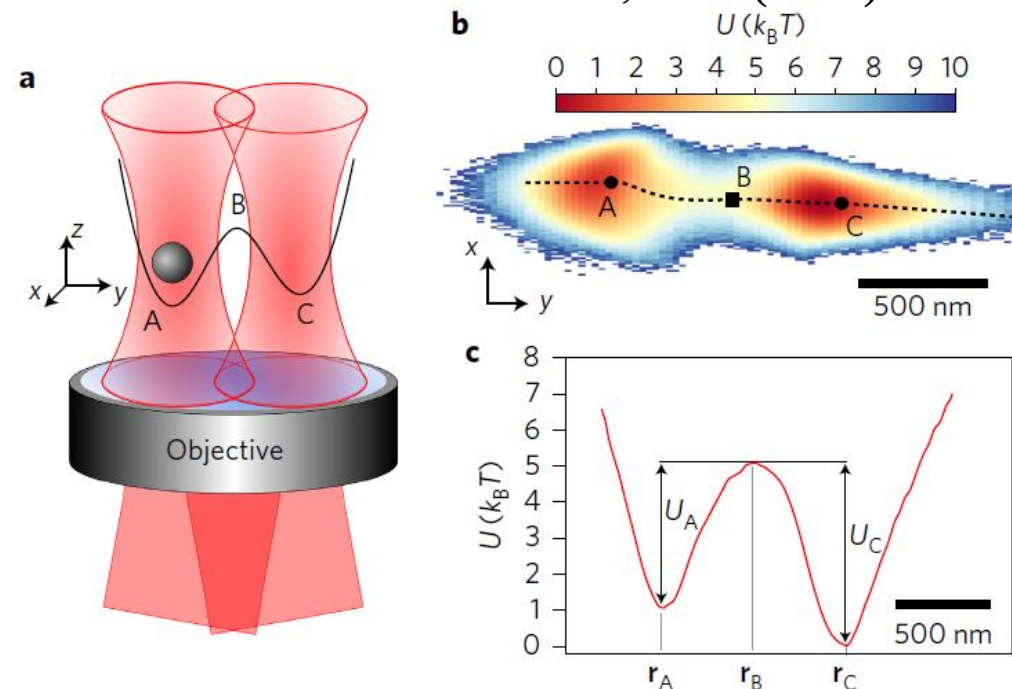
クラマース展開 (Kramers turnover)

深いポテンシャルの中でBrown運動をしている粒子
 化学反応でのエネルギー障壁問題

一旦化学反応のポテンシャル障壁を超えた状態が、
 環境自由度との相互作用により、元の状態に引き
 戻される

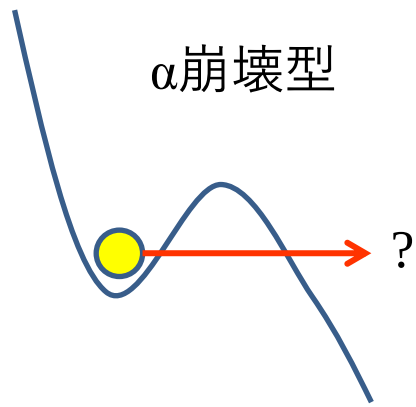
光子場で浮遊するナノ粒子による実験

Rondin et al. Nat. Nanotech. **12**, 1130 (2017)



マクロな自由度の量子トンネリング

多自由度環境中の量子ドット



低温でKramers転回現象はどうなるか？

障壁の通過：量子トンネルが優勢 ⇒ マクロ量子トンネル (macroscopic quantum tunneling, MQT)

MQTに対する摩擦（環境との相互作用）の効果 ⇒ 量子→古典の境目？

Quantum Brownian motion

マクロ変数の例) N 個同種粒子 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$

重心座標 $\mathbf{X} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i$

Lagrangian
$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^N \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \frac{V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{\text{粒子間相互作用}}$$

$$\mathbf{x}'_i \equiv \mathbf{X} + \mathbf{x}_i \quad \sum_{i=1}^N \mathbf{x}'_i = 0$$

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{mN}{2} \dot{\mathbf{X}}^2 + \underbrace{f(\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_N)}_{\text{相対座標だけの関数}}$$

$$\prod_i d\mathbf{x}_i = d\mathbf{X} \prod_i d\mathbf{x}'_i$$

Feynman核 $K(\mathbf{x}^b, \mathbf{x}^a, T) = \int_{a'}^{b'} d\mathbf{X} d\mathbf{x}'_1 \dots d\mathbf{x}'_N \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{mN}{2} \dot{\mathbf{X}}^2 + f \right] dt \right]$ (量子力学的振幅)

古典経路 $\ddot{\mathbf{X}} = 0$

古典経路周りの展開 $S = S_0 + \frac{\delta^2 S}{\delta \mathbf{X}^2} (\delta \mathbf{X})^2 + \dots$ 1次の項がない

$$\exp\{iNx\} \rightarrow \delta(x)/\sqrt{N} \quad (N \rightarrow \infty) \quad \text{より, } N \rightarrow \infty \text{ で揺らぎは } 1/\sqrt{N} \text{ で減少}$$

問題点

1. マクロ系で成立する古典描像はミクロな量子力学の単純な極限と捉えられるかどうか?
2. 上記のような, マクロ変数→量子力学変数のような直接量子化で良いのか?

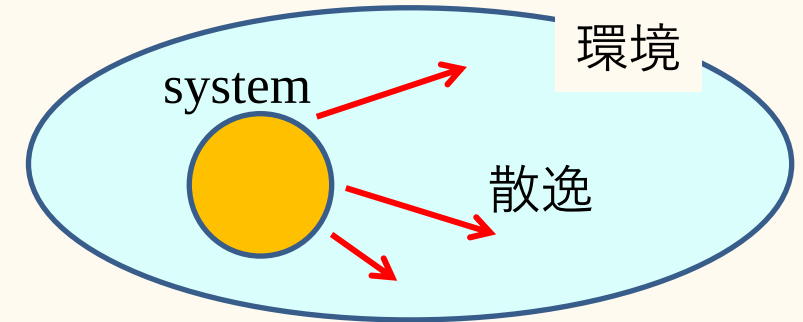
Caldeira-Leggett モデル：一種の量子マスター方程式。環境に物理モデルを持ち込む

$$H = H_0 + \sum_{\alpha} \left[\frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + \frac{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2 x_{\alpha}^2}{2} \right] + gx \sum_{\gamma} c_{\gamma} x_{\gamma}$$

環境：無限個の調和振動子

系-環境の結合

- 調和振動子くらいしか解けない
- 電磁場には正しいモデル



$$H_0 = M\dot{X}^2/2 - V(X)$$

分配関数 $Z = \text{Tr} \exp\{(-\beta H)\} = \int \mathcal{D}X \mathcal{D}x_{\alpha} \exp\{[-S/\hbar]\}$

$$S = \int_0^{\beta\hbar} d\tau \left[\frac{M\dot{X}^2}{2} + V(X) + \sum_{\alpha} \left(\frac{m_{\alpha}}{2} \dot{x}_{\alpha}^2 + \frac{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2}{2} x_{\alpha}^2 + gc_{\alpha} X x_{\alpha} \right) \right]$$

有効作用 $S_{eff}(X)$ を $Z = \int \mathcal{D}X \exp\{(-S_{eff}/\hbar)\}$ で定義

環境自由度を積分する

$$S_{eff} = \int_0^{\beta\hbar} d\tau \frac{M}{2} \dot{X}^2 + V(X) + \underbrace{\int_0^\tau d\tau' K(\tau - \tau') X(\tau) X(\tau')}_{\text{記憶項}} \quad \tau: \text{虚時間}$$

ただし
$$\begin{cases} K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega J(\omega) \frac{\cosh(\beta\omega/2 - \omega|\tau|)}{\sinh(\beta\omega/2)} \\ J(\omega) = \frac{\pi}{2} g^2 \sum_\alpha \frac{c_\alpha^2}{m_\alpha \omega_\alpha} \delta(\omega - \omega_\alpha) \end{cases}$$

記憶項を更に変形

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^\tau d\tau' K(\tau - \tau') \{X(\tau)^2 + X(\tau')^2 - (X(\tau) - X(\tau'))^2\} \\ & = -\int_0^{\beta\hbar} d\tau X(\tau)^2 \int_0^\tau d\tau' K(\tau - \tau') \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^\tau d\tau' K(\tau - \tau') (X(\tau) - X(\tau'))^2 \end{aligned}$$

「記憶項」の効果

$$- \int_0^{\beta\hbar} d\tau X(\tau)^2 \int_0^\tau d\tau' K(\tau - \tau') + \frac{1}{2} \int_0^{\beta\hbar} d\tau \int_0^\tau d\tau' K(\tau - \tau') (X(\tau) - X(\tau'))^2$$

$$V'(X) \equiv V(X) - \left[\int_0^\tau d\tau' K(\tau - \tau') \right] X^2 \quad \text{により, 第1項はポテンシャルに取り込める}$$

第2項を最小にする経路: $X(\tau) = X(\tau')$ $X(\tau) = \text{const.}$ 系を止まらせる: 摩擦

Ohmic結合仮定 $J(\omega) = \eta\omega$

$$\text{古典経路} \quad \left\{ \begin{array}{l} M \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial X} + g \sum c_\alpha x_\alpha = 0 \\ m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} + m_\alpha \omega_\alpha^2 x_\alpha + g c_\alpha X = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Fourier変換} \quad X(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt X(t) e^{i\omega t}$$

「記憶項」→「摩擦項」

古典経路 $-M\omega^2 X(\omega) - iM\omega\gamma(\omega)X(\omega) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial X} = 0$

ただし, $\gamma(\omega) \equiv i\frac{\omega}{M}g^2 \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2} \frac{1}{\omega^2 - \omega_{\alpha}^2 + 0+} = -i\frac{\omega}{M} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega'} \frac{1}{\omega^2 - \omega_{\alpha}^2 + 0+}$

$$\tilde{V} = V - g^2 X^2 \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2}$$

$\text{Re}\gamma(\omega) \rightarrow \eta/M \quad (\omega \rightarrow 0) \quad \text{より}$

古典経路として $M \frac{d^2 X}{dt^2} + \eta \frac{dX}{dt} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial X} = 0 \quad (\omega \rightarrow 0) \quad \text{摩擦のある系のNewton方程式}$

摩擦項がない場合： $X_a(\tau)$ $X(\tau) = X_a(\tau) + \delta X(\tau)$

$$S_0(X(\tau)) = S_0(X_a(\tau)) + \frac{\delta^2 S_0}{\delta X(\tau)^2} \delta X(\tau)^2$$

$$S_1(X(\tau)) = S_1(X_a(\tau))$$

トンネル頻度が少ない近似

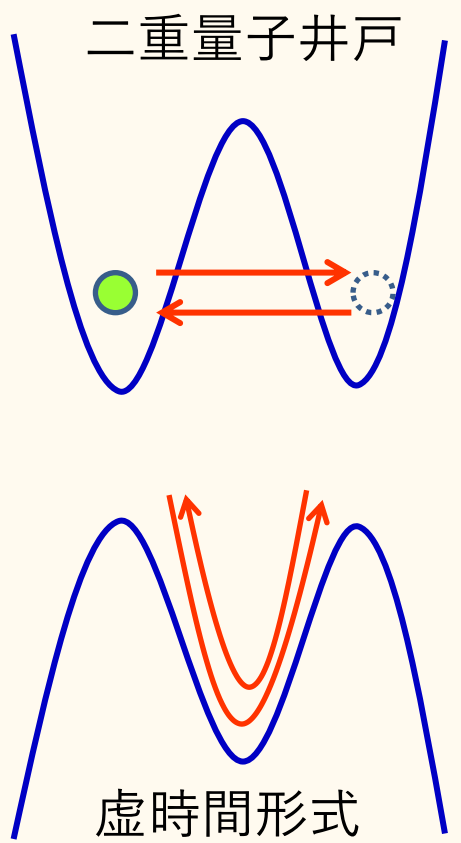
$$\Delta = \exp\{(-S_1(X_a)/\hbar)\} \cdot \Delta_0 = \exp\left\{\left(-\eta \frac{\Delta X^2}{\hbar}\right)\right\} \cdot \Delta_0$$

$$\Delta X \equiv X(\text{final}) - X(\text{initial}) = 2X_a \quad \text{摩擦項はトンネル確率を下げる}$$

ただし、環境全体としてはトンネル確率を増やす。

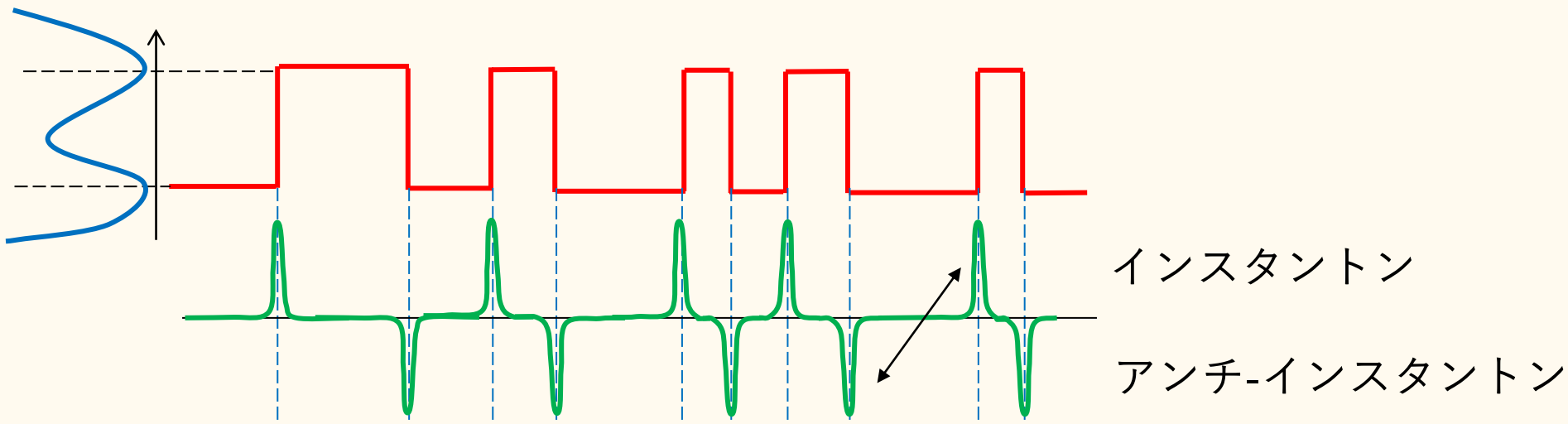
これはポテンシャルの変形のため、と考え、カウンター項 $g^2 x^2 \sum_{\alpha} \frac{c_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega_{\alpha}^2}$ を加えて補正する。

結論：調和振動子環境は、結合がOhmicな場合には常にMQTの確率を下げる。



$$V(x) = \frac{M\omega_0^2}{8X_a^2}(X^2 - X_a^2)^2$$

$X(\tau) = X_a \tanh(\omega_0\tau/2)$ 局在解. 一方向のトンネル (インスタントン)

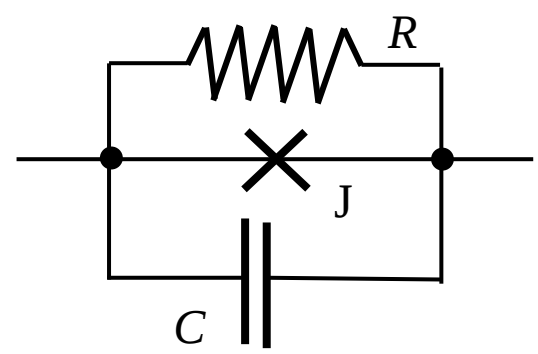


摩擦項はインスタントン-アンチインスタントン間に引力を生じる

インスタントン集団が凝縮相転移を生じる：トンネルは禁止，系は古典化

量子-古典を相転移で説明できる!?

Josephson接合

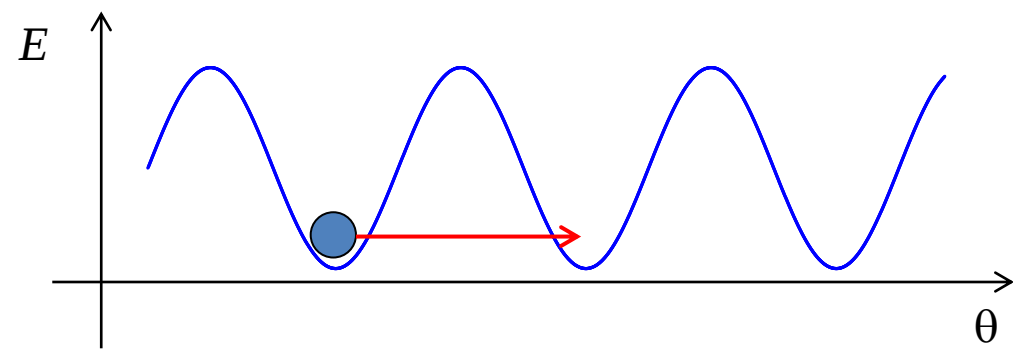


電流を流すとポテンシャルは傾く

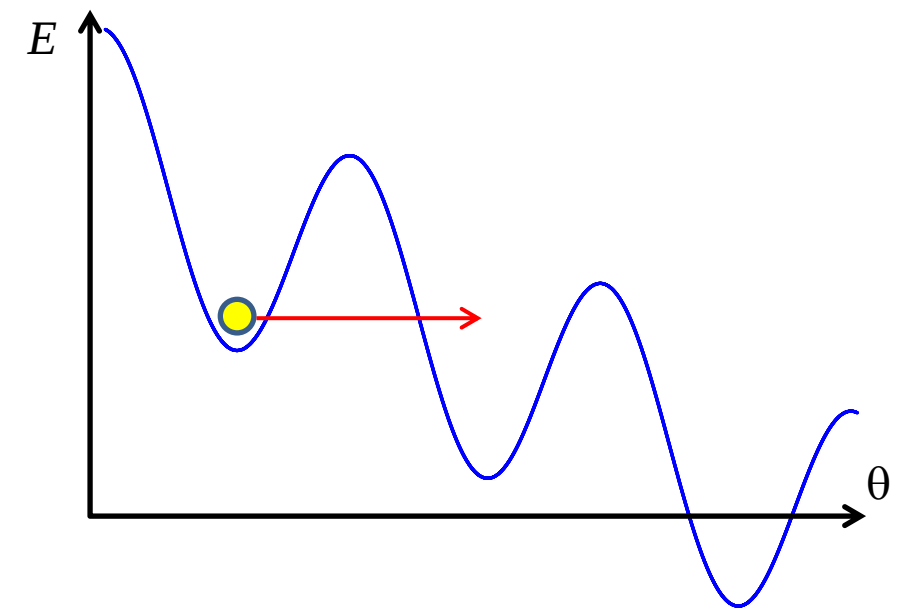
トンネルが発生→位相スリップが生じて接合に電圧が発生

$$E = \frac{q^2}{2C} - 2E_J \cos \theta$$
 電荷 q , 位相差 θ : 共役関係

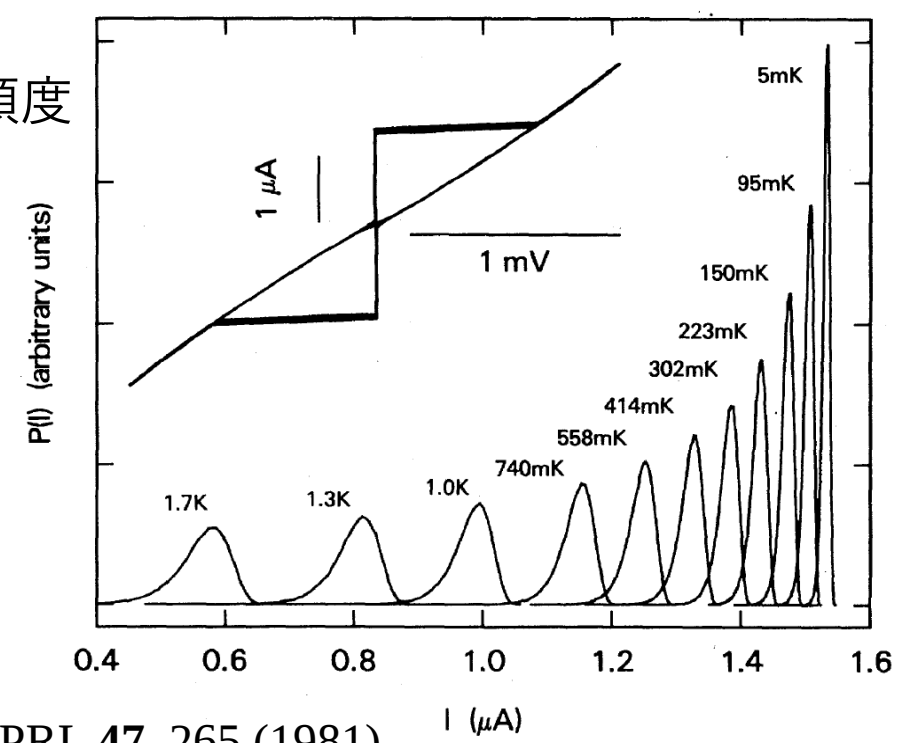
θ 空間で周期ポテンシャル



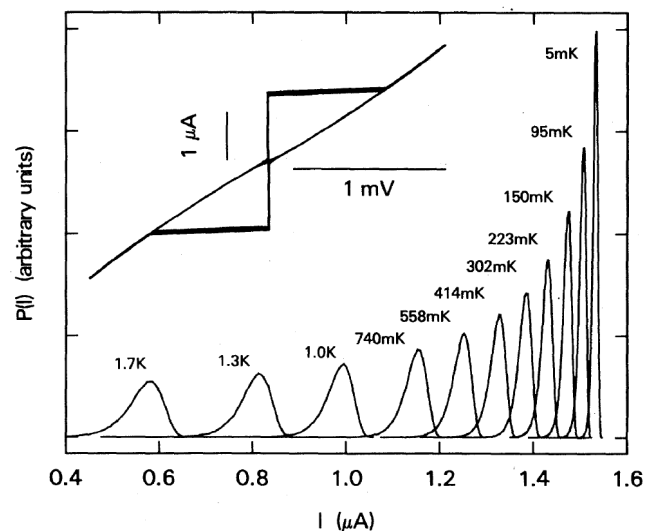
超伝導電流が流れる→ θ は局在： θ 空間でトンネルが生じていない



トンネル頻度

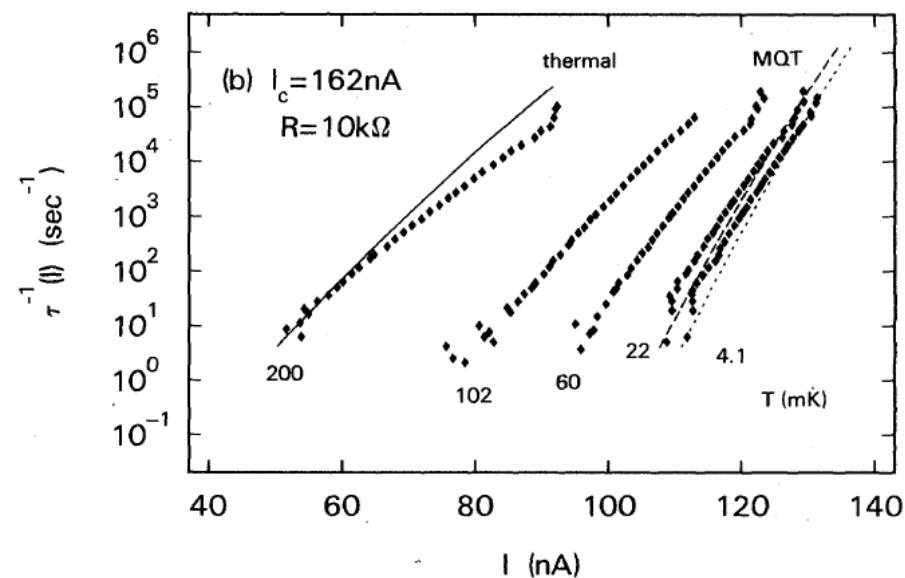
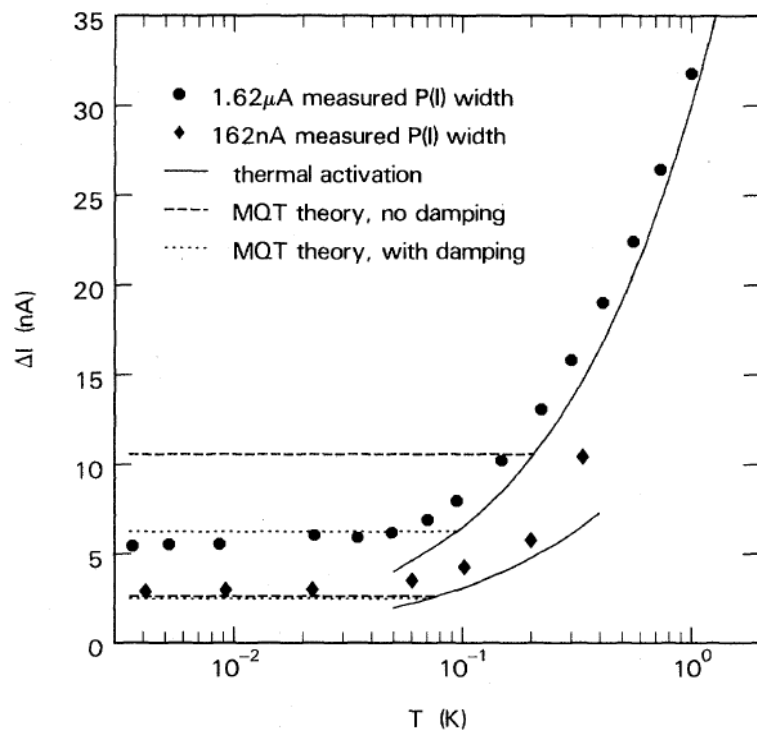
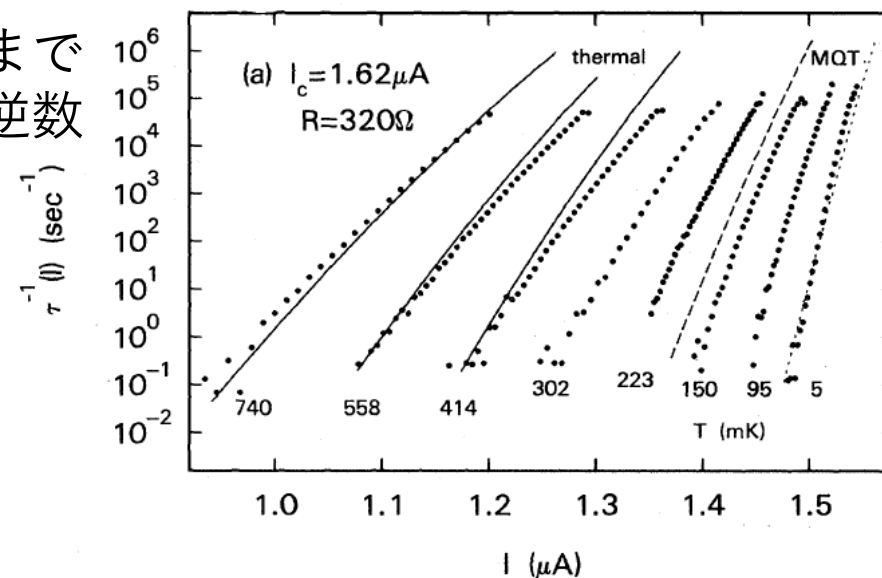


MQTに関する実験 (contd.)

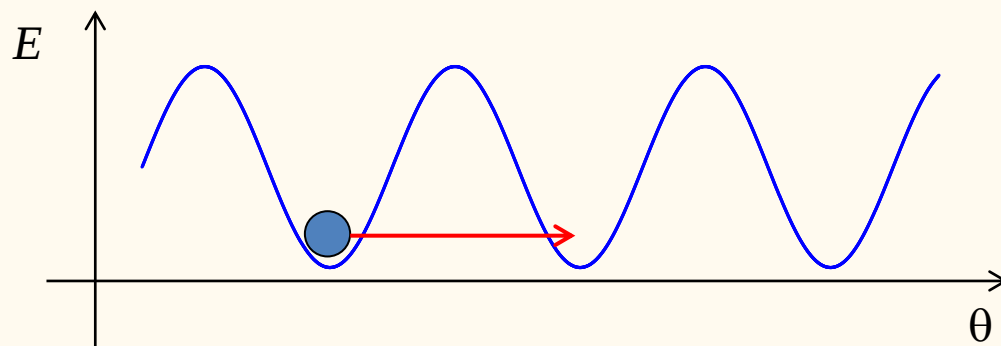
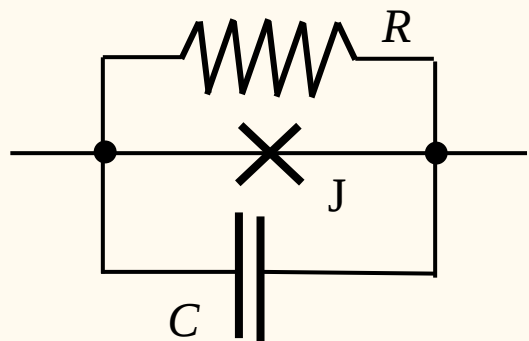


Voss & Webb, PRL **47**, 265 (1981)

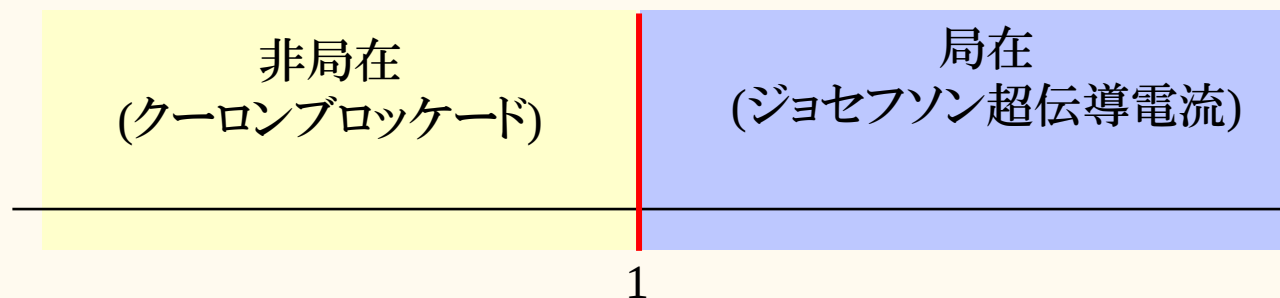
トンネルまでの
の時間の逆数



ジョセフソン接合における量子-古典の「相図」



$$E = \frac{q^2}{2C} - 2E_J \cos \theta$$



$$R_c = \frac{1}{4e^2} \approx 6.45 \text{ k}\Omega$$

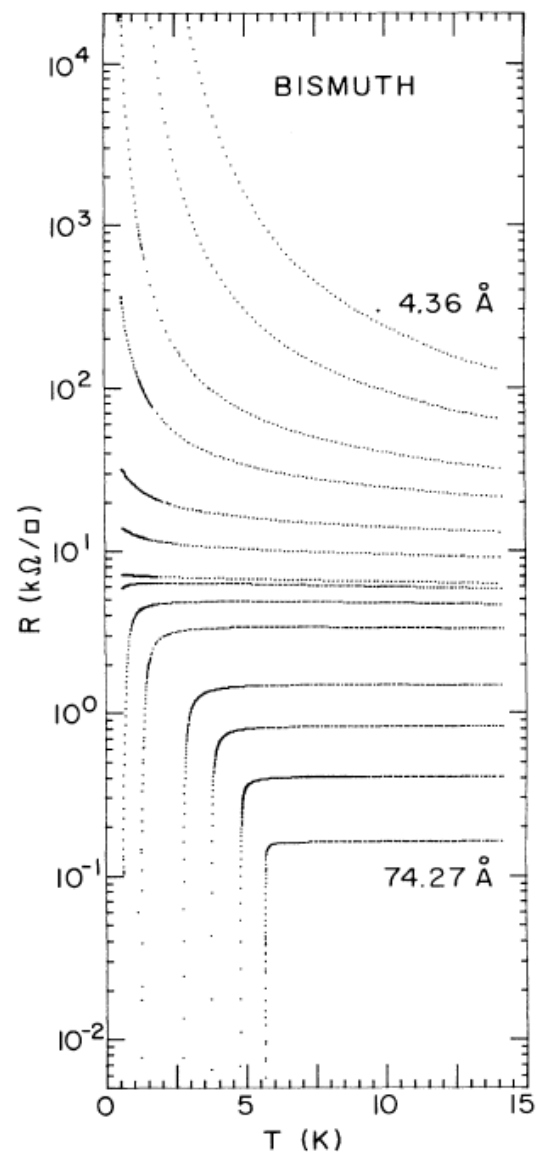
$$\alpha = \frac{h}{4e^2 R}$$

R がシャント抵抗ではなくトンネル抵抗の場合は理論は微妙である

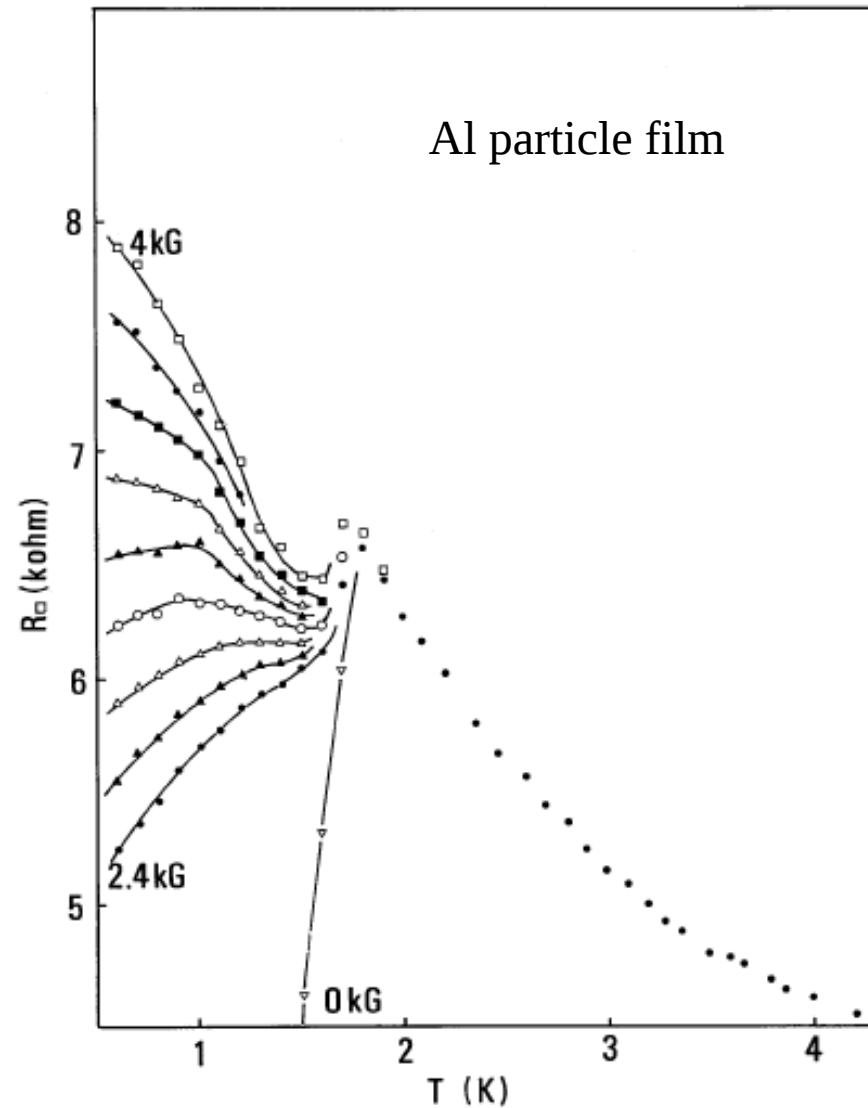
Chakravarty, PRL **49**, 681 (1982).

Schmid, PRL **51**, 1506 (1983).

2次元超伝導ネットワークの超伝導-絶縁体転移



Haviland et al. PRL **62**, 2180 (1989).



Kobayashi et al. JPSJ **59**, 4219 (1990).

2次元超伝導体の相転移

多自由度環境中の量子ドット

Charged boson (Cooper pair) – Vortex 双対性

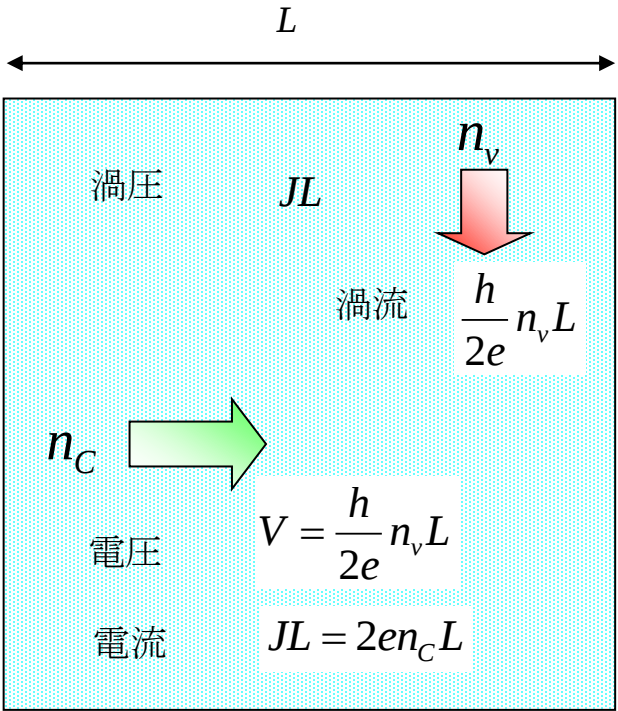
n 表示
ポテンシャル乱れ
 $2e$
クーパ対絶縁相
クーパ対流動相
(超伝導相)

$\leftrightarrow$

θ 表示
乱れた磁場
 $\frac{h}{2e}$
渦糸流動相
渦糸絶縁相

自己双対性成立 $\Leftrightarrow$ 臨界点

$$R \leftrightarrow \frac{1}{R_v}$$

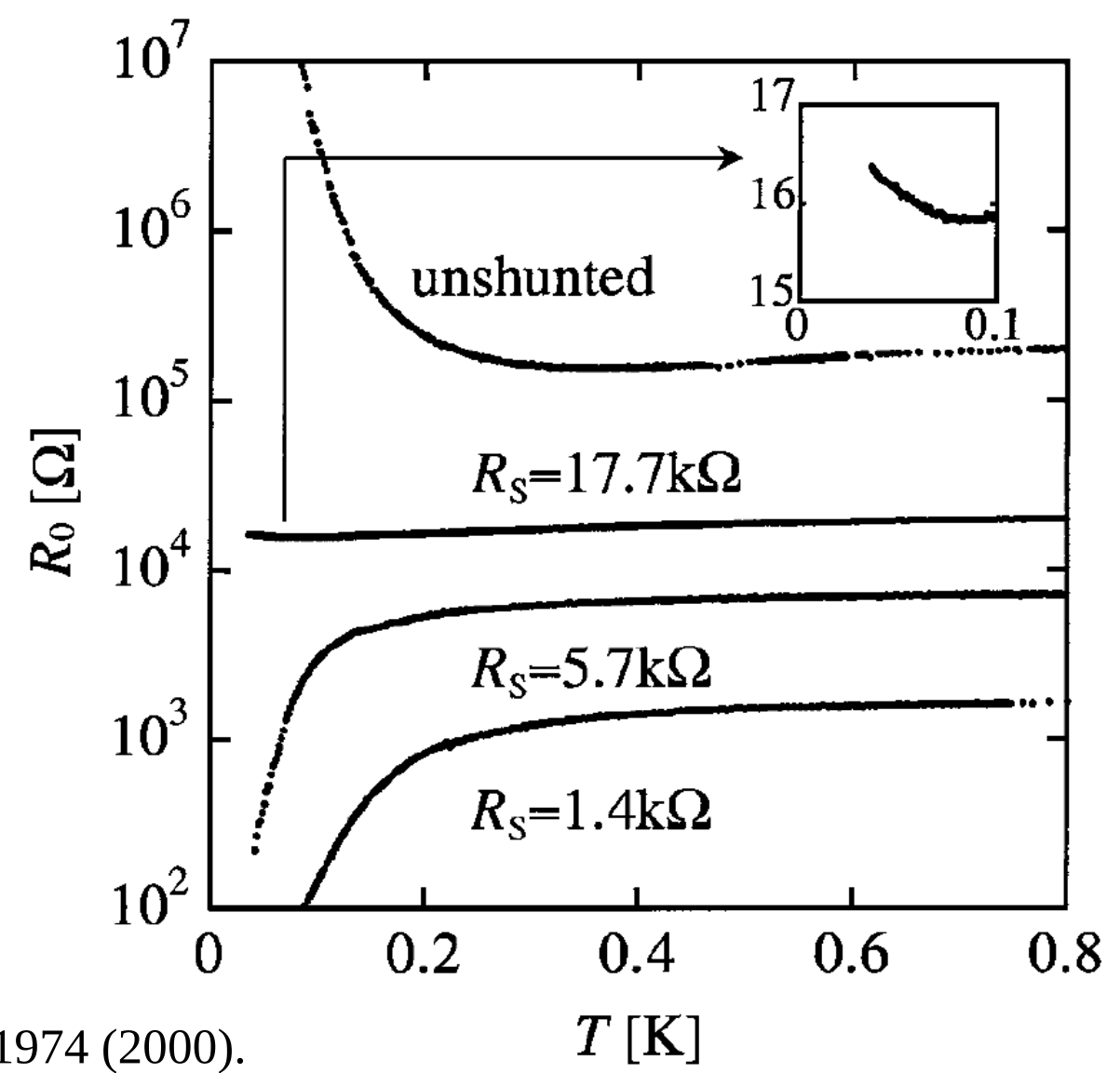
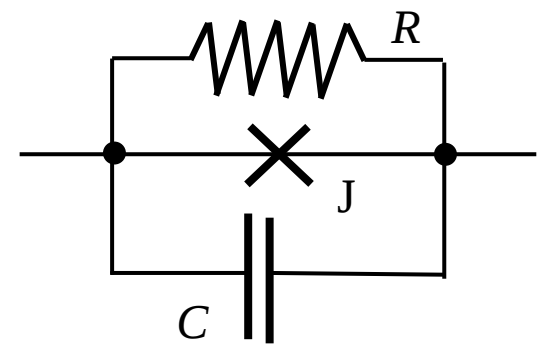


$$R_{\text{crit}} = \frac{h}{4e^2}$$

charge KTB transition $\Leftrightarrow$ vortex KTB transition

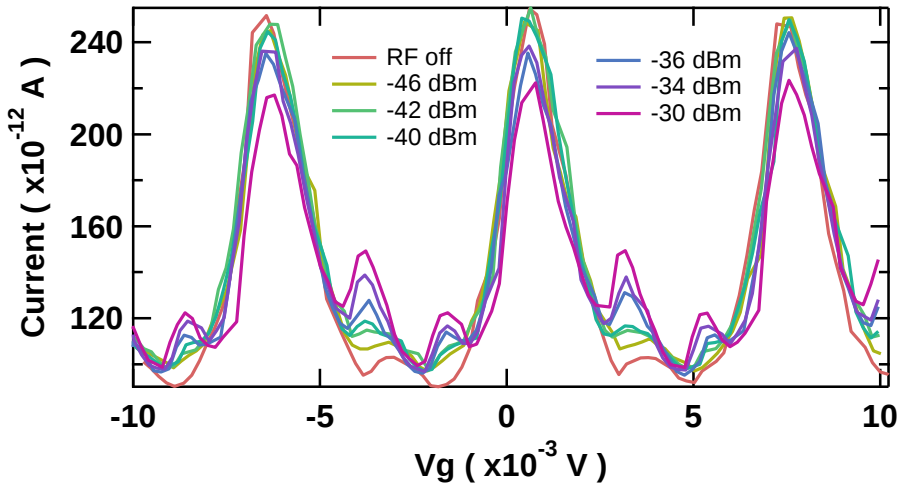
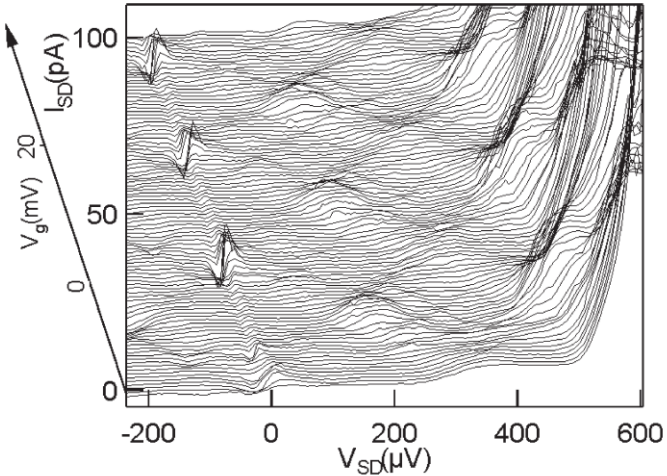
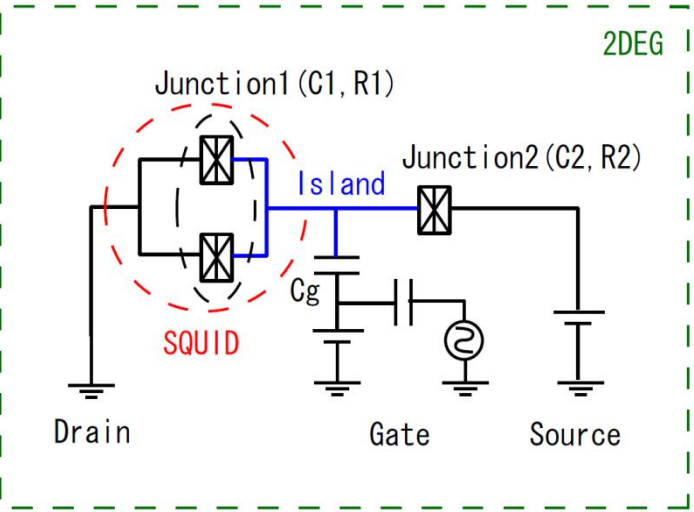
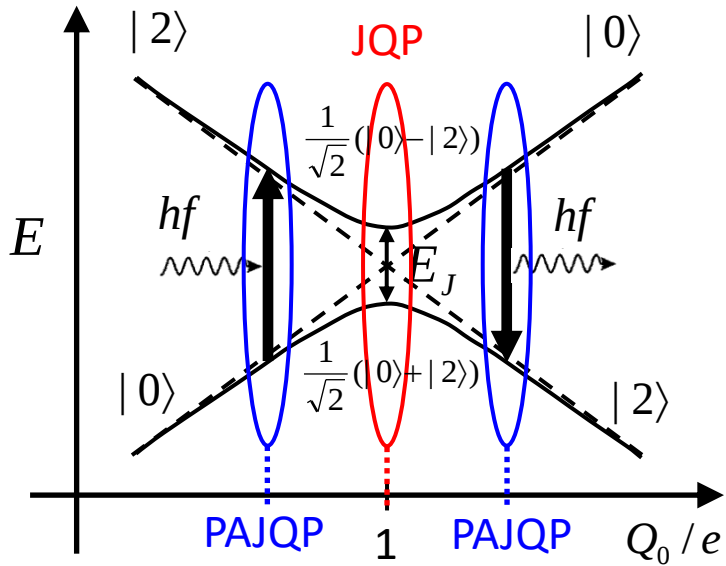
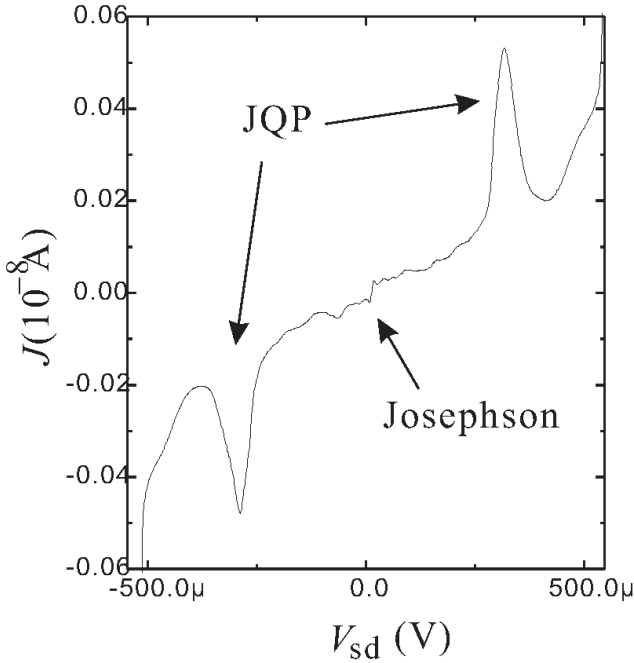
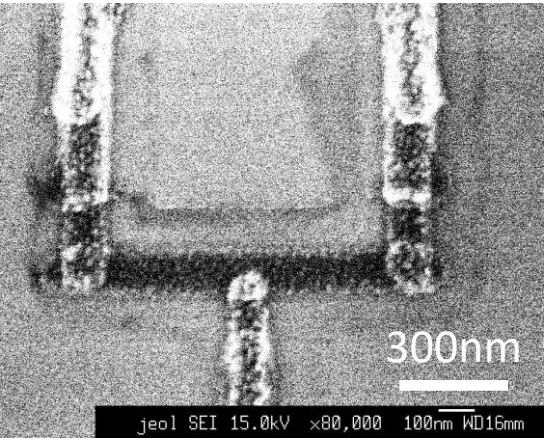
M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **65**, 923 (1990)

$\frac{e^2}{h} = \frac{e}{h/e} = \frac{\alpha}{2Z_0}$ 結局、この境界から散逸相転移の存在を示すのは難しい

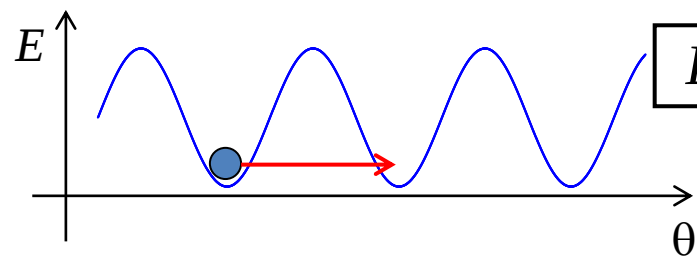


Yamaguchi Takahide et al., PRL **85**, 1974 (2000).

超伝導電荷qubitを使った実験



エネルギー分散関係



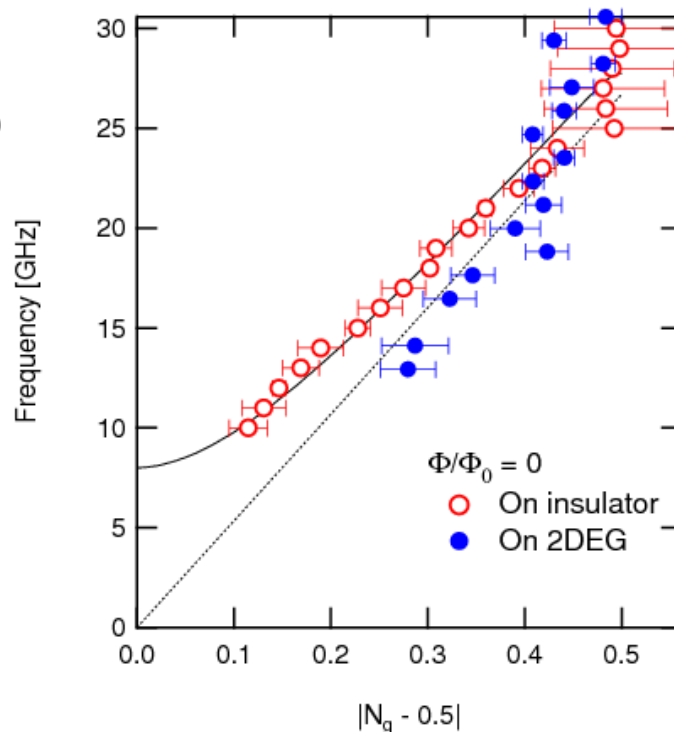
周期ポテンシャル
電荷 q , 位相差 θ : 共役関係

θ 空間で, コヒーレント

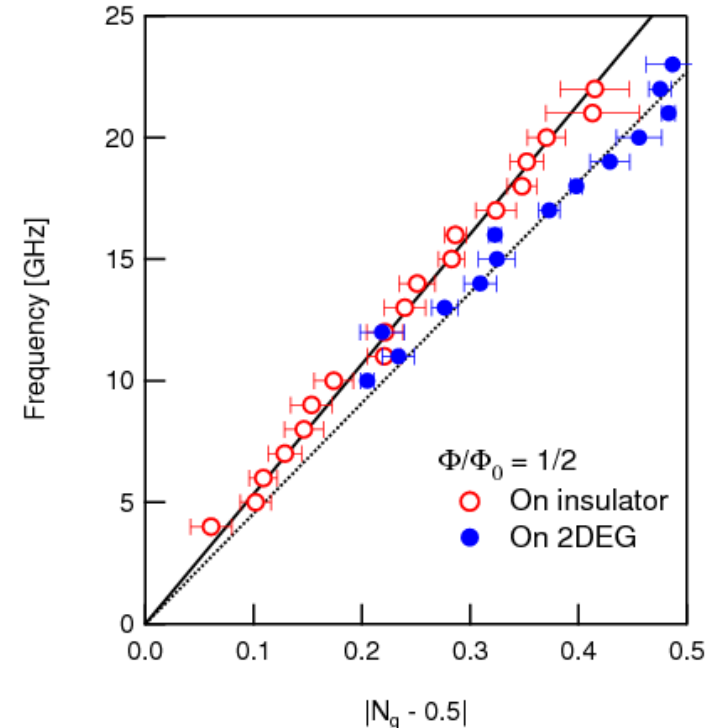


q 空間でエネルギーギャップ

E_{J1} が最大のときのエネルギー分散関係



E_{J1} が最小のときのエネルギー分散関係



・左側のPAJQPピークのみが観測された

・主に右側のPAJQPピークが観測された

E_{J1} が最大のときと最小のときのPAJQPピークの位置は共に2つの異なる電荷状態間の静電エネルギーの差を表す直線にのっている結果が得られた。

Abe et al., Proc. ISQM 08

➡ 散逸によってコヒーレントな系が古典化したことを示唆している。

Qubit in a fermion bath



So far

Quantum coherence in qubit

How about the fermions
traversing the qubit?

What is “measurement”?

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle + |\psi_B\rangle$$

そもそもなぜ、量子ドットで個数を数えた電子が干渉できるのか？

$$|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle|A\rangle + |\psi_B\rangle|B\rangle$$

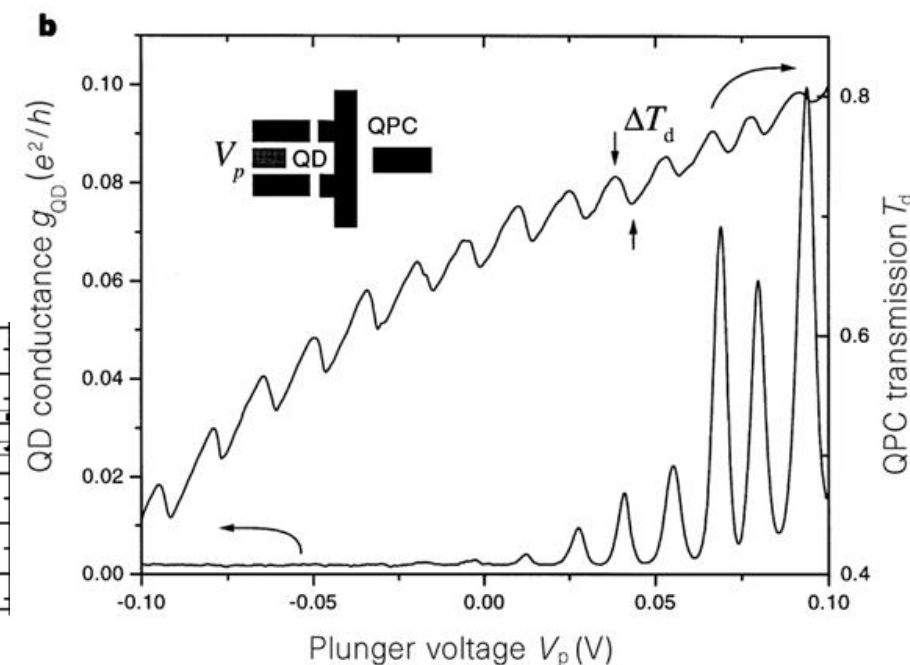
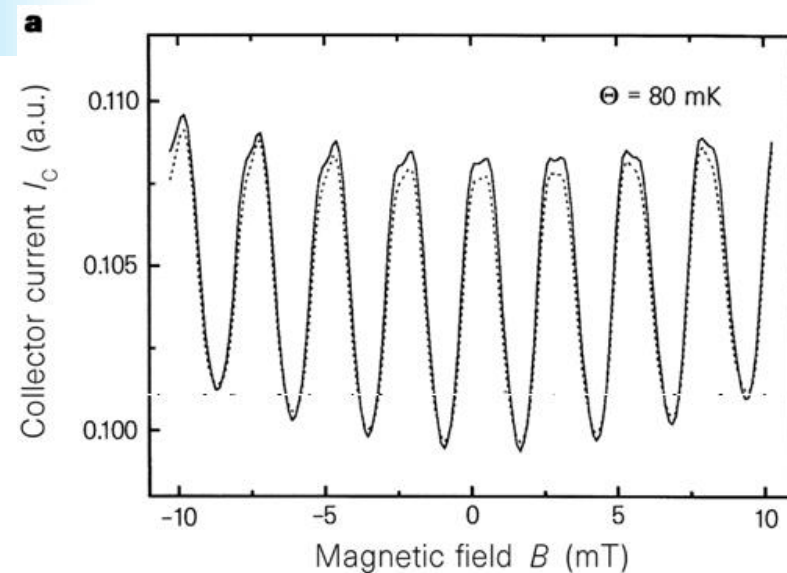
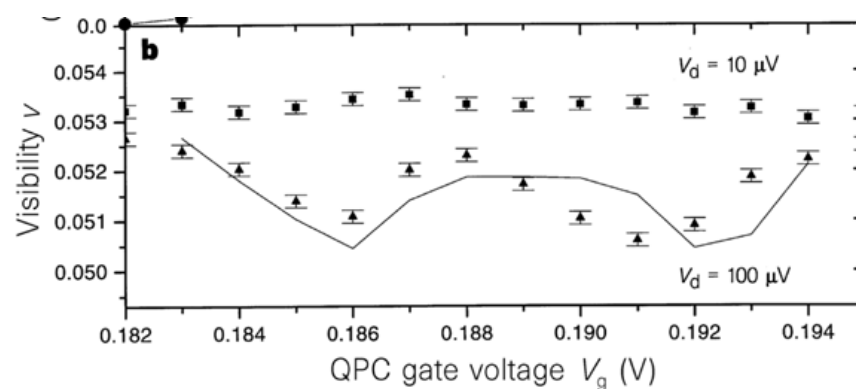
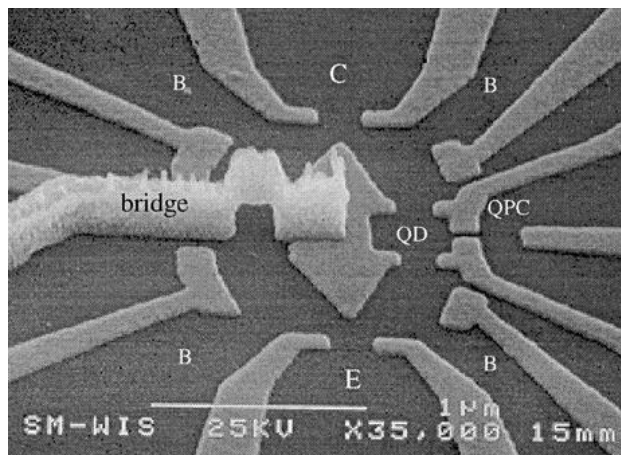
State entangled with macroscopically distinguishable states $|A\rangle$ and $|B\rangle$

“Collapse” of wavefunction into ψ_A (or ψ_B).

電気伝導する電子のコヒーレンス：干渉計の干渉成分振幅 (visibility) で判断できるのではないか？

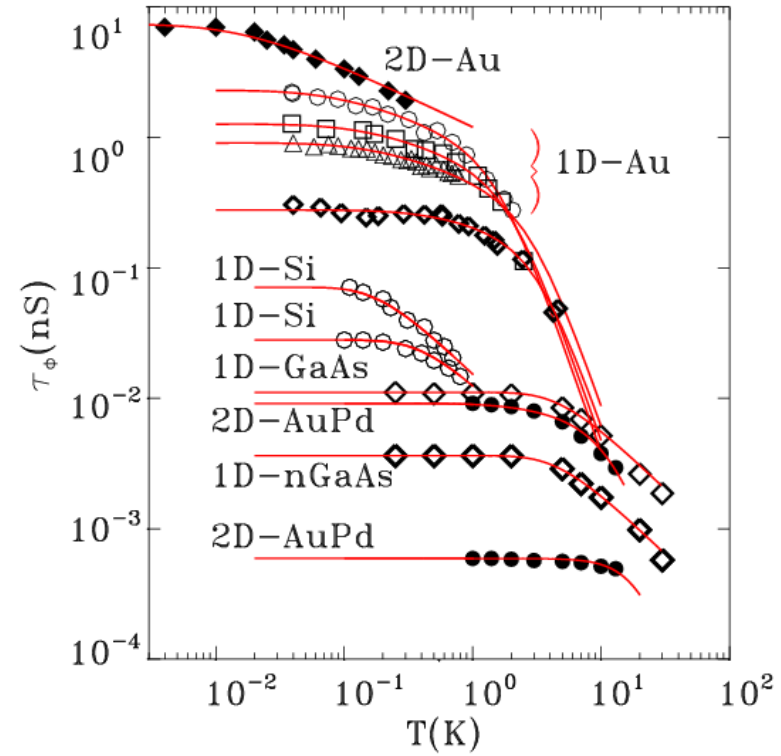
Buks et al. Nature **391**, 871 ('98)

QPC charge detector

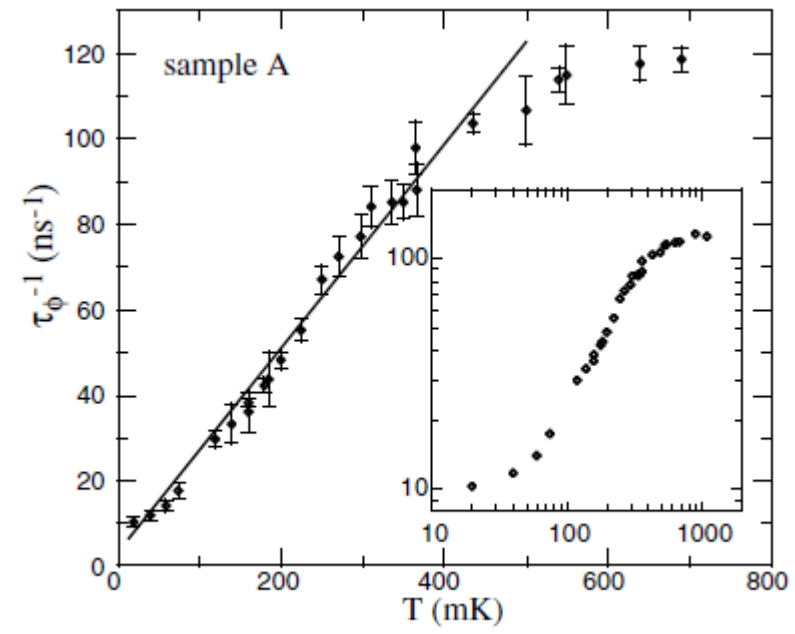


ノイズを検出しないとデコヒーレンスが生じない？

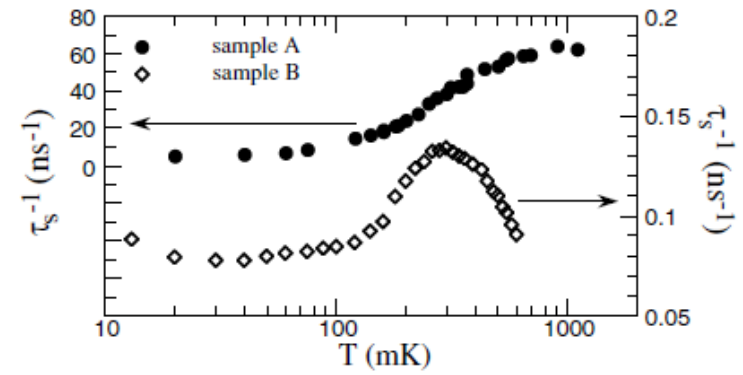
Quantum decoherence at low temperatures



Mohanty et al. PRL **78**, 3366 (1997).

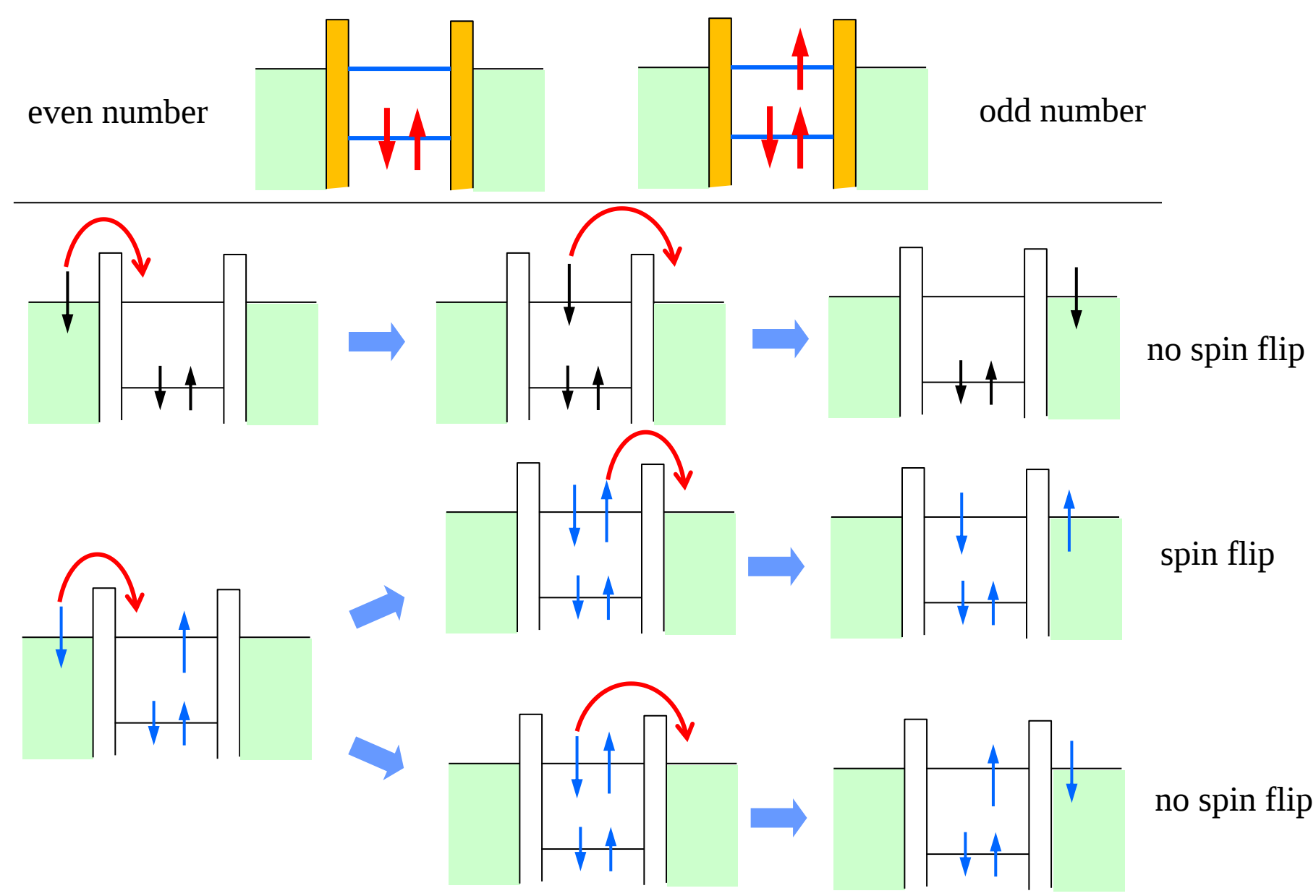


なぜ磁性不純物で decohere するのか？



Shopper et al. PRL **90**, 056801 (2003).

ドットスピンの有無でdecoherenceがON/OFFする？

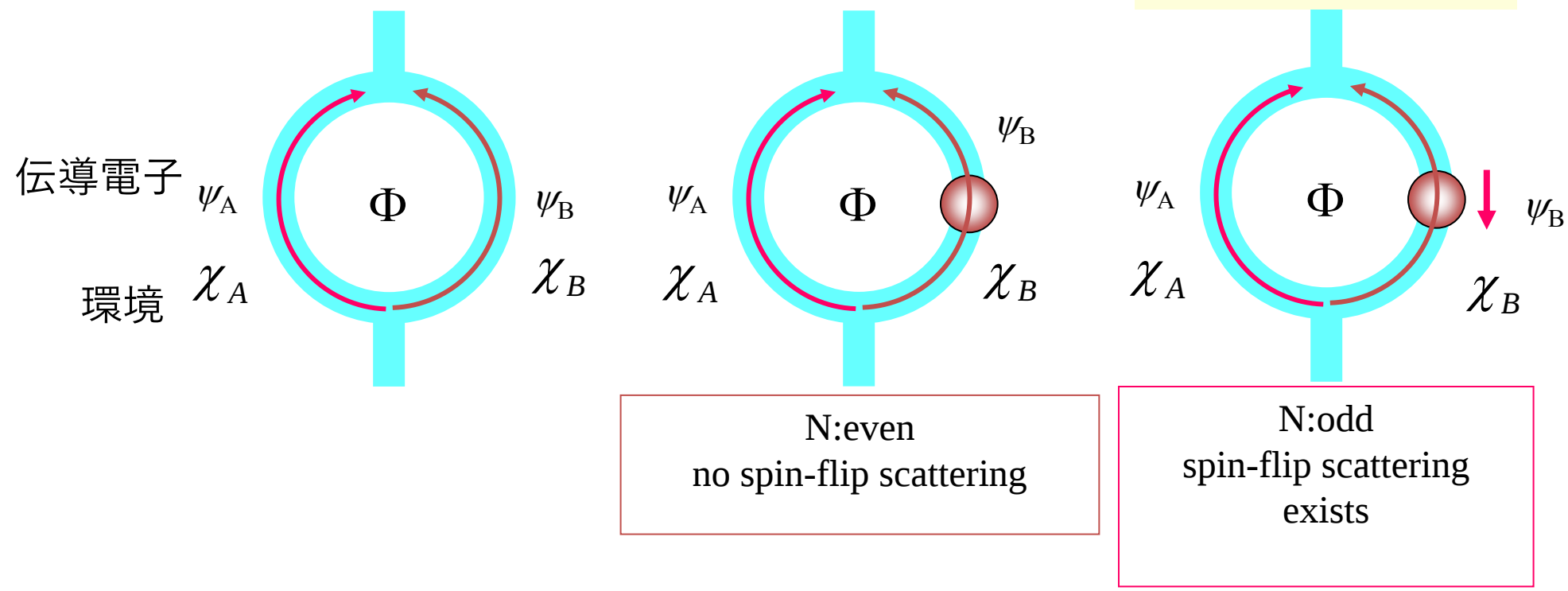


$$2|\psi_A||\psi_B|\cos\theta\int d\xi\chi_A(\xi)\chi_B^*(\xi)$$

$$2|\psi_A||\psi_B|\cos\theta$$

χ_A :spin-up χ_B :spin-down
interference term : 0

Partial coherence



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|s \uparrow\rangle |d \downarrow\rangle - |s \downarrow\rangle |d \uparrow\rangle)$$

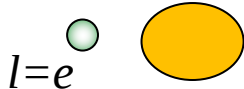
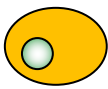
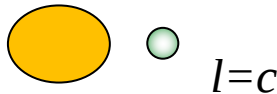
スピン散乱により経路自由度とドットスピンのエンタングルする

H. Akera, PRB59, 9802 (1999).

$$H = H_d + H_L + H_t$$

dot lead tunnel

$$H_d = \sum_{n\sigma} \epsilon_{n\sigma} c_{n\sigma}^\dagger c_{n\sigma} + H_{\text{int}} \quad H_L = \sum_{lk\sigma} \epsilon_{lk\sigma} c_{lk\sigma}^\dagger c_{lk\sigma} \quad H_t = \sum_{lkn\sigma} (V_{lkn} c_{lk\sigma}^\dagger c_{n\sigma} + h.c.)$$

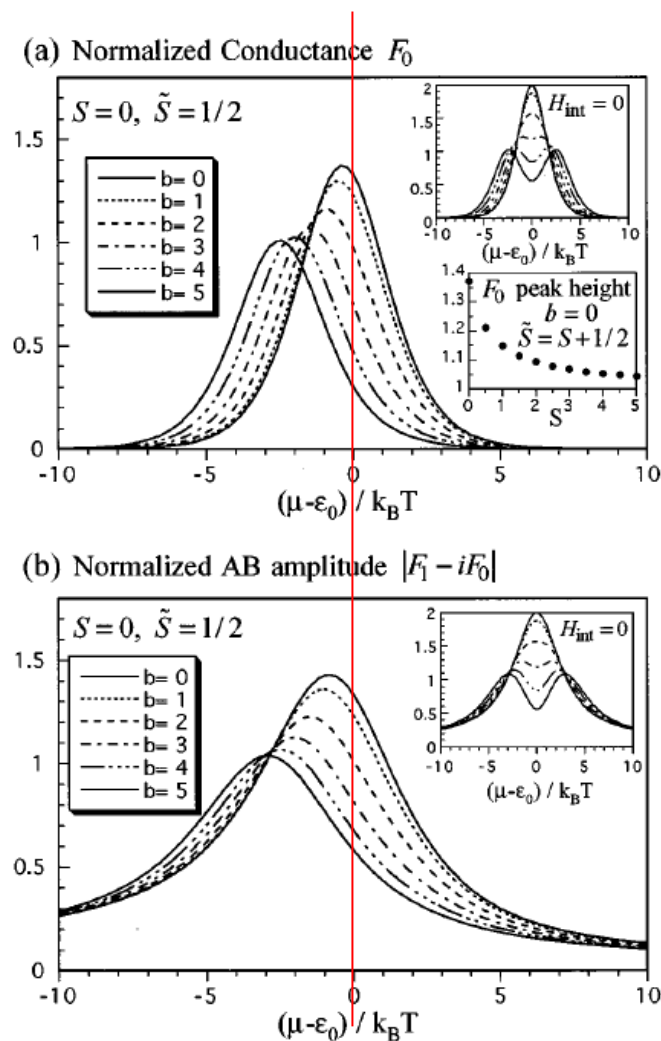
Initial	Intermediate	Final
$ i\rangle = ek\sigma, L; N, SS_z\rangle$	$ m\rangle = L; N + 1, \tilde{S}\tilde{S}_z\rangle$	$ f\rangle = ck'\sigma', L; SS'_z\rangle$
	$\tilde{S}_z = S_z + \sigma/2$	$S'_z + \sigma'/2 = S_z + \sigma/2$
		

$$P_{i,f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle i|\hat{T}|f\rangle|^2 \delta(E_i - E_f)$$

$$I = -e \sum_{k\sigma S_z} \sum_{k'\sigma' S'_z} [P_{i,f} f_{ek\sigma} (1 - f_{ck'\sigma'}) g_{NS_z} - P_{f,i} f_{ck'\sigma'} (1 - f_{ek\sigma}) g_{NS'_z}]$$

The retarded Green function is calculated on the non-crossing approximation.

H. Akera, PRB59, 9802 (1999).



Koenig & Gefen PRL86, 3855('01), PRB65,04316('02).

Keldysh Green function approach

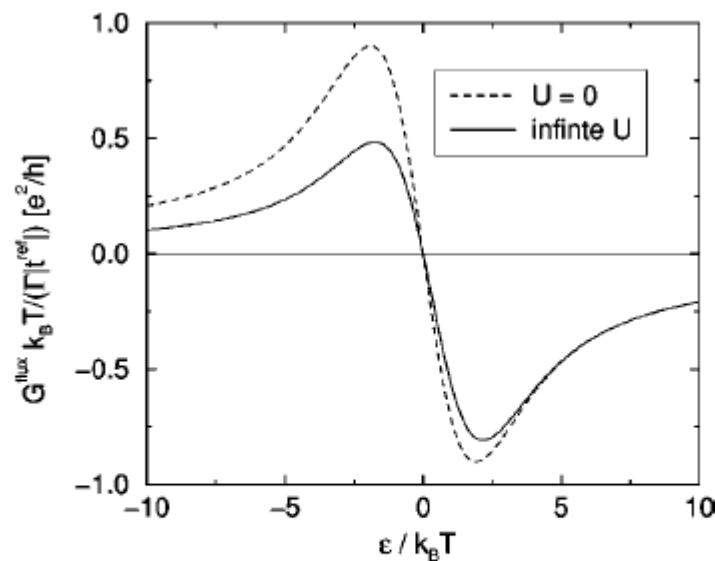


FIG. 5. Interference signal for AB interferometer with a single QD. Asymmetry in the magnitude of the signal appears for nonzero U . Plotted is the flux-dependent part of the conductance, normalized by $|r^{ref}| \Gamma / (k_B T)$, in units of e^2/h .

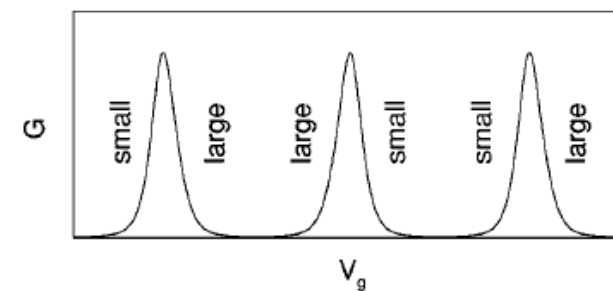
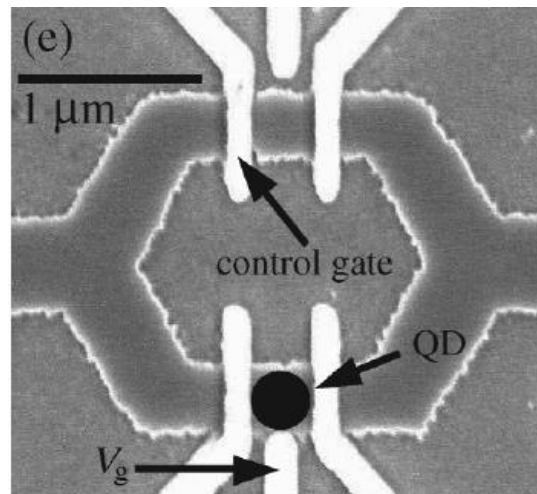


FIG. 6. Sequence of asymmetry of AB oscillations in the Coulomb blockade regime. The solid line depicts schematically the conductance oscillations vs the gate voltage V_g , and shows the Coulomb peaks. Regions of small and large AB amplitudes are indicated, showing the asymmetry between two adjacent Coulomb blockade valleys ("large" corresponds to a valley with a total spin 0, while "small" corresponds to an $S=1/2$ valley).

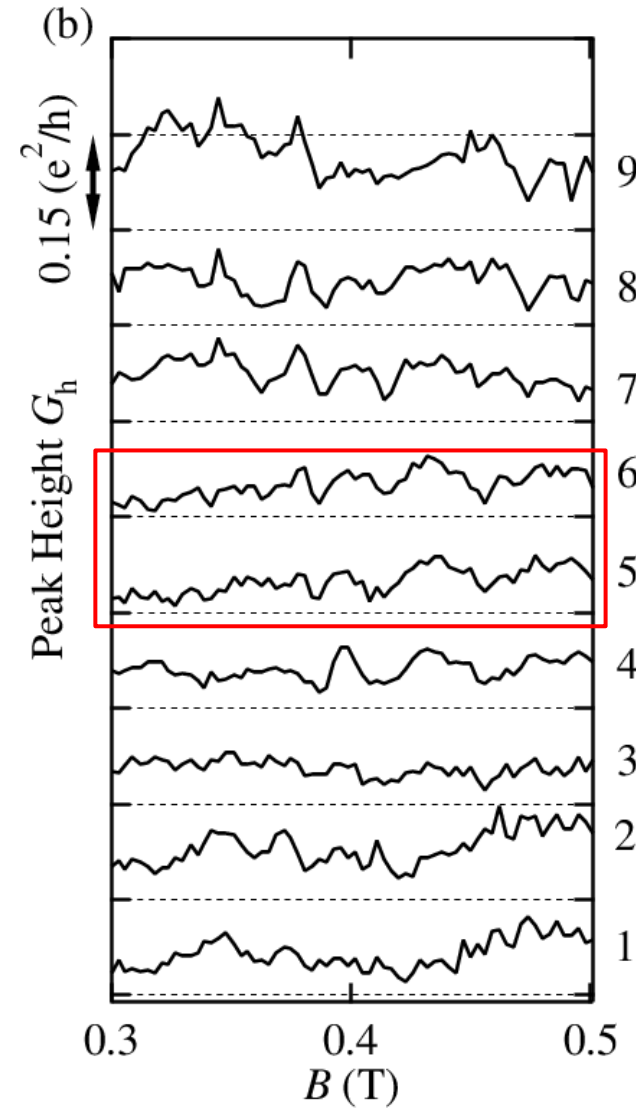
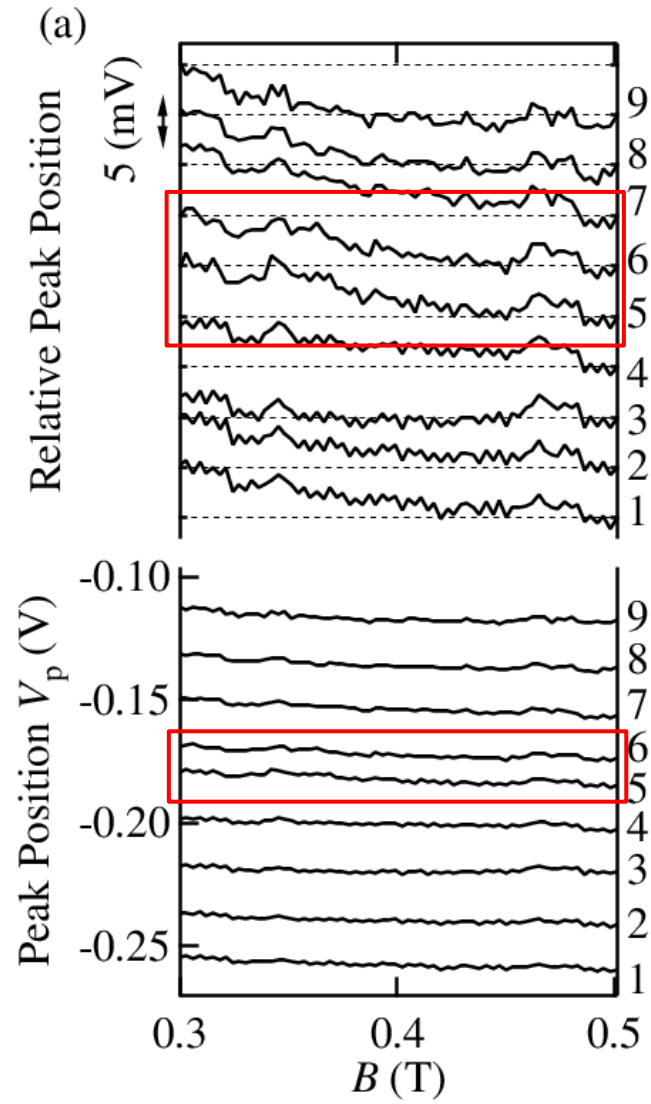
Problem: How to prepare the same transport condition but the electron spins on the dot?

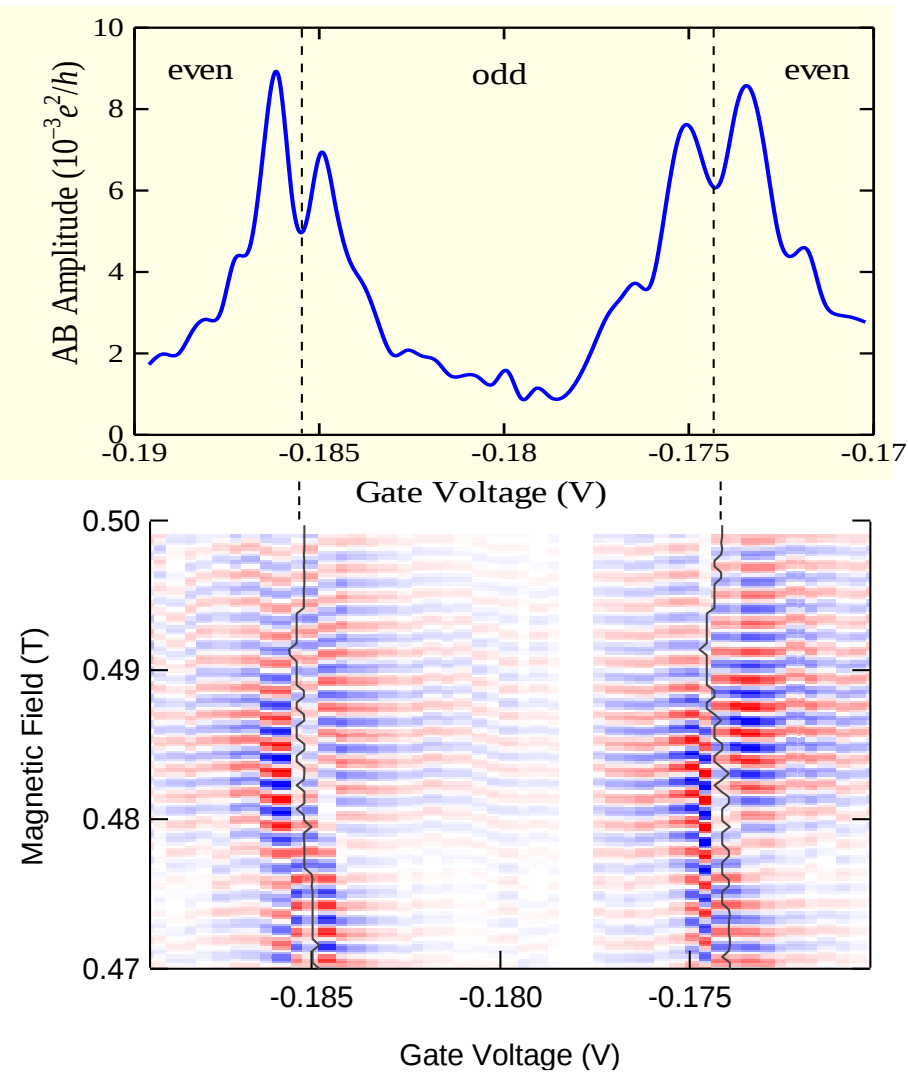
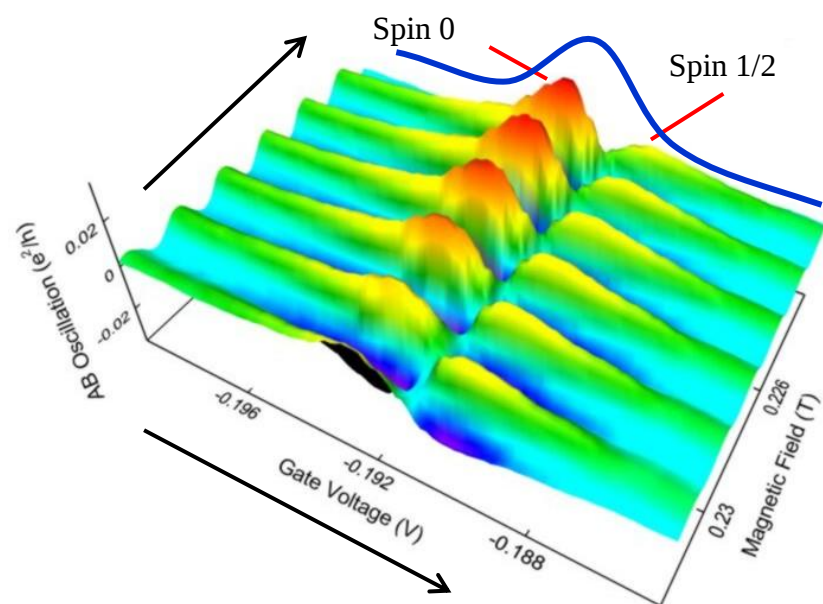
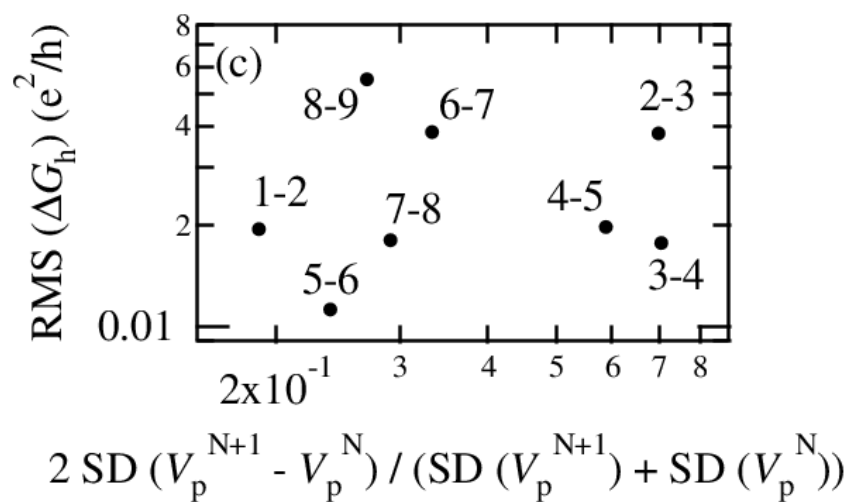
AB amplitude: strongly affected by conducting channels, tunneling probabilities, etc. They easily change with the gate voltage.

Answer: Find "spin-pair" state! the same quantum state but spin

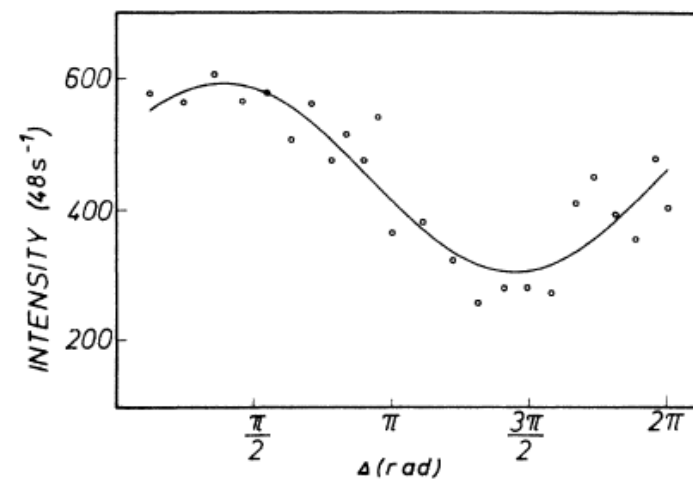
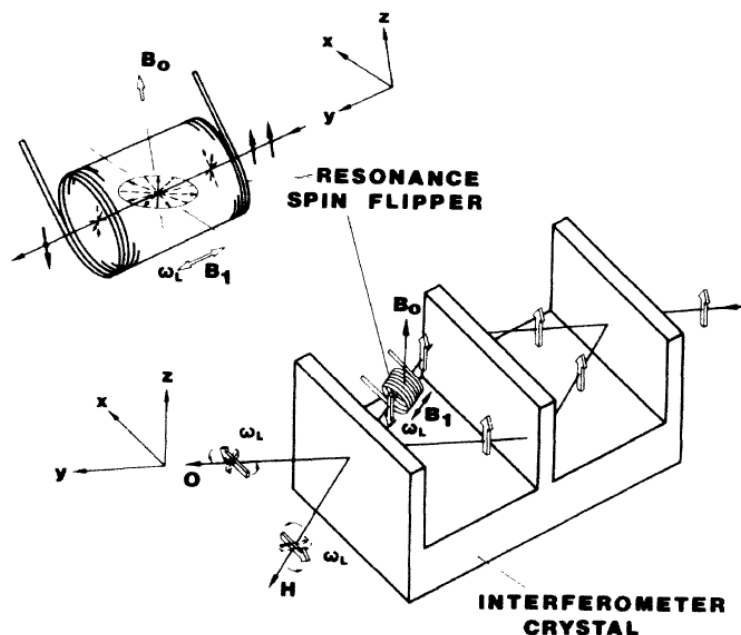


Sample configuration



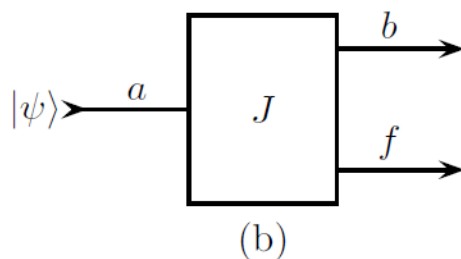
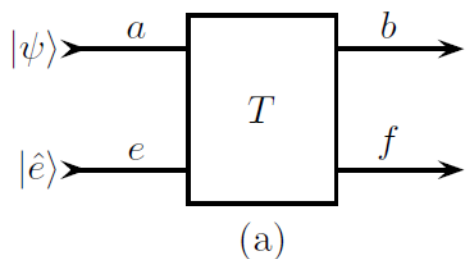


H. Aikawa et al. PRL **92**, 176802 ('04)



Badurek et al. PRA 34, 2600 (1986).

What is the difference?



Isometry J

$$J|\psi\rangle = T(|\psi\rangle \otimes |\hat{e}\rangle) = \sum_k (K_k |\psi\rangle) \otimes |f^k\rangle.$$

Neutron diffraction: adiabatic, nearly perfect quantum channel

Quantum dot: noisy quantum channel

Summary

1. 量子輸送と本質的デコヒーレンス(?)
2. 多自由度環境中の量子ドット
3. 量子ドット伝導とスピン散乱によるデコヒーレンス