

2023.01.04 Lecture 6

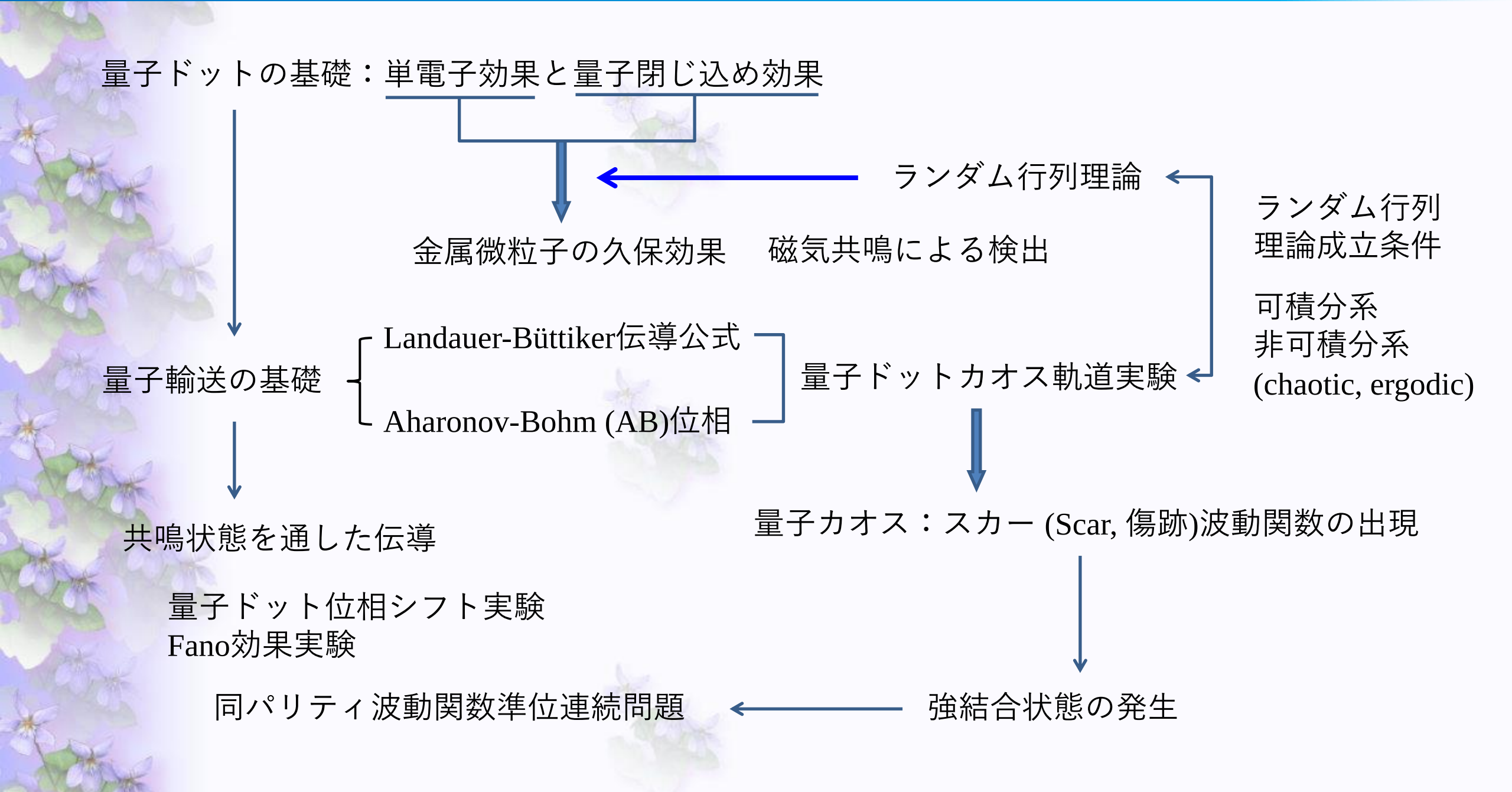
16:50 – 18:20

量子ドット 閉じ込めと開放の物理学

Institute for Solid State Physics, University of Tokyo

Shingo Katsumoto

Review (ほぼ一体問題)



Review-2 (多体問題)

量子情報処理と量子ビット

量子エンタングルメント
測定とエンタングルメント
量子系の量子回路表現
量子ゲート操作によるカオスの発生

量子ビットとしての量子ドット

2量子ドット系 電荷量子ビット
 スピントロケードスピン量子ビット
1量子ドット スピン量子ビット

量子ビットと量子デコヒーレンス

純粋状態と混合状態, 密度行列量子力学
ボソン (調和振動子) 環境中の量子ビット
記憶効果による非マルコフ過程化

古典 $\leftrightarrow$ 量子の相転移 $\rightarrow$ 超伝導絶縁体転移 (?)

Qubit in a fermion bath



So far

Quantum coherence in qubit

How about the fermions
traversing the qubit?

What is “measurement”?

$$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle + |\psi_B\rangle$$

そもそもなぜ、量子ドットで個数を数えた電子が干渉できるのか？

$$|\Psi\rangle = |\psi_A\rangle|A\rangle + |\psi_B\rangle|B\rangle$$

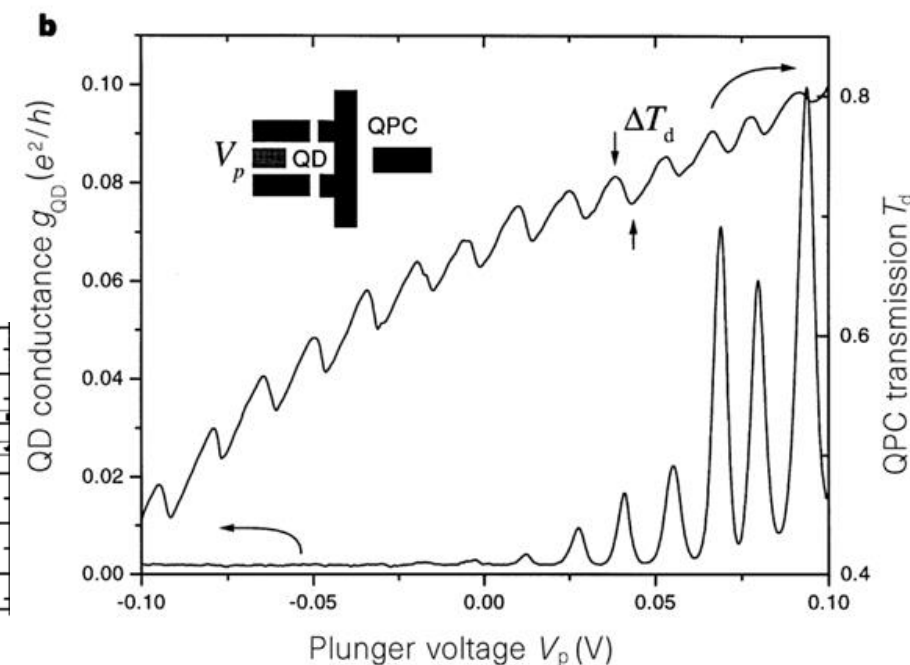
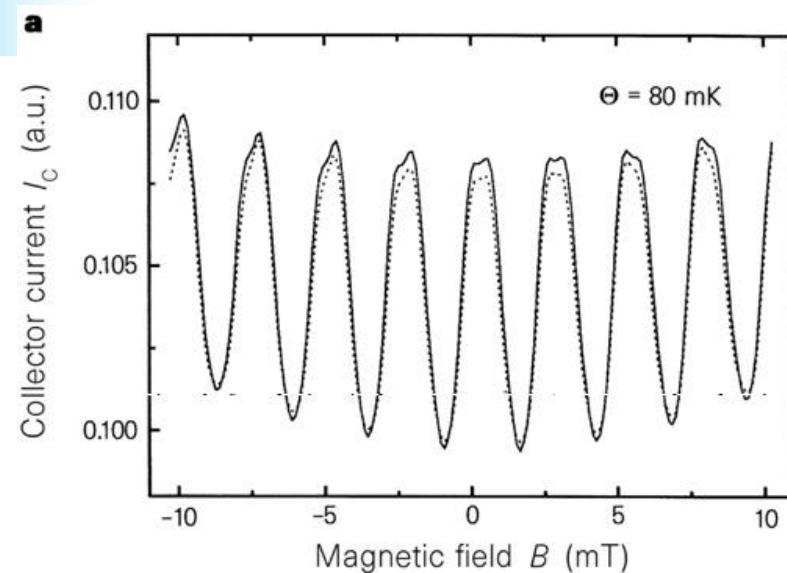
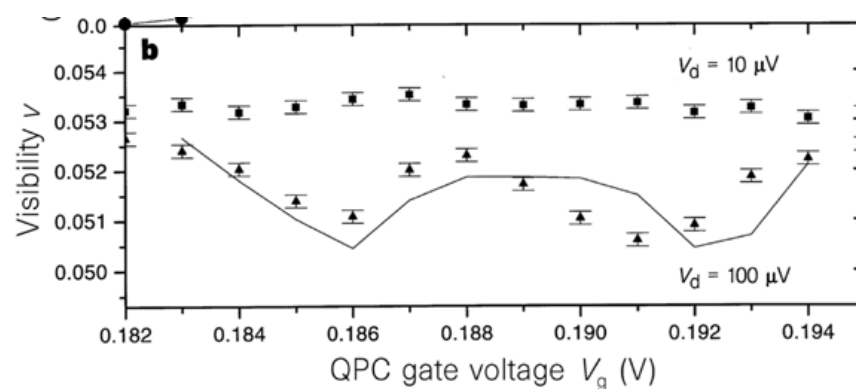
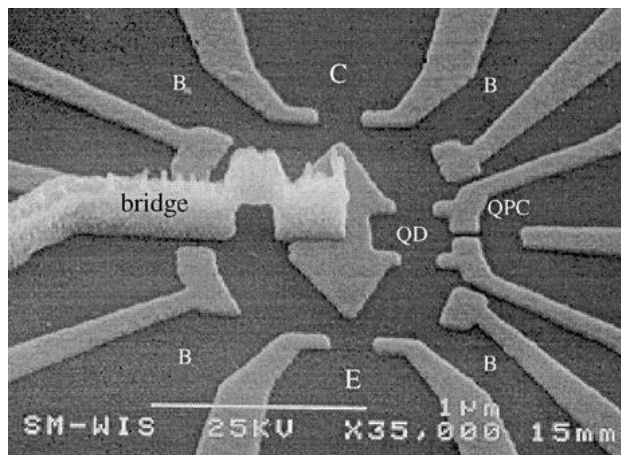
State entangled with macroscopically distinguishable states $|A\rangle$ and $|B\rangle$

“Collapse” of wavefunction into ψ_A (or ψ_B).

電気伝導する電子のコヒーレンス：干渉計の干渉成分振幅 (visibility) で判断できるのではないかな？

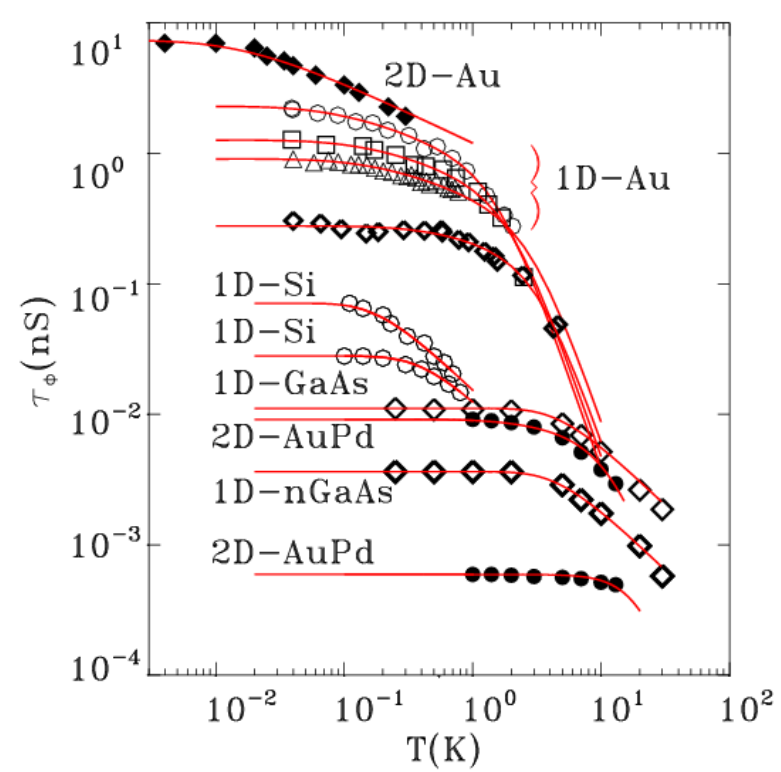
Buks et al. Nature **391**, 871 ('98)

QPC charge detector

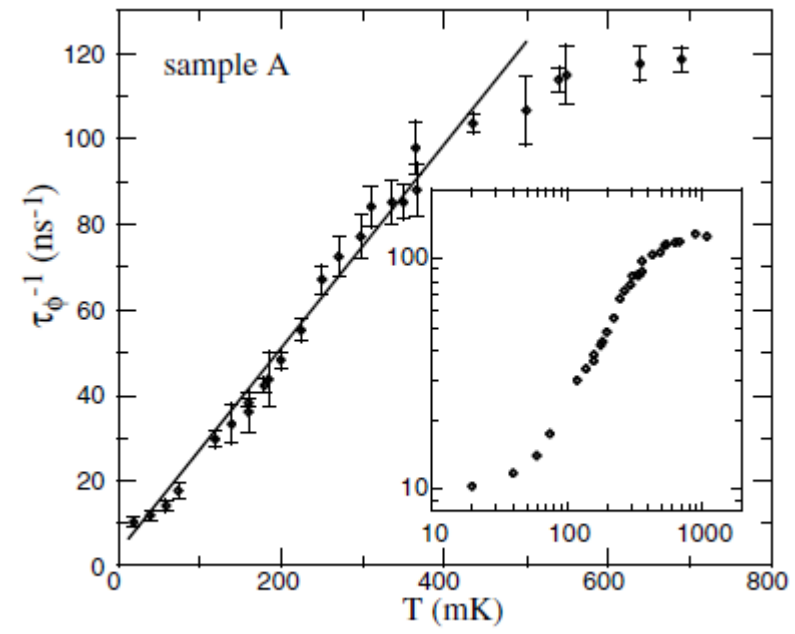


ノイズを検出しないとデコヒーレンスが生じない？

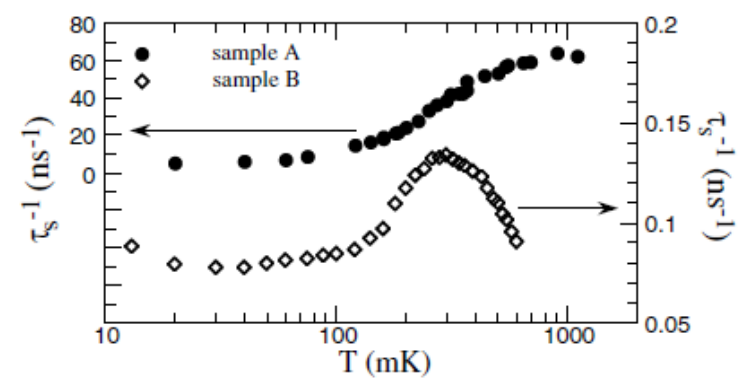
Quantum decoherence at low temperatures



Mohanty et al. PRL **78**, 3366 (1997).



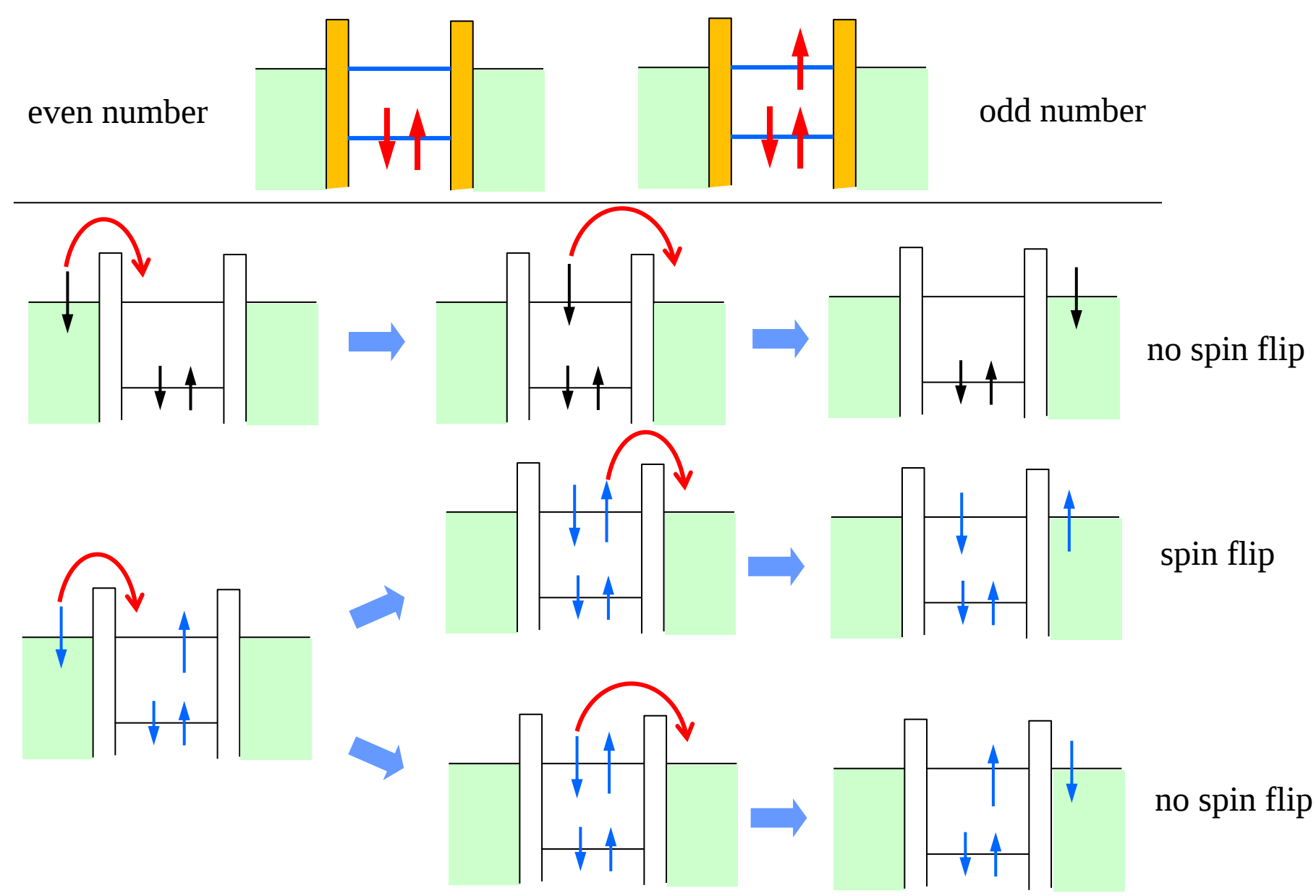
なぜ磁性不純物で decohere するのか？



Shopper et al. PRL **90**, 056801(03).

ドットスピンの有無でdecoherenceがON/OFFする？

量子ドット伝導のデコヒーレンス



スピン反転と部分的コヒーレンス

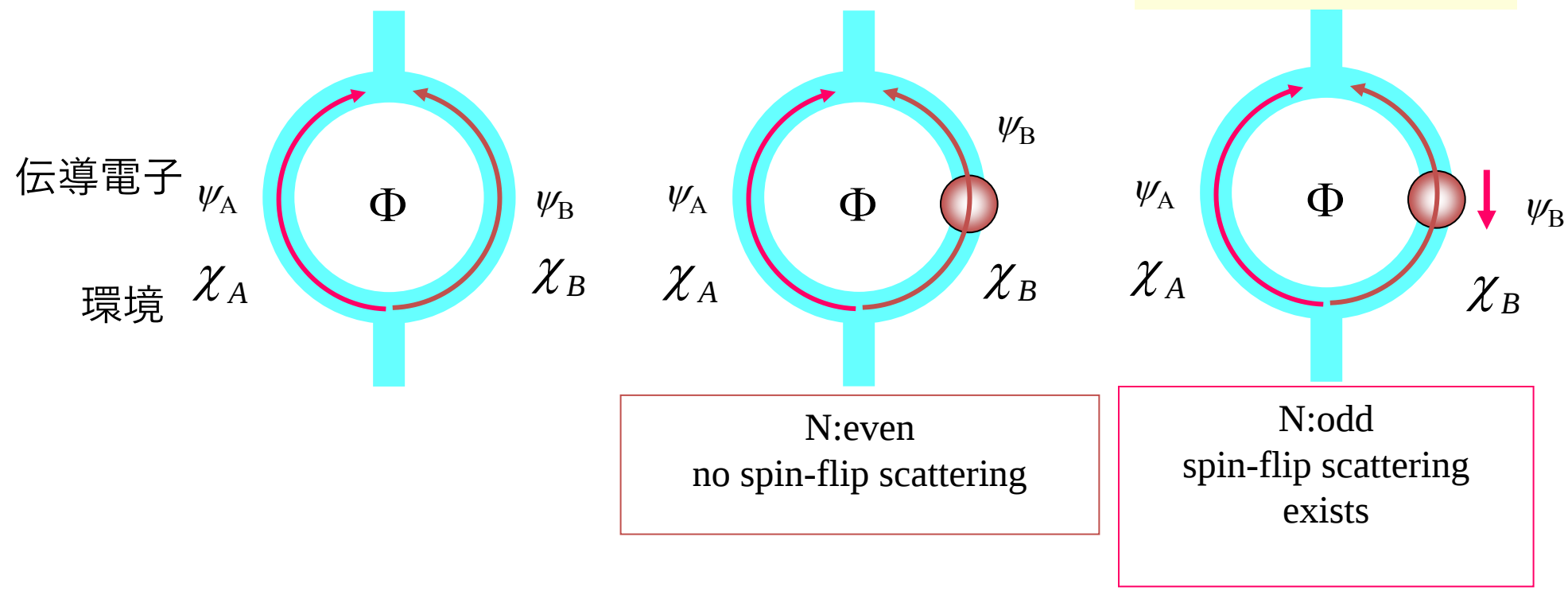
量子ドット伝導のデコヒーレンス

$$2|\psi_A||\psi_B|\cos\theta\int d\xi\chi_A(\xi)\chi_B^*(\xi)$$

$$2|\psi_A||\psi_B|\cos\theta$$

χ_A :spin-up χ_B :spin-down
interference term : 0

Partial coherence



$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|s \uparrow\rangle |d \downarrow\rangle - |s \downarrow\rangle |d \uparrow\rangle)$$

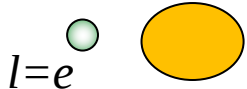
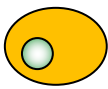
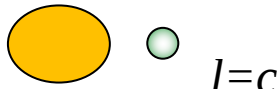
スピン散乱により経路自由度とドットスピンのエンタングルする

H. Akera, PRB59, 9802 (1999).

$$H = H_d + H_L + H_t$$

dot lead tunnel

$$H_d = \sum_{n\sigma} \epsilon_{n\sigma} c_{n\sigma}^\dagger c_{n\sigma} + H_{\text{int}} \quad H_L = \sum_{lk\sigma} \epsilon_{lk\sigma} c_{lk\sigma}^\dagger c_{lk\sigma} \quad H_t = \sum_{lkn\sigma} (V_{lkn} c_{lk\sigma}^\dagger c_{n\sigma} + h.c.)$$

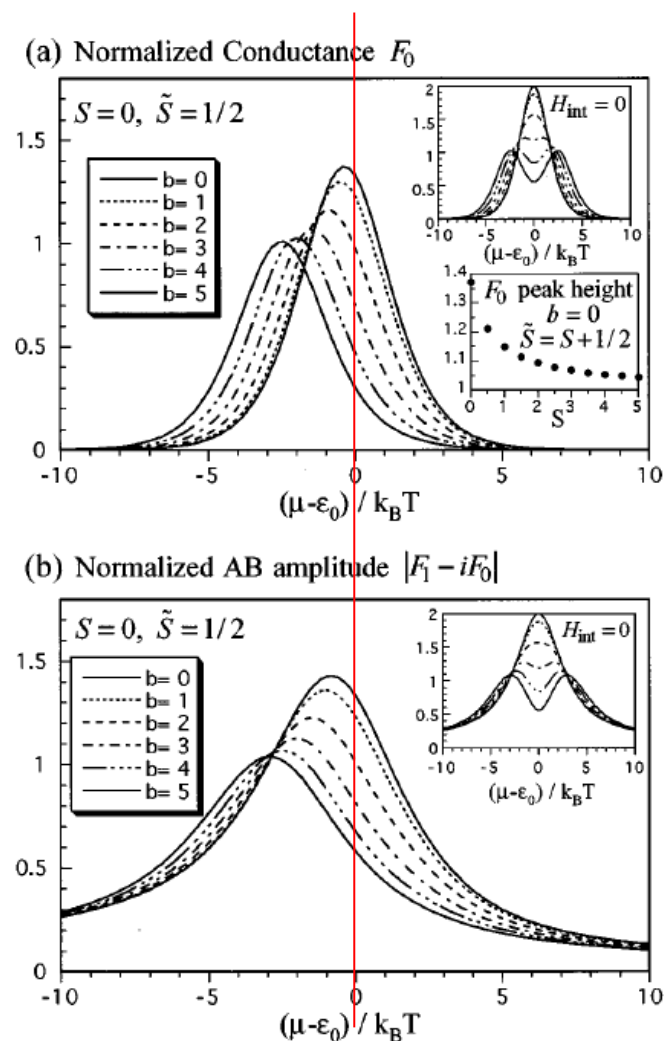
Initial	Intermediate	Final
$ i\rangle = ek\sigma, L; N, SS_z\rangle$	$ m\rangle = L; N+1, \tilde{S}\tilde{S}_z\rangle$	$ f\rangle = ck'\sigma', L; SS'_z\rangle$
	$\tilde{S}_z = S_z + \sigma/2$	$S'_z + \sigma'/2 = S_z + \sigma/2$
		

$$P_{i,f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle i|\hat{T}|f\rangle|^2 \delta(E_i - E_f)$$

$$I = -e \sum_{k\sigma S_z} \sum_{k'\sigma' S'_z} [P_{i,f} f_{ek\sigma} (1 - f_{ck'\sigma'}) g_{NS_z} - P_{f,i} f_{ck'\sigma'} (1 - f_{ek\sigma}) g_{NS'_z}]$$

The retarded Green function is calculated on the non-crossing approximation.

H. Akera, PRB59, 9802 (1999).



Koenig & Gefen PRL86, 3855('01), PRB65,04316('02).

Keldysh Green function approach

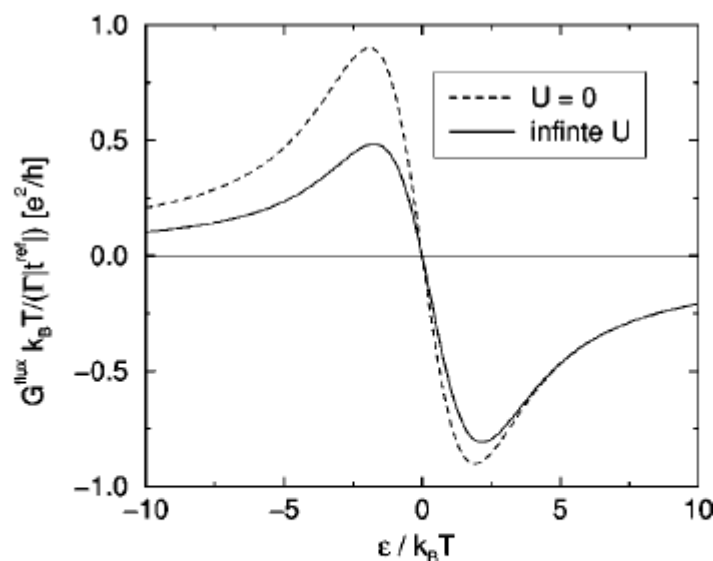


FIG. 5. Interference signal for AB interferometer with a single QD. Asymmetry in the magnitude of the signal appears for nonzero U . Plotted is the flux-dependent part of the conductance, normalized by $|t^{\text{ref}}| \Gamma / (k_B T)$, in units of e^2/h .

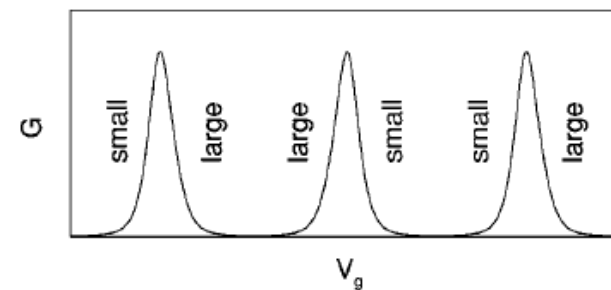


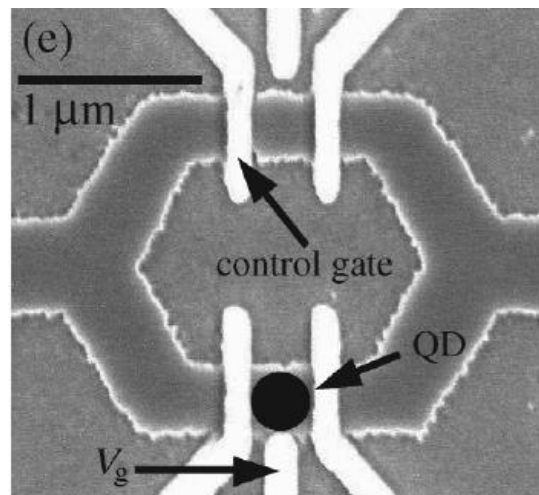
FIG. 6. Sequence of asymmetry of AB oscillations in the Coulomb blockade regime. The solid line depicts schematically the conductance oscillations vs the gate voltage V_g , and shows the Coulomb peaks. Regions of small and large AB amplitudes are indicated, showing the asymmetry between two adjacent Coulomb blockade valleys ("large" corresponds to a valley with a total spin 0, while "small" corresponds to an $S=1/2$ valley).

量子ドットスピン自由度は「環境」とエンタングルしてデコヒーレンスを起こすと仮定

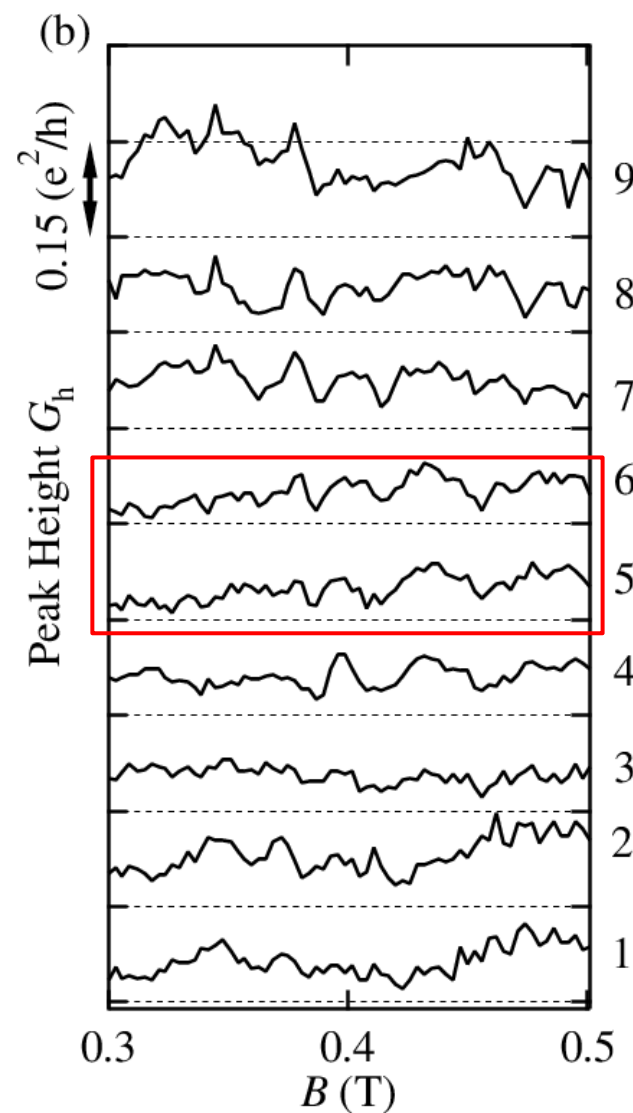
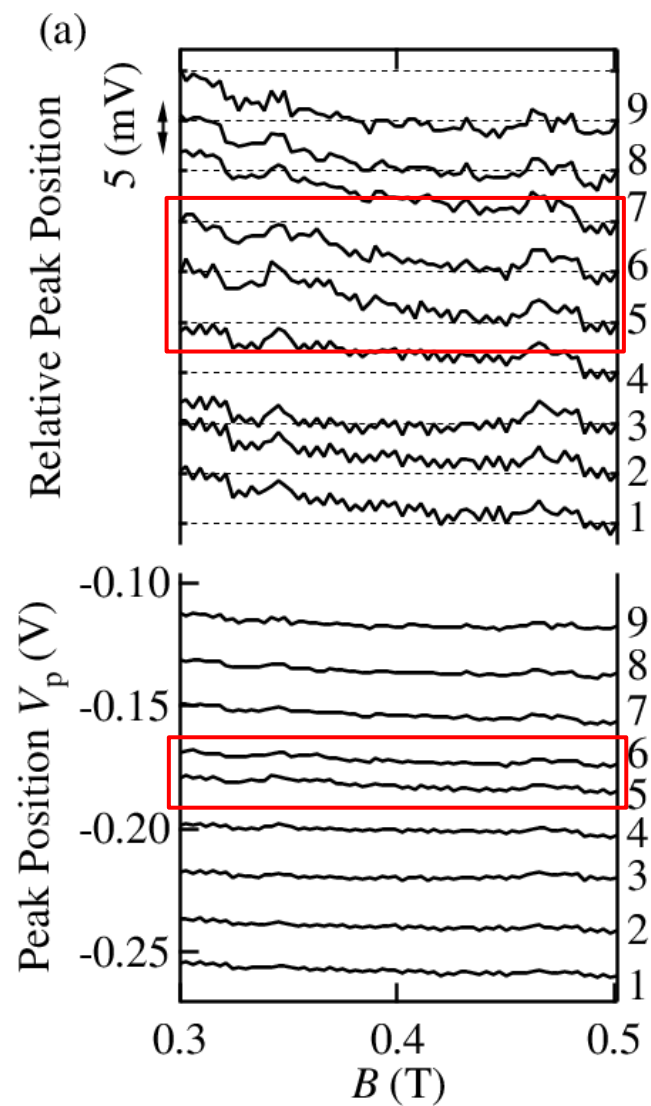
Problem: How to prepare the same transport condition but the electron spins on the dot?

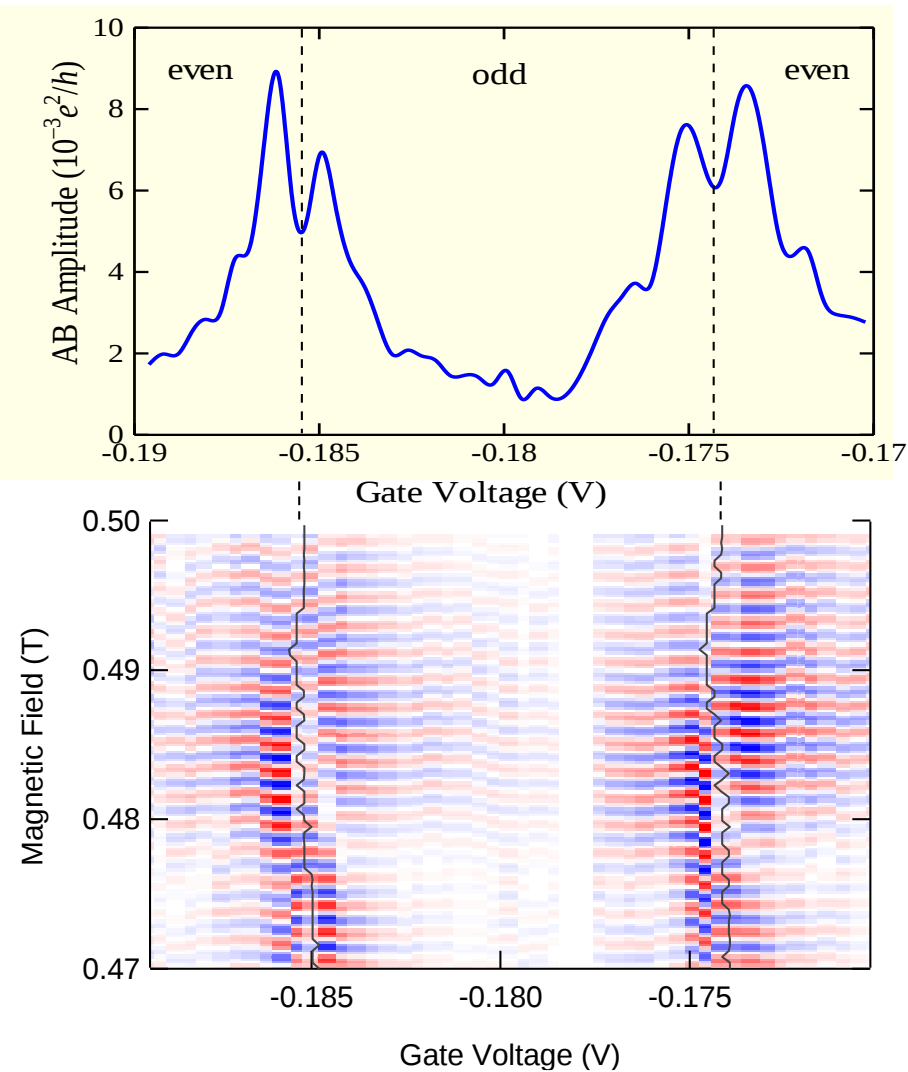
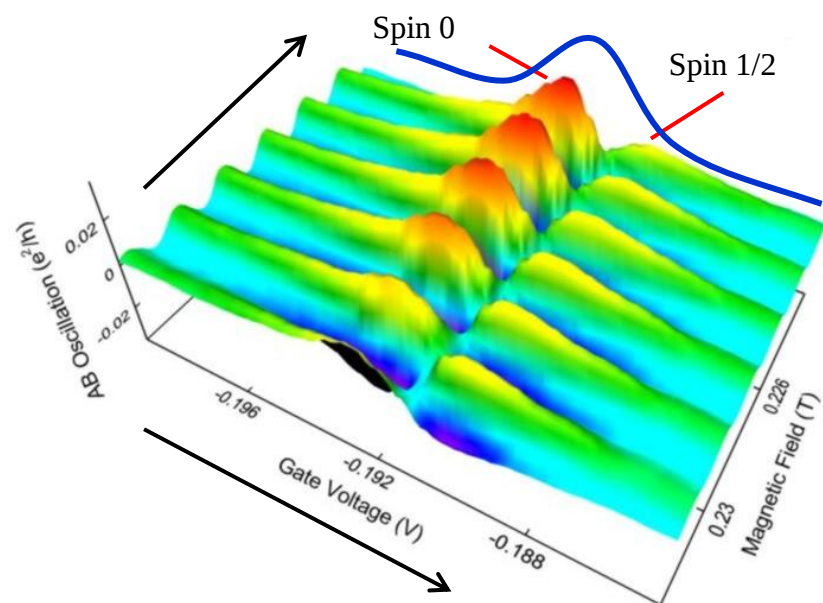
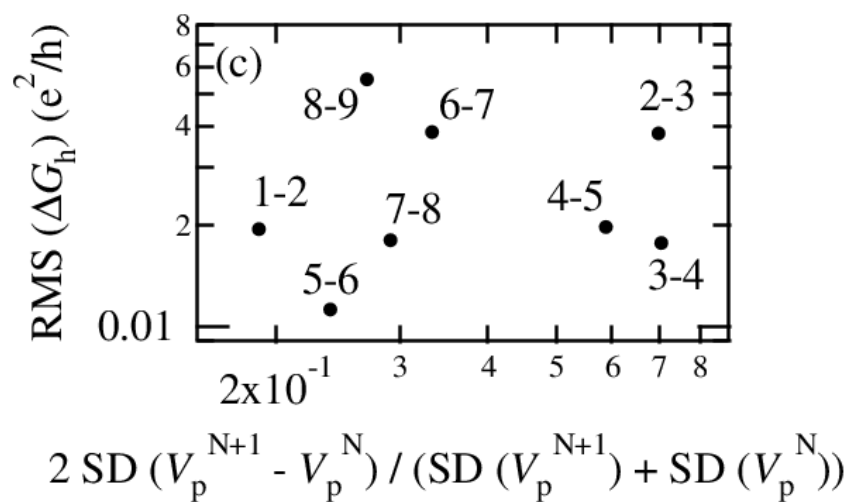
AB amplitude: strongly affected by conducting channels, tunneling probabilities, etc. They easily change with the gate voltage.

Answer: Find "spin-pair" state! the same quantum state but spin

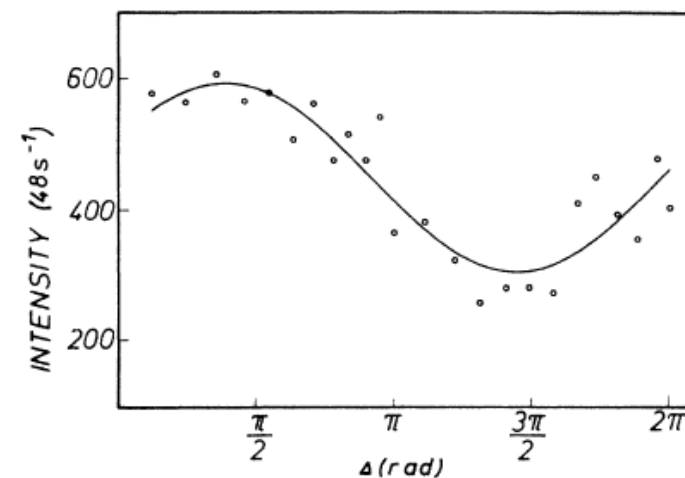
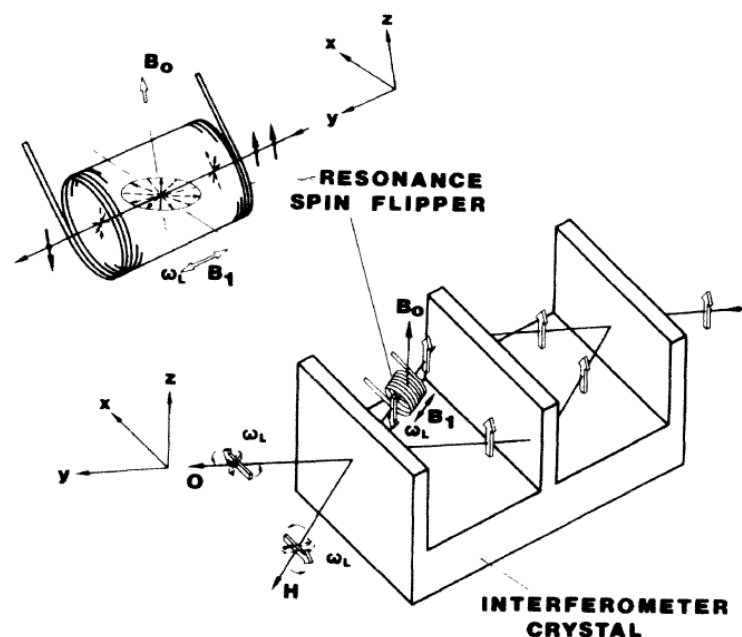


Sample configuration



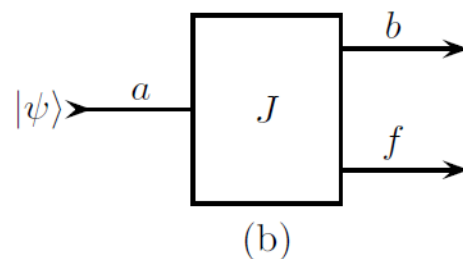
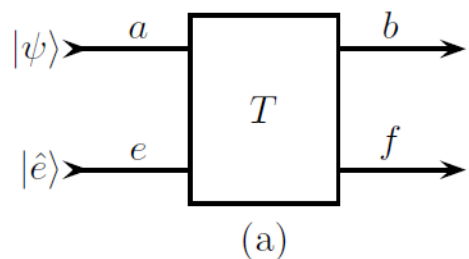


H. Aikawa et al. PRL **92**, 176802 ('04)



Badurek et al. PRA 34, 2600 (1986).

What is the difference?



Isometry J

$$J|\psi\rangle = T(|\psi\rangle \otimes |\hat{e}\rangle) = \sum_k (K_k |\psi\rangle) \otimes |f^k\rangle.$$

Neutron diffraction: adiabatic, nearly perfect quantum channel

Quantum dot: noisy quantum channel が成立しない場合：近藤効果

補遺) エネルギー散逸が遅い場合の取り扱い

Caldeila-Leggett 量子Brown運動：散逸と運動速度が同程度

エネルギー散逸が遅い場合：Lindblad型量子マスター方程式 (マルコフ的)

マルコフ的マスター方程式：系が「過去を記憶することがない」環境に接している時に成立

$$\dot{\rho}(t) = L\rho(t)$$

$$L\rho = -i[H, \rho] + \sum_{\alpha} (2\Gamma_{\alpha}\rho\Gamma_{\alpha}^{\dagger} - \Gamma_{\alpha}^{\dagger}\Gamma_{\alpha}\rho - \rho\Gamma_{\alpha}^{\dagger}\Gamma_{\alpha}) \quad \Gamma_{\alpha} : \text{任意の演算子}$$

$$\text{CP map} \quad \Phi(\rho) = 2 \sum \Gamma_{\alpha}\rho\Gamma_{\alpha}^{\dagger}$$

$$L\rho = -i[H, \rho] + \Phi(\rho) - \frac{1}{2}(\Phi^{\dagger}(\mathbb{I})\rho + \rho\Phi^{\dagger}(\mathbb{I}))$$

熱浴の詳細が余り問題にならない場合

量子ドットの近藤効果とコヒーレンス



Kenneth Wilson

1936 - 2013

1982 Nobel prize



Jacques Friedel

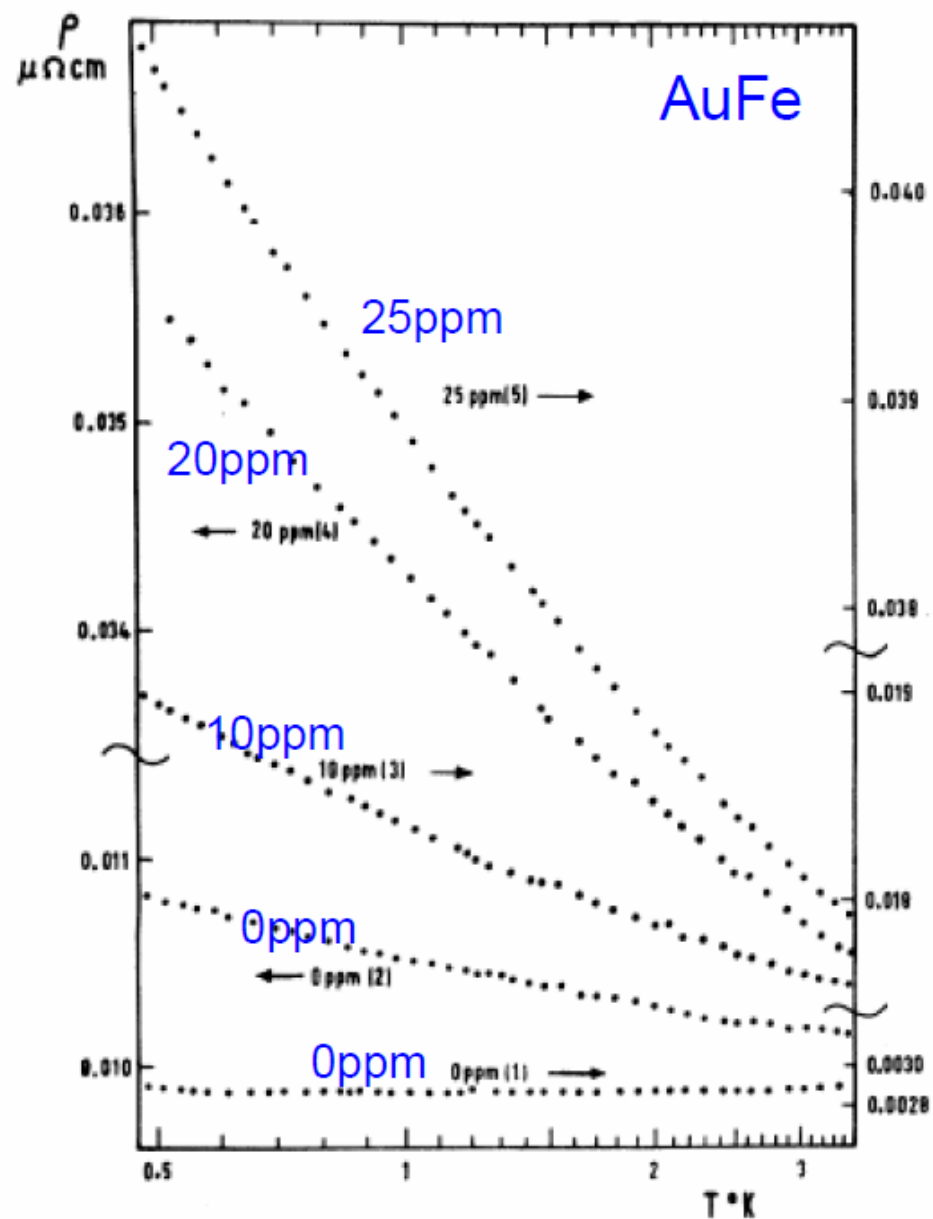
1921 - 2014



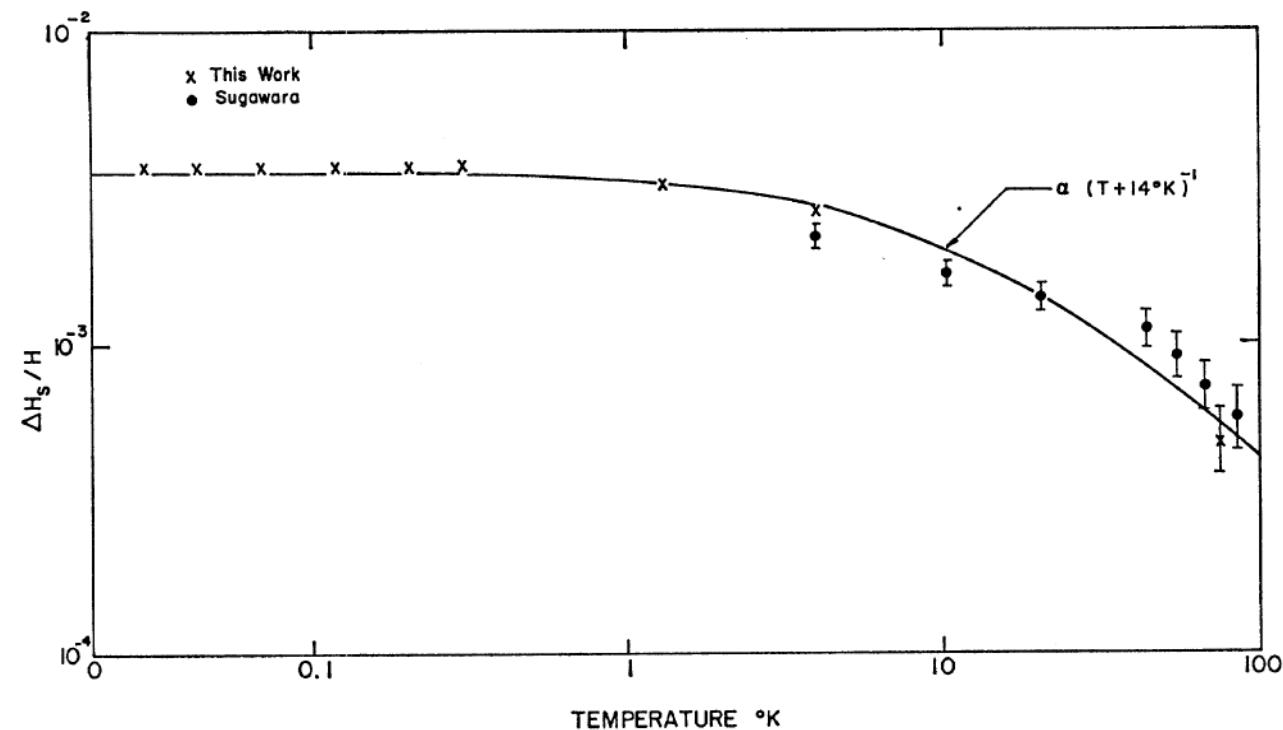
Jun Kondo

1930 - 2022

The Kondo effect in dilute magnetic alloy



CuFe NMR line width

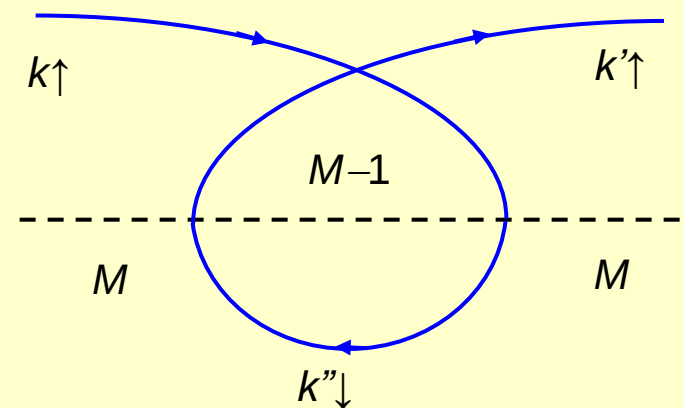
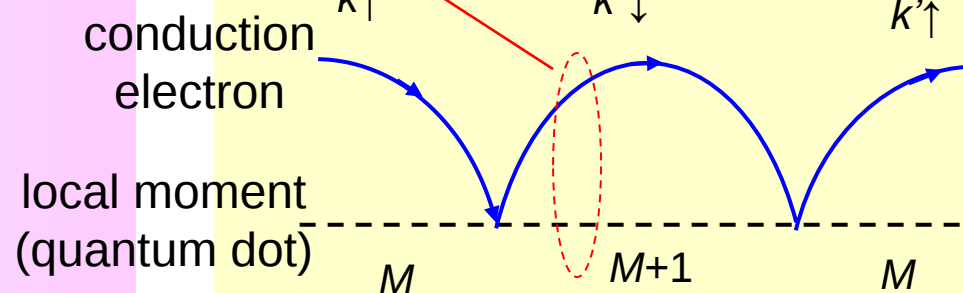
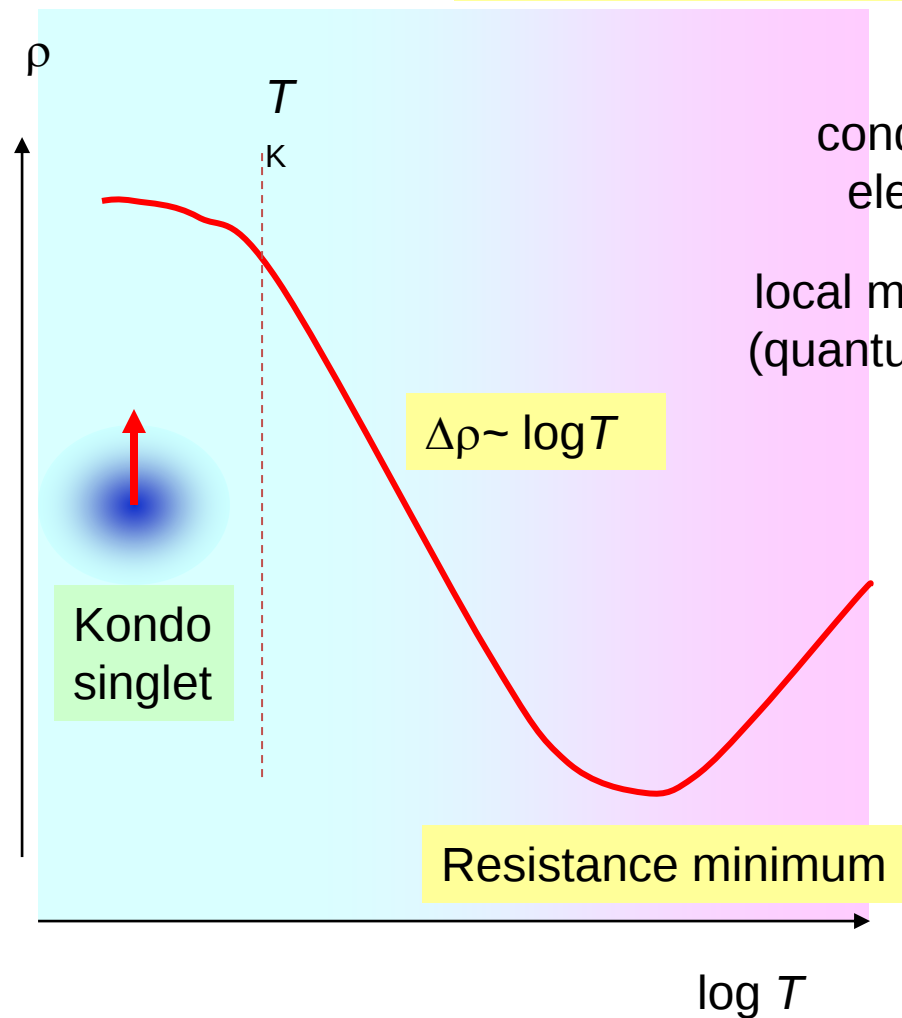


Heeger et al., Phys. Rev. **172**, 302 (1968)

The Kondo effect in dilute magnetic alloys

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|s\uparrow\rangle|d\downarrow\rangle - |s\downarrow\rangle|d\uparrow\rangle)$$

但し, S-W変換されている点は注意



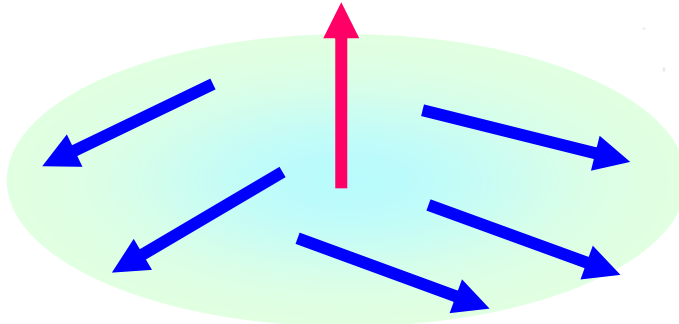
The Kondo singlet

Yosida's variational ground state A. Yoshimori, PR168 (1967)

Kondo
singlet

$$\begin{aligned} \underline{\psi} = & \left\{ \sum_k [\Gamma_k^\alpha a_{k\downarrow}^\dagger \alpha + \Gamma_k^\beta a_{k\uparrow}^\dagger \beta] \longrightarrow (|s\uparrow\rangle|d\downarrow\rangle - |s\downarrow\rangle|d\uparrow\rangle) \right. \\ & + \sum_{k_1 k_2 k_3} [\Gamma_{k_1 k_2 k_3}^{\alpha\downarrow} a_{k_1\downarrow}^\dagger a_{k_2\downarrow}^\dagger a_{k_3\downarrow} \alpha + \Gamma_{k_1 k_2 k_3}^{\beta\uparrow} a_{k_1\uparrow}^\dagger a_{k_2\uparrow}^\dagger a_{k_3\uparrow} \beta \\ & + \Gamma_{k_1 k_2 k_3}^{\alpha\uparrow} a_{k_1\downarrow}^\dagger a_{k_2\uparrow}^\dagger a_{k_3\uparrow} \alpha + \Gamma_{k_1 k_2 k_3}^{\beta\downarrow} a_{k_1\uparrow}^\dagger a_{k_2\downarrow}^\dagger a_{k_3\downarrow} \beta] \\ & \left. + \dots \right\} \underline{\psi}_v, \end{aligned}$$

Fermi State



Magnetic impurity : Screened by a Kondo cloud

Single body resonance ← Quantum coherence between multiply scattered waves
→ Spatially localized state, discrete energy levels

Many body resonance ← multiple scattering with many electrons of the same energy (Fermi energy) with quantum entanglement in spin
→ Spatially localized state, energy level is the same as the Fermi energy

不純物Anderson模型

Anderson模型

$\alpha = \text{L, R}$

(左右電極)

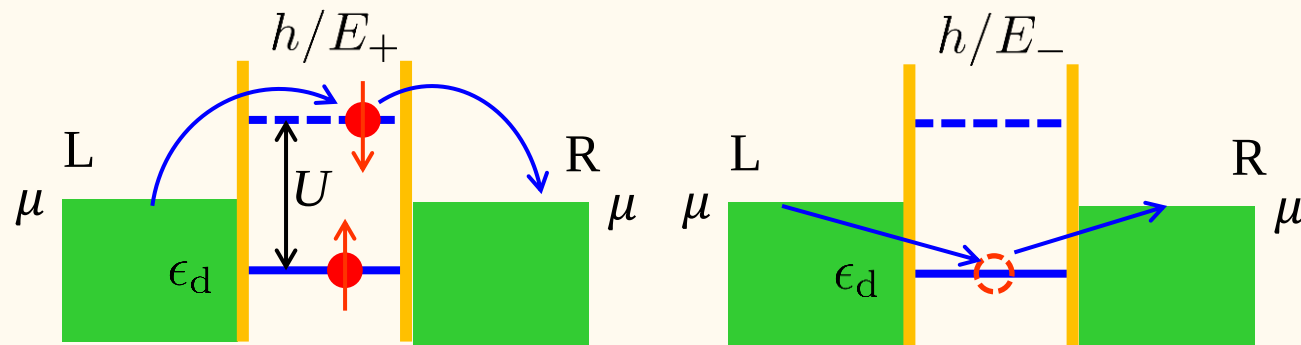
$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_{\alpha k \sigma} \epsilon_k c_{\alpha k \sigma}^\dagger c_{\alpha k \sigma}}_{\text{電極電子}} + \underbrace{\sum_{\sigma} \epsilon_d d_{\sigma}^\dagger d_{\sigma} + U d_{\uparrow}^\dagger d_{\uparrow} d_{\downarrow}^\dagger d_{\downarrow}}_{\text{ドット電子}} + \underbrace{\sum_{\alpha k \sigma} (V_{\alpha} c_{\alpha k \sigma}^\dagger d_{\sigma} + \text{h.c.})}_{\text{トンネル}}$$

電極電子

ドット電子

トンネル

有限寿命中間状態： $E_+ = \epsilon_d + U - \mu$, $E_- = \mu - \epsilon_d$ +: 電子付加, -: 電子逸出



中間状態を通したトンネル振幅：

$$\pm \frac{V_L^* V_R}{E_{\pm}} \quad (\text{co-tunneling})$$

ユニタリー変換

$$\gamma_{k\sigma} = (V_L^* c_{Lk\sigma} + V_R^* c_{Rk\sigma}) / \sqrt{|V_L|^2 + |V_R|^2} \quad \bar{\gamma}_{k\sigma} = (-V_R c_{Lk\sigma} + V_L c_{Rk\sigma}) / \sqrt{|V_L|^2 + |V_R|^2}$$

$\bar{\gamma}_{k\sigma}$ をトンネル項から落とし，電極自由度を消去

不純物Anderson模型とs-d模型 (Schrieffer-Wolf 変換) (ざっと見るだけ)

$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_{k\sigma} \epsilon_k \gamma_{\alpha k\sigma}^\dagger \gamma_{\alpha k\sigma}}_{\mathcal{H}_0} + \underbrace{\epsilon_d \sum_{\sigma} d_{\sigma}^\dagger d_{\sigma} + U d_{\uparrow}^\dagger d_{\uparrow} d_{\downarrow}^\dagger d_{\downarrow} + V \sum_{k\sigma} (\gamma_{k\sigma}^\dagger d_{\sigma} + \text{h.c.})}_{\mathcal{H}_1} \quad \mathcal{H}_1 \text{ を摂動とする}$$

S : 反エルミート演算子 ($S^\dagger = -S$)
(e^S はユニタリー)

$$\tilde{\mathcal{H}} = e^S \mathcal{H} e^{-S} = \mathcal{H} + [S, \mathcal{H}] + \frac{1}{2}[S, [S, \mathcal{H}]] + \dots$$

$$\mathcal{H}_1 + [S, \mathcal{H}_0] = 0 \quad \text{と } S \text{ を選ぶと, 最低次で } \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2}[S, \mathcal{H}_1]$$

S の具体的な形を求める. 試行形

$$S = \sum_{k\sigma} (A_k + B_k d_{-\sigma}^\dagger d_{-\sigma}) \gamma_{k\sigma}^\dagger d_{\sigma} - \text{h.c.}$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_0, S] &= \sum_{k\sigma} \epsilon_k (A_k + B_k n_{d-\sigma}) \gamma_{k\sigma}^\dagger d_{\sigma} + \text{h.c.} + \sum_{k\sigma} \epsilon_d (-A_k - B_k n_{d-\sigma}) \gamma_{k\sigma}^\dagger d_{\sigma} + \text{h.c.} \\ &\quad + U \sum_{k\sigma} (-A_k n_{d-\sigma} - B_k n_{d-\sigma}) \gamma_{k\sigma}^\dagger d_{\sigma} + \text{h.c.} \quad (n_{d\sigma} \equiv d_{\sigma}^\dagger d_{\sigma}) \\ &= \sum_{k\sigma} [(\epsilon_k - \epsilon_d) A_k + (\epsilon_k - \epsilon_d - U) n_{d-\sigma} B_k - A_k U n_{d-\sigma} B_k - A_k U n_{d-\sigma}] \gamma_{k\sigma}^\dagger d_{\sigma} + \text{h.c.} \end{aligned}$$

条件より

$$A_k = \frac{V}{\epsilon_k - \epsilon_d}, \quad B_k = V \left[\frac{1}{\epsilon_k - (\epsilon_d + U)} - \frac{1}{\epsilon_k - \epsilon_d} \right]$$

s-d 模型

以上を少し計算($|\epsilon_k - \mu| \ll E_{\pm}$ と仮定)すると有効ハミルトニアン

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k \gamma_{k\sigma}^{\dagger} \gamma_{k\sigma} + \frac{V^2 E_+ E_-}{E_+ + E_-} \sum_{kk'} [\hat{S}_+ \gamma_{k'\downarrow}^{\dagger} \gamma_{k\uparrow} + \hat{S}_- \gamma_{k'\uparrow}^{\dagger} \gamma_{k\downarrow} + \hat{S}_z (\gamma_{k'\uparrow}^{\dagger} \gamma_{k\uparrow} - \gamma_{k'\downarrow}^{\dagger} \gamma_{k\downarrow})] = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_J$$

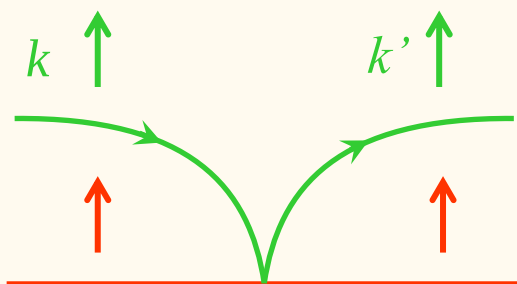
が得られる (s-d 模型). $J < 0$

$$\hat{S}_- = d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\uparrow}, \quad \hat{S}_+ = d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\downarrow}, \quad \hat{S}_z = (d_{\uparrow}^{\dagger} d_{\uparrow} - d_{\downarrow}^{\dagger} d_{\downarrow})/2$$

電気伝導への寄与
(不純物散乱)

簡単のため
 $|\uparrow; k \uparrow\rangle \rightarrow |\uparrow; k' \uparrow\rangle$
のみ

(1)

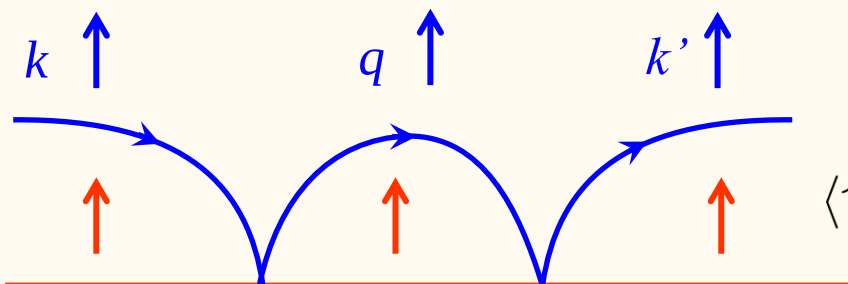


遷移確率
(Fermi 黄金則) $P = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle i | \hat{T} | f \rangle|^2 \delta(\epsilon_f - \epsilon_i)$

$$\hat{T} = \mathcal{H}_J + \mathcal{H}_J \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}_0 + i\delta} \mathcal{H}_J + \dots$$

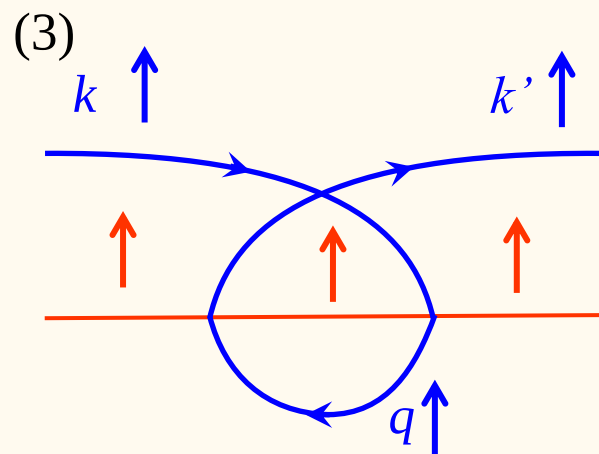
(2)

$$(1) \quad \langle \uparrow; k' \uparrow | \mathcal{H}_J | \uparrow; k \uparrow \rangle = J/2$$



(2)

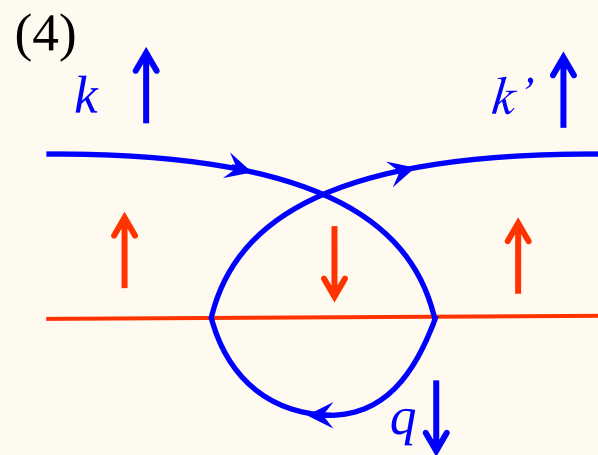
$$\langle \uparrow; k' \uparrow | \left[\mathcal{H}_J \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}_0 + i\delta} \mathcal{H}_J \right]_{(2)} | \uparrow; k \uparrow \rangle = \sum_q \frac{J^2}{4} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_q + i\delta} [1 - f(\epsilon_q)]$$



$$(3) \quad \langle \uparrow; k' \uparrow | \left[\mathcal{H}_J \frac{1}{\epsilon - \mathcal{H}_0 + i\delta} \mathcal{H}_J \right]_{(3)} | \uparrow; k \uparrow \rangle = \sum_q \frac{J^2}{4} \frac{-1}{\epsilon - (2\epsilon - \epsilon_q) + i\delta} f(\epsilon_q)$$

$$(2)+(3) \quad \sum_q \frac{J^2}{4} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_q + i\delta} = \frac{J^2}{4} \int_{-D}^D \frac{\rho d\epsilon'}{\epsilon - \epsilon' + i\delta} = \frac{J^2}{4} \rho \left[\ln \left| \frac{D + \epsilon}{D - \epsilon} \right| - i\pi \right]$$

D : バンド幅, ρ : 状態密度 Fermi分布関数は相殺し, 異常は生じない
(電子-正孔対称性)

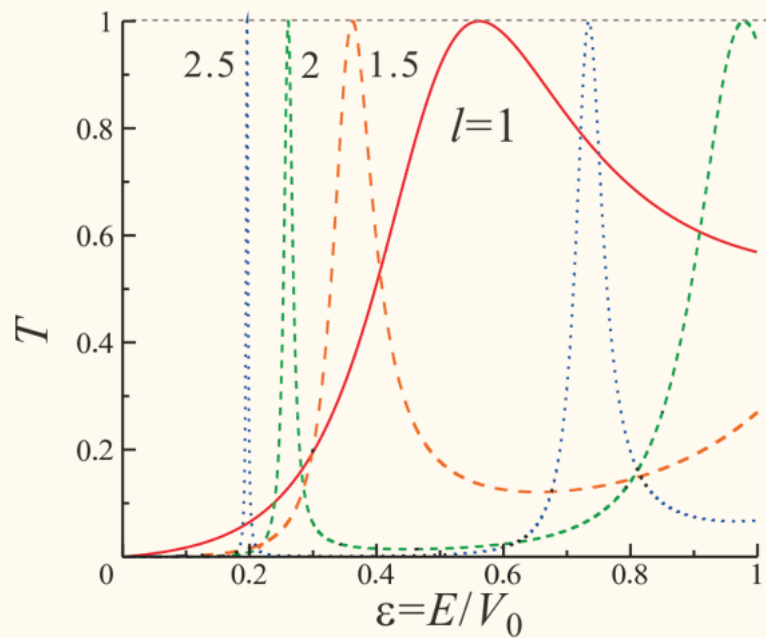


↓ 電子はdotから放出できない: (2)のスピンの反転プロセスはない

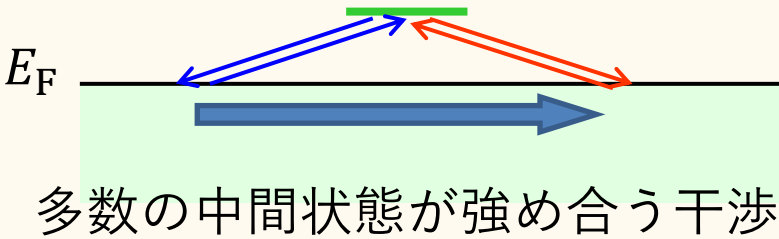
$$\sum_q J^2 \frac{f(\epsilon_q)}{\epsilon - \epsilon_q + i\delta} = J^2 \int_{-D}^D \frac{f(\epsilon') \rho d\epsilon'}{\epsilon - \epsilon' + i\delta} \approx -J^2 \rho \ln \frac{k_B T}{D} \quad |\epsilon| \ll k_B T$$

$\ln T$ 依存性はFermi端から生じている

結局何が起きているのか？



近藤雲状態

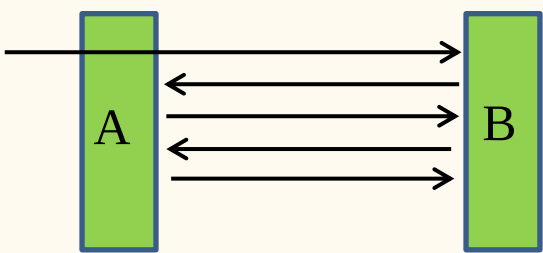


多数の中間状態が強め合う干渉

量子ビット縮退自由度により(通常はこの効果を相殺している)電子-正孔対称性が破れる

一体の共鳴状態の例 (2重量子井戸, S行列の接続)

$$\left(I - r_R^{(A)} r_L^{(B)}\right)^{-1} = I + r_R^{(A)} r_L^{(B)} + \left(r_R^{(A)} r_L^{(B)}\right)^2 + \left(r_R^{(A)} r_L^{(B)}\right)^3 + \dots$$



無限回の反射波の干渉効果



孤立している場合：Scar 波動関数

共鳴状態：透過率 1

E_F より下：全状態が占有, E_F より上：全状態が空乏

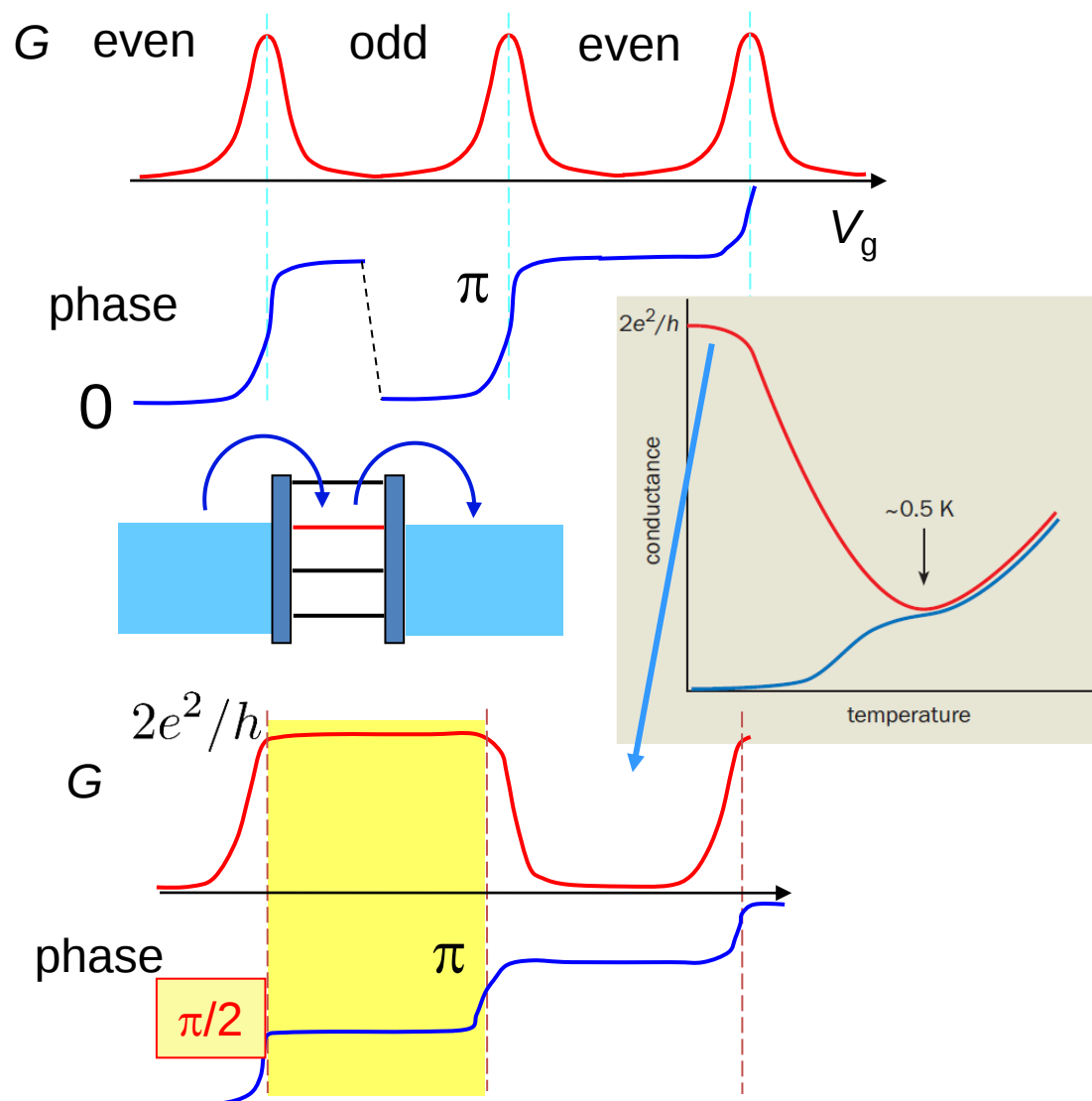
多数の電子が同じエネルギー状態にあることによる共鳴状態

多体の共鳴状態



多体のScar 波動関数

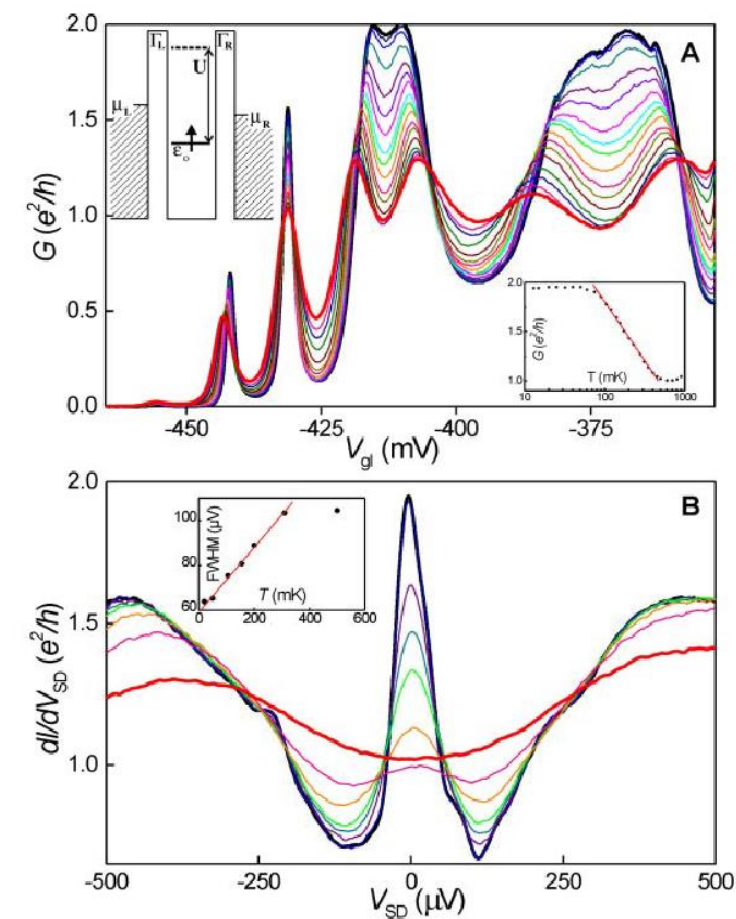
The Kondo effect in quantum dots



共鳴状態

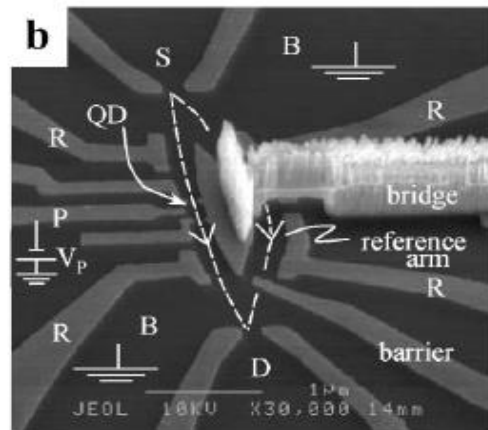
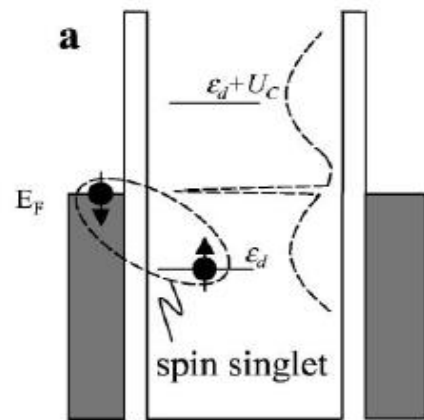
透過率

位相シフト



W. G. van der Wiel et al.
Science **289**, 2105 (2000).

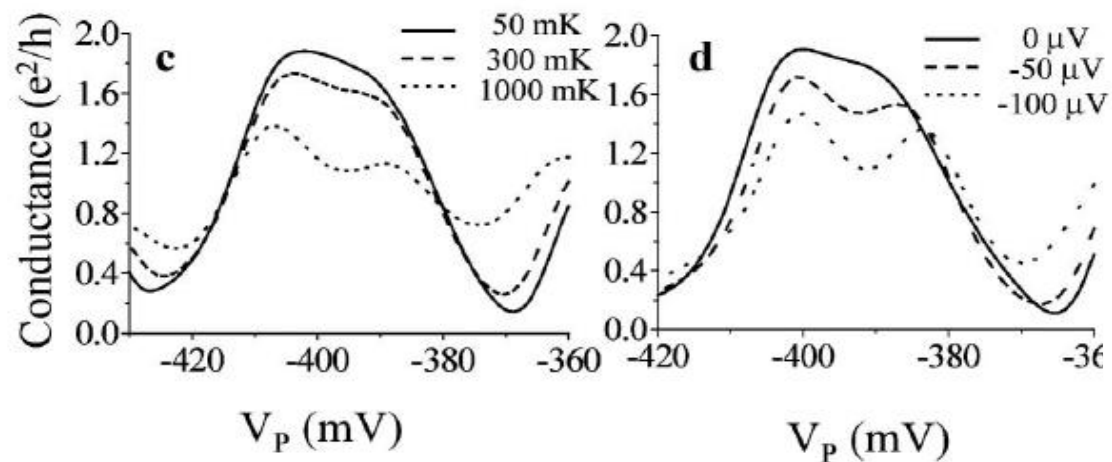
“Phase Sensitive” Measurement



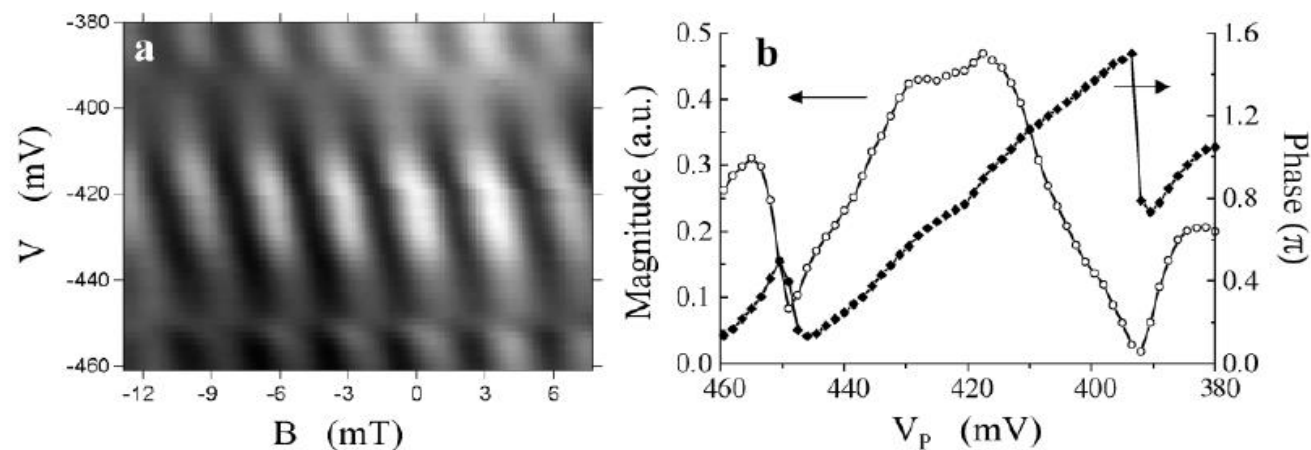
Coherence appears as the AB oscillation

No phase shift locking to $\pi/2$?

Breakdown of Anderson impurity model?



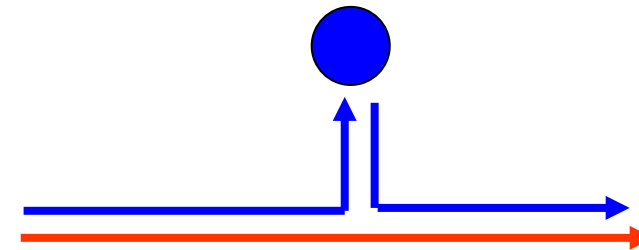
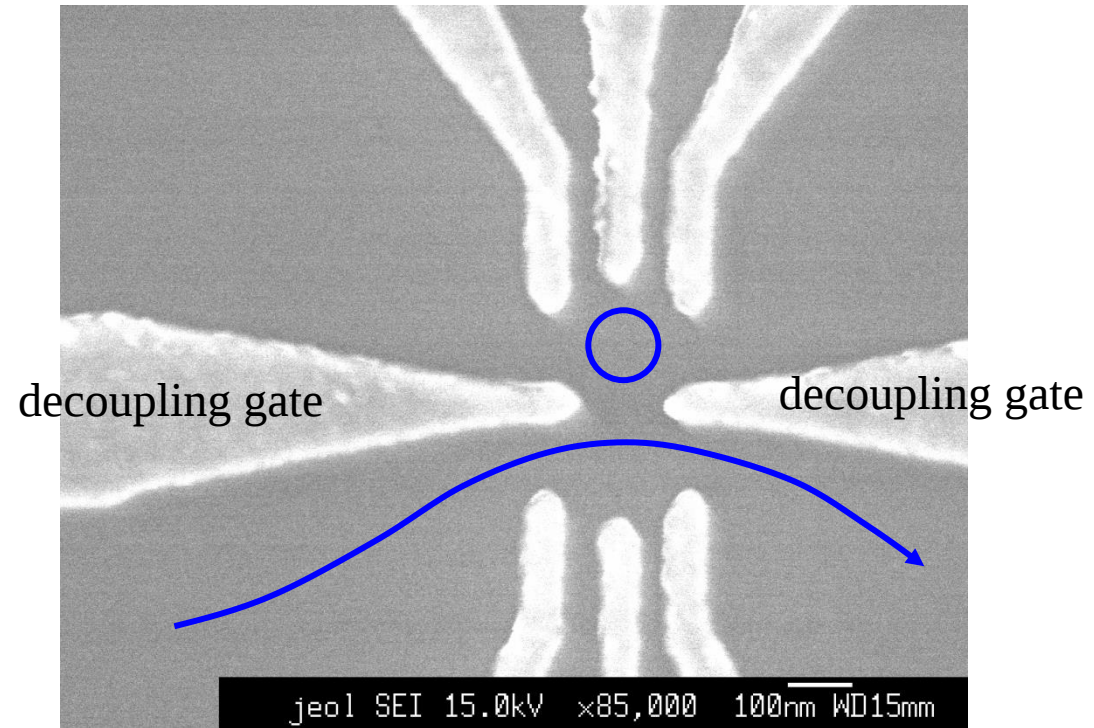
Y. Ji et al. PRL **88**, 076601 (2002)

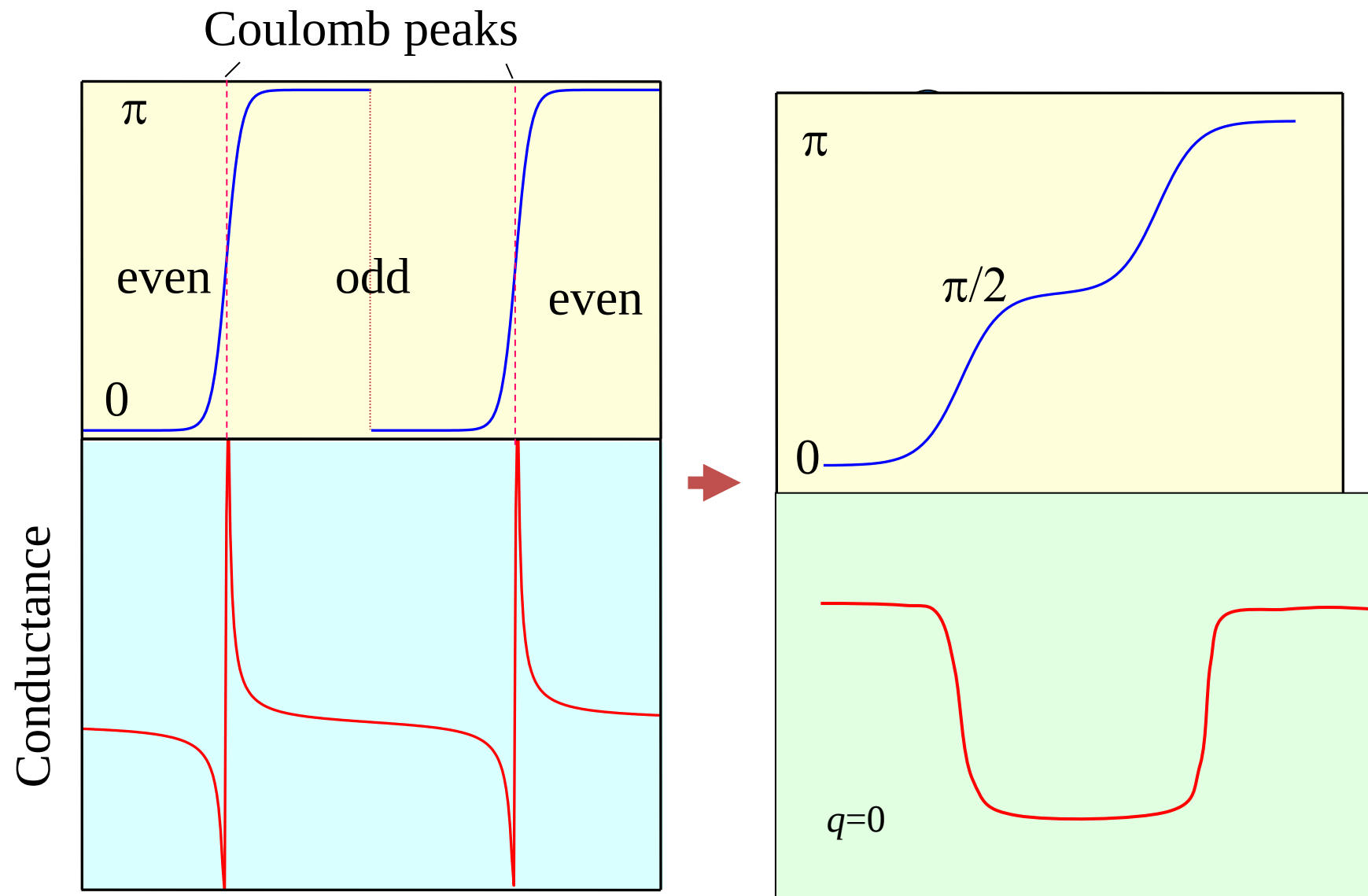


- $U = 0.3 - 0.7\text{meV}$
- $\Delta = 0.3 - 0.5\text{meV}$
- Dot diameter $\sim 50\text{nm}$

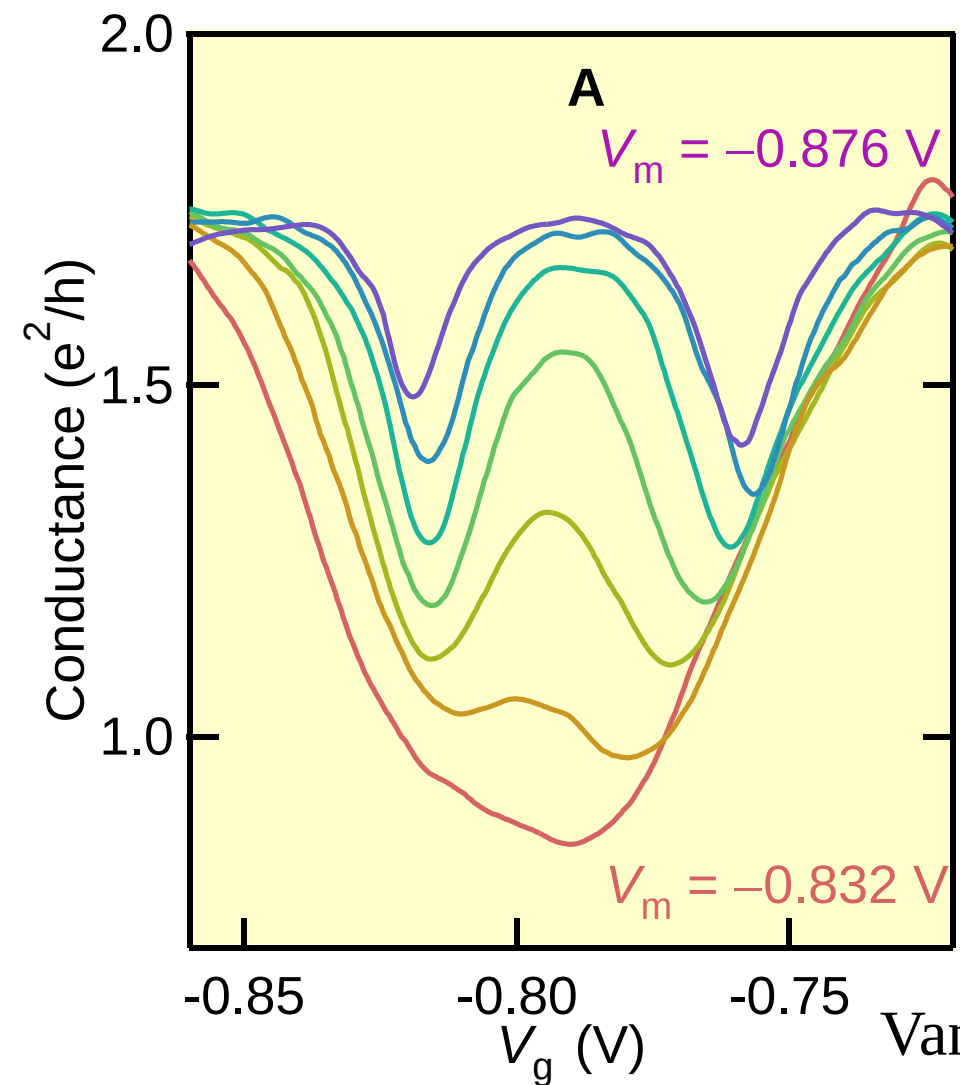
干渉計の空間的な大きさが小さく
デコヒーレンスがおこりにくい。

電子の出入り口が1箇所であるため、
横型でもドットサイズを小さくできる。

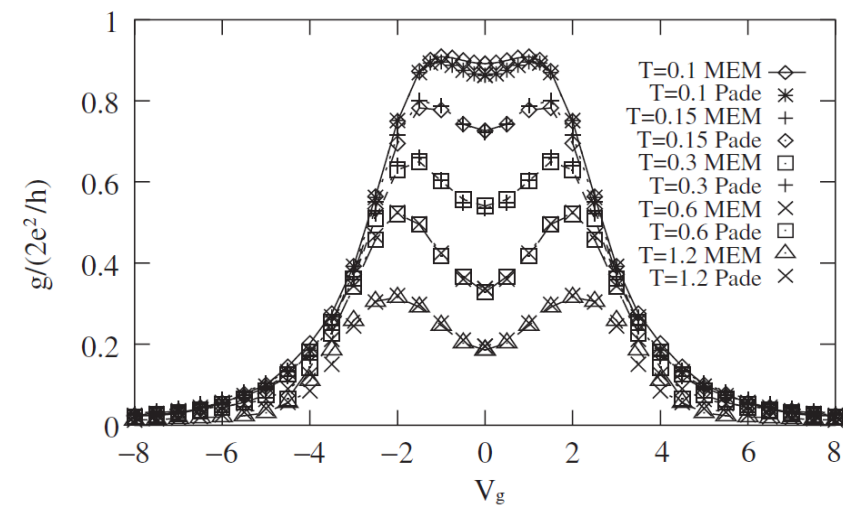
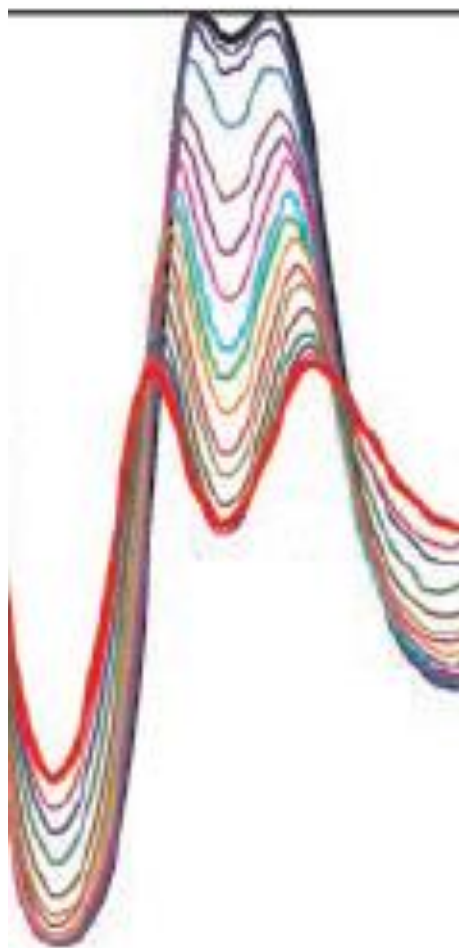




Coupling Strength Dependence of Anti-Resonance



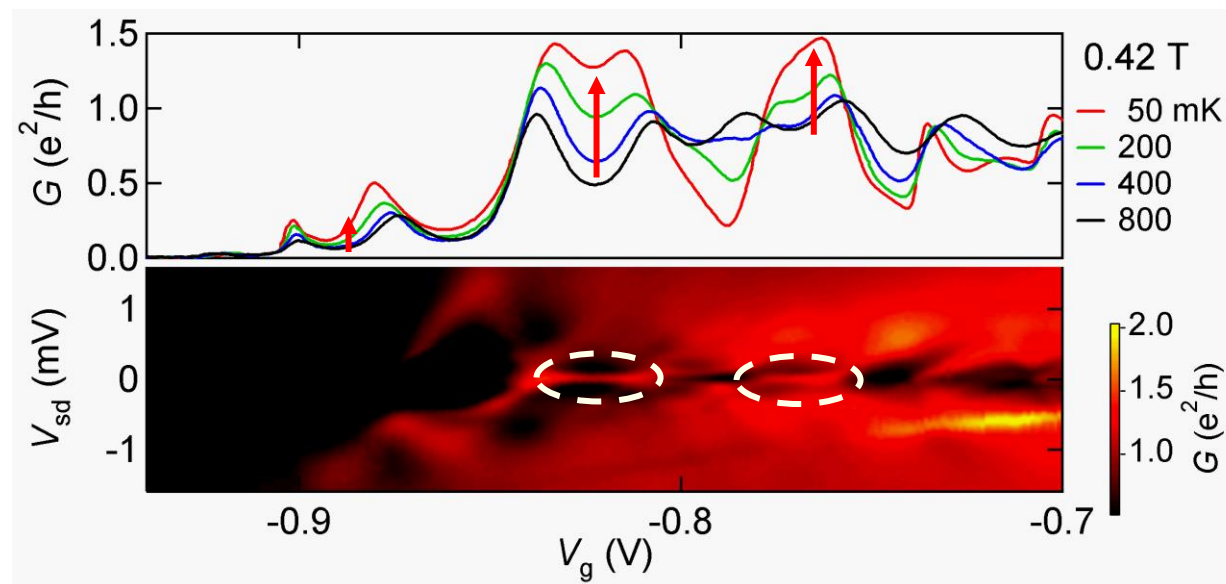
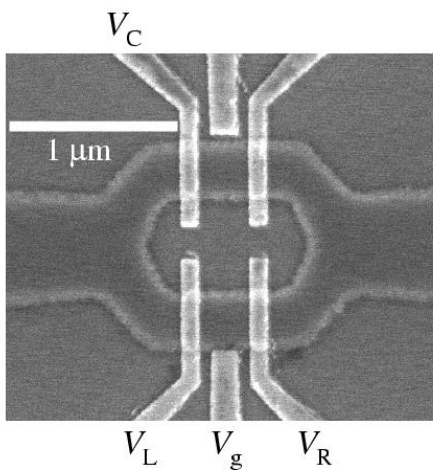
Van der Wiel et al. Science`00



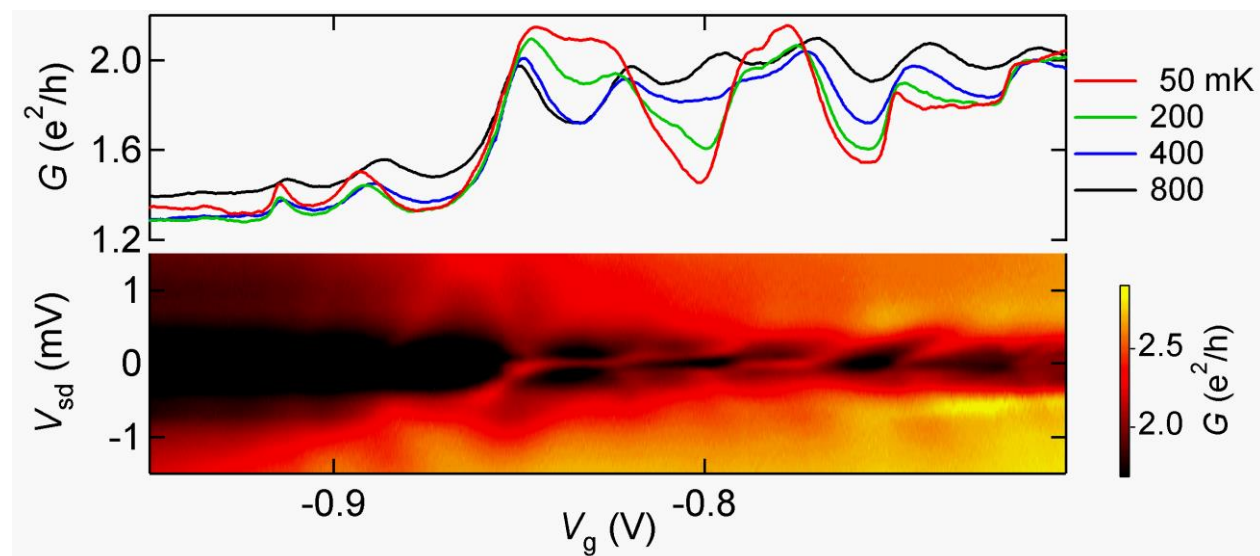
Maruyama et al., JPSJ 73, 434 (2004)

The Kondo Effect in an AB Ring + a Quantum Dot

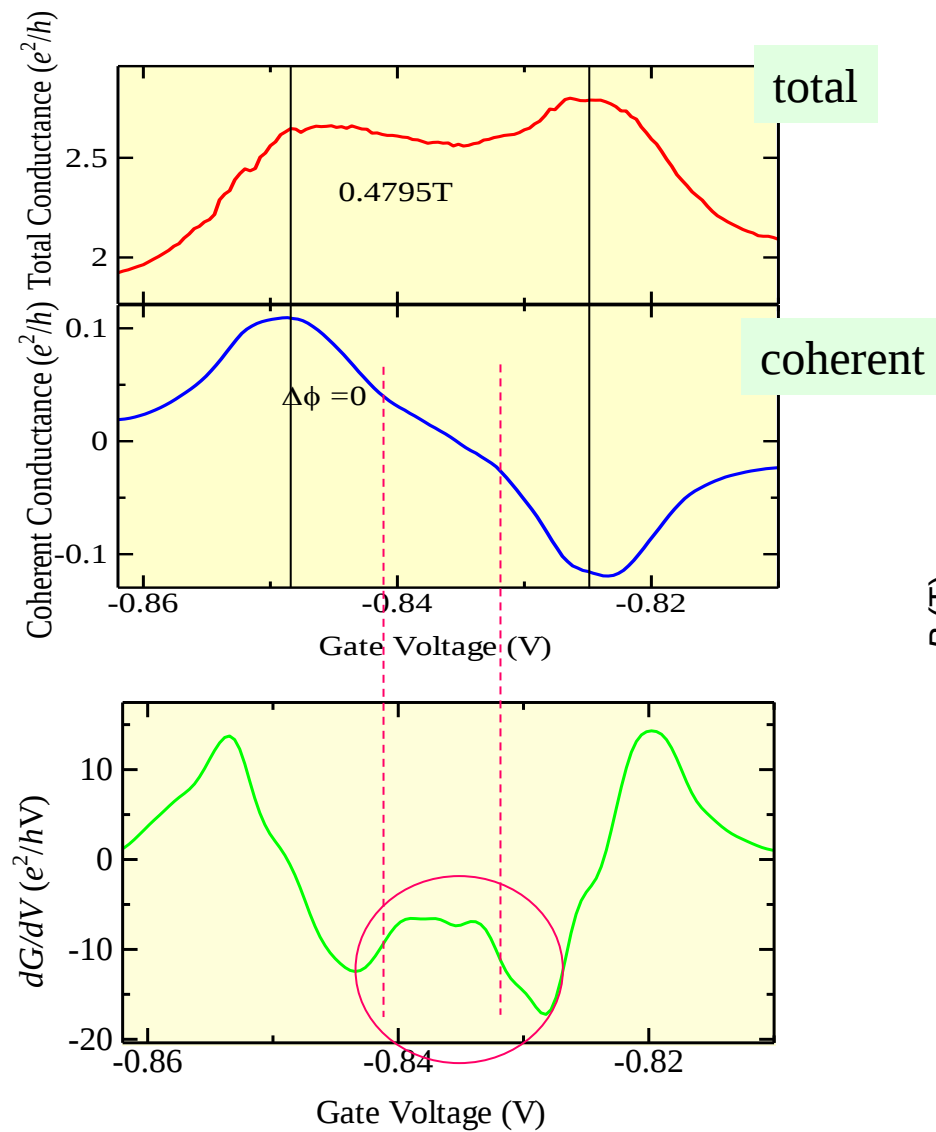
Without reference



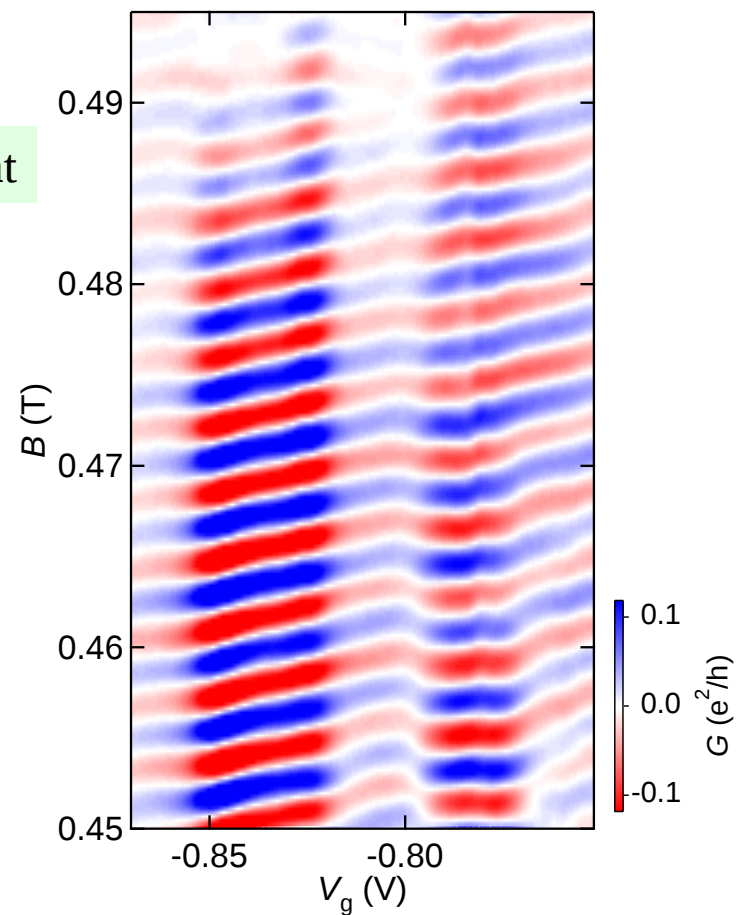
With reference



“Coherent” component and the Fano-Kondo Effect



Phase shift locking to $\pi/2$
Recovery (?) of coherence



Weak entanglement between localized spin and conduction spin?

Yosida's variational ground state

S. Oh & J. Kim, PRB73, 052407('06)

$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_{\downarrow}\rangle |\chi_{\uparrow}\rangle - |\phi_{\uparrow}\rangle |\chi_{\downarrow}\rangle)$$

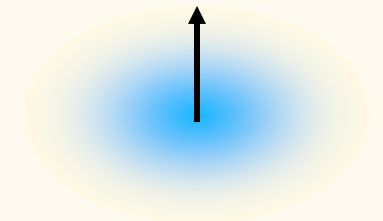
$$\left\{ \begin{array}{l} |\chi_{\uparrow\downarrow}\rangle : \text{dot state} \\ |\phi_{\downarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k>k_F} \Gamma_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} |F\rangle \\ |F\rangle = \prod_{k\leq k_F} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} |0\rangle \end{array} \right.$$

Entanglement entropy between electron spins in Kondo cloud and localized spin

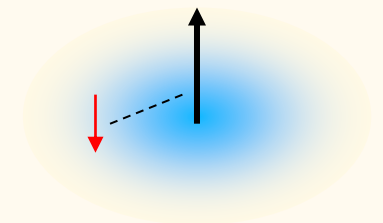
Entanglement entropy between an electron spin in Kondo cloud and localized spin

$$S(\rho_{\text{im}}) = 1$$

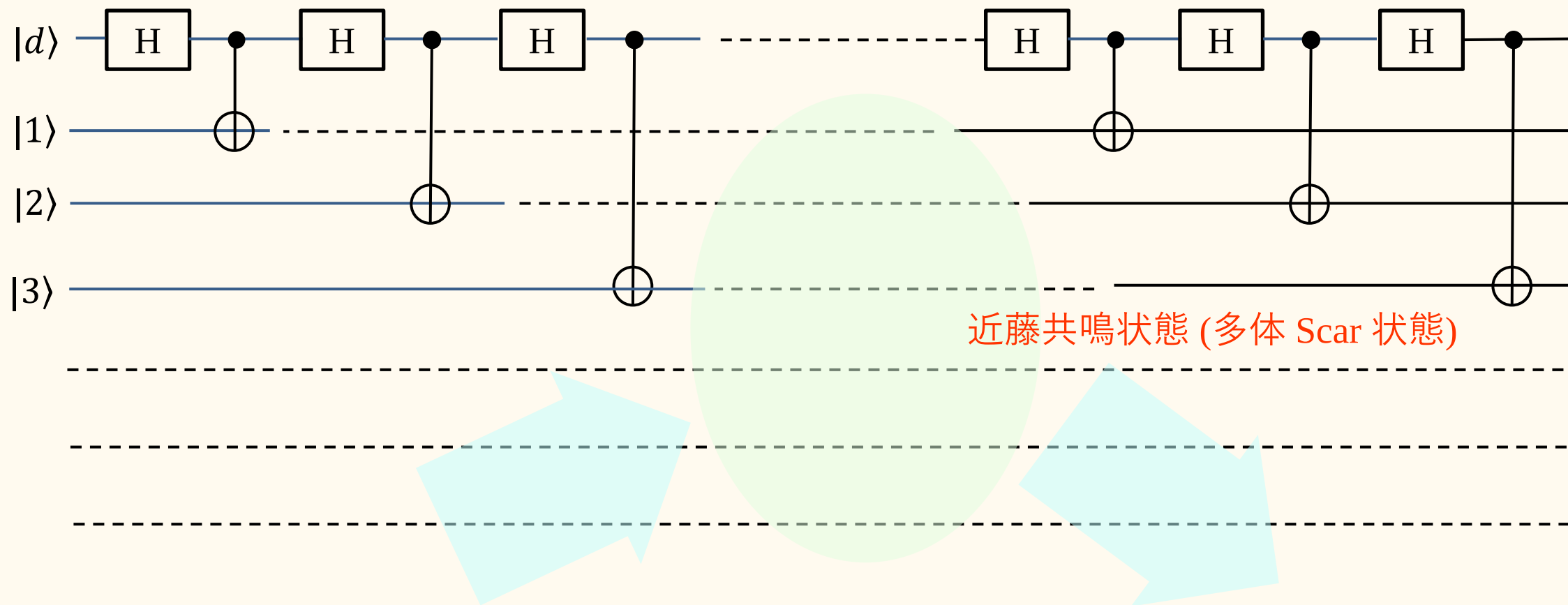
Maximally entangled



$$S(\rho) \approx O(1/N)$$

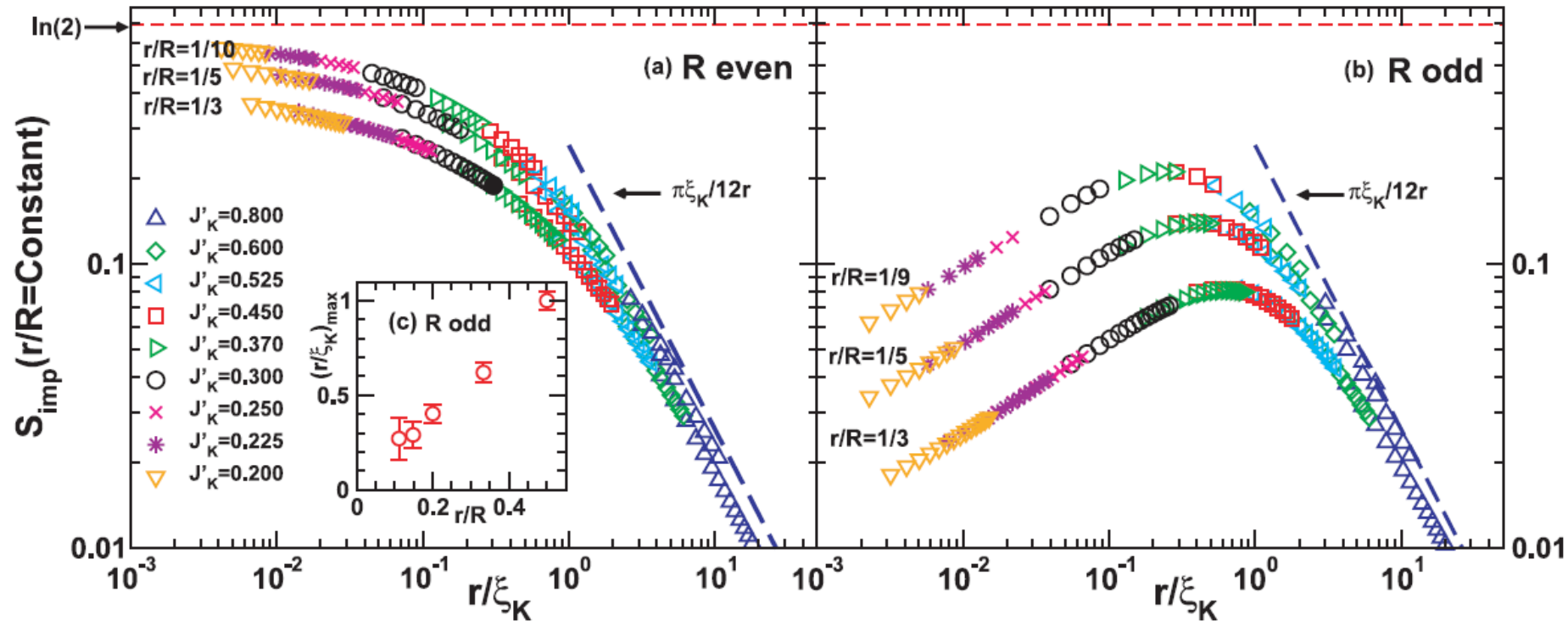


スピン散乱 → 近藤共鳴の量子情報のイメージ (全くのイメージ)



近藤共鳴状態全体から作った波束による伝導

近藤効果によるエントロピー低下



- 近藤効果により，不純物の近傍で，Entanglement entropyが低下！

Sørensen et al., J. Stat. Mech. L01001 (2007).

- カノニカル変換によって，局在スピンと伝導電子スピンを完全に分離することに成功

Ashida et al., Phys. Rev. Lett. **121**, 026805 (2018).

Summary

1. 量子デコヒーレンスの要因
2. スピン散乱による量子デコヒーレンス
3. (Lindblad 量子マスター方程式)
4. 近藤効果, 近藤共鳴
5. 量子ドットの近藤効果とコヒーレンス