



第9章 量子ホール効果

1次元よりも高い次元の系の伝導は、1次元伝導チャネルの高次元的な接続によって理解できる場合がある。一方、ランダウ量子化の場合は、磁場による連続的な2次元の座標自由度の混じりが重要であり、2次元以上の系であることを取り入れた扱いが必要である。

9.1 磁場中の2次元電子系

ハミルトニアンを次のように書く。

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{(\mathbf{p}_c + e\mathbf{A})^2}{2m} \equiv \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} = \frac{\pi_x^2 + \pi_y^2}{2m}. \quad (9.1)$$

$$\boldsymbol{\pi} \equiv \mathbf{p}_c + e\mathbf{A}. \quad (9.2)$$

$\boldsymbol{\pi}$ は動的運動量であり、実空間速度に $\mathbf{v} = \boldsymbol{\pi}/m^*$ と対応している。 $\boldsymbol{\pi}$ と座標及び成分間の交換関係は

$$[\pi_\alpha, \beta] = -i\hbar\delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = x, y), \quad [\pi_x, \pi_y] = -i\frac{\hbar^2}{l^2} \quad (9.3)$$

と x, y 成分が交換しない。これは古典的には磁場によって軌道が曲がり、 x, y 成分間に移り変わりが生じて独立にならないことに対応する。 l は磁気長 (magnetic length) と呼ばれ、

$$l \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\phi_0}{\pi B}} \quad (9.4)$$

と定義される。磁束量子が貫く円の半径の $1/\sqrt{2}$ で、最小ランダウ半径とも呼ばれる。係数 $1/\sqrt{2}$ は後出の式 (9.9) でゼロ点エネルギー項が $\hbar\omega_c/2$ であることに対応する。

ガイド中心 (X, Y) の演算子 $\hat{\mathbf{R}}$ を、実空間座標演算子を $\hat{\mathbf{r}}$ として次のように定義する。

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{R}} + \frac{l^2}{\hbar}(\pi_y, -\pi_x). \quad (9.5)$$

第2項は古典解 (このノートでは示していない) に習ったものである。 π_x, π_y の交換関係より、

$$[X, Y] = il^2 \quad (9.6)$$

である。ハミルトニアンは (X, Y) によらないので、 (X, Y) は時間変動しない「運動の恒量」である一方、交換関係 (9.6) より、 X, Y 間には不確定性が生じる。以上より、この系の正準共役な物理量の組として、 $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_c)$ 以外に、 $\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi}$ が取れる。

9.1.1 ランダウ量子化

ハミルトニアンが (9.1) のように π について 2 次式で調和振動子的である*1ことから、演算子

$$a = \frac{l}{\sqrt{2\hbar}}(\pi_x - i\pi_y), \quad a^\dagger = \frac{l}{\sqrt{2\hbar}}(\pi_x + i\pi_y) \quad (9.7)$$

を導入すると、

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad \mathcal{H} = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (9.8)$$

と調和振動子形に書くことができ、離散的エネルギー準位

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (9.9)$$

が得られる。これは、磁場による量子閉じ込めにより (角) 運動量が離散化し、エネルギー準位が離散化したものと考えられる。このような磁場による量子化をランダウ (Landau) 量子化と呼ぶ。

9.1.2 ガイド中心

\mathbf{R} はハミルトニアン (9.1) と交換するので (9.9) は \mathbf{R} にはよらず、 \mathbf{R} の自由度分縮退している。一様な磁場のみがかかった状態は空間の並進対称性が存在し、 \mathbf{R} の自由度によって固有関数による基底セットではこの並進対称性が担保されている。縮退がある場合、基底セットを様々に取れる。今の場合、 \mathbf{R} の成分が交換しないため、対角化の対象により基底の様相は大きく変わる。

ここでは、 X を対角化する波動関数を考えることにする。これにはランダウゲージ $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ を取るのが便利である。シュレディンガー方程式は (9.1) より、

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\psi &= \frac{(\mathbf{p}_c + e\mathbf{A})^2}{2m} \psi = \frac{-1}{2m} \left[\frac{\hbar^2 \partial^2}{\partial x^2} - \left(-i\frac{\hbar \partial}{\partial y} + eBx \right)^2 \right] \psi(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 - 2i\hbar e B x \frac{\partial}{\partial y} + e^2 B^2 x^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (9.10)$$

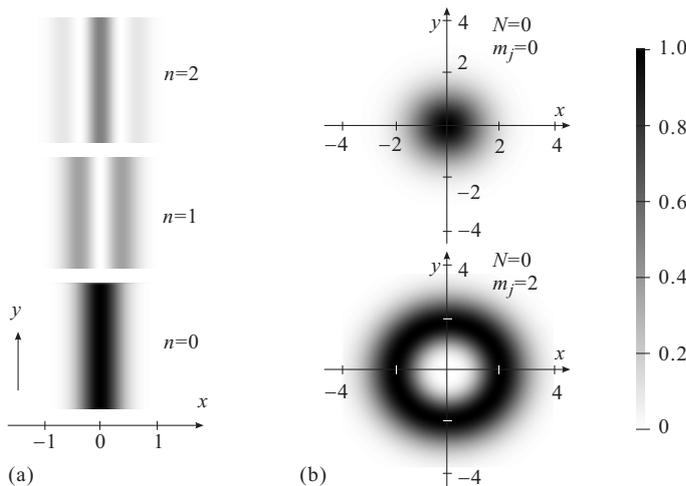


図 9.1 (a) X を対角化する固有状態 (9.12) の確率密度 $|\psi_{nk}(\mathbf{r})|^2$ を 3 つの n について濃淡プロットしたもの。長さの単位は l_B 。 x 方向の広がりは $\sqrt{2n+1}l_B$ 程度。(b) 本文にはないが $X^2 + Y^2$ を対角化する固有状態についての同様なプロット。 $N = 0$ の場合、原点を中心とする半径 $|\sqrt{2|m_j|}l_B$ の円の周りに分布する。

*1 正準共役な演算子である π_x, π_y それぞれの 2 次の和であり、 $p^2/2m + m\omega_c^2 x^2/2$ という調和振動子ハミルトニアンと同じと見ることができる。

と書き下ろされる. \mathbf{r} と正準共役な $\hbar\partial/i\partial\mathbf{r}$ は \mathbf{p}_c に対応する. ハミルトニアン中に演算子 y が含まれていないことから, y 部分は平面波となり, 変数分離形 $\psi(\mathbf{r}) = u(x)\exp(iky)$ を上式に代入すると,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(eB)^2}{2m} \left(x + \frac{\hbar}{eB}k \right)^2 \right] u(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega_c^2}{2} (x + l^2k)^2 \right] u(x) = Eu(x) \quad (9.11)$$

となる. これは, $x = -l^2k$ を中心とする 1 次元調和振動子の方程式であり, 固有値は (9.9), 固有関数は

$$\psi_{nk}(\mathbf{r}) \propto H_n \left(\frac{x - x_k}{l} \right) \exp \left(-\frac{(x - x_k)^2}{2l^2} \right) \exp(iky) \quad (x_k \equiv -l^2k) \quad (9.12)$$

と与えられる. H_n は n 次のエルミート多項式である. $X = x_k = -l^2k = -l^2p_y/\hbar$ で, X が定まり, y に関しては平面波で全空間に広がっている. すなわち, Y が不確定な状態である. 式 (9.12) について X の変化を無視した y 方向の群速度 $\partial E/\partial k = 0$ であるから, (9.12) は y 方向の進行波ではない. $\partial X/\partial k$ がゼロでないため, X にエネルギーが依存する状況が生じると, y 方向への運動が生じる.

図 9.1(a) に (9.12) による確率密度を濃淡プロットした. x 方向は, 1 次元調和振動子, y 方向は一様に伸びた形状になる. また, ここでは示さなかったが, $X^2 + Y^2$ を対角化するように固有状態を選ぶこともできる. この場合は, 図 9.1(b) のように, x, y 両方向に局在した形状となる. 同じ固有状態に属する固有関数であるにも関わらず, これほど異なる外観を示すのは, 無論多くの縮退があるためであり, この縮退が, 実空間座標の一種である \mathbf{R} の自由度によることもその要因である.

9.2 整数量子ホール効果

9.2.1 シュブニコフ・ド・ハース (SdH) 振動

2次元電子系に垂直磁場を印加していく過程を考える. ランダウ量子化 (9.9) によって, エネルギー準位は図 9.2 のように磁場に対して原点を中心とする放射状に広がる (扇ダイアグラム). 電気伝導測定の実験条件下で電子はこれらの準位をどう占有するだろうか? 外部の粒子溜め (電源) につながっていることを考えると, E_F が一定となるが, この視点から見ると, 一般に図 9.2 の原点の位置が磁場に対して変化する. 図 9.2 の原点は, xy 面内の運動エネルギーがゼロ, すなわち z 方向の量子化準位位置である. ??節で行った単純な近似の範囲内ではこの位置は N_{dep} のイオン化不純物を作るポテンシャルを遮蔽するように決まっているから, xy 方向自由度の状態密度が変化すると, 外部から与えた E_F までを占有している電子の面密度が N_{dep} となるように z 方向の波動関数が変化し, 図 9.2 の原点位置も変化する. 図 9.2 が止まって見えるような視点からは E_F が磁場変化するように見える. 以下, この視点 (電子の面密度 n_s が一定) で考えることにする.

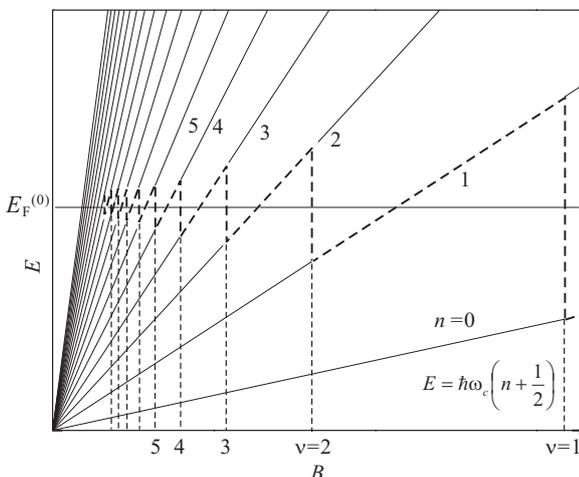


図 9.2 ランダウ準位 (9.9) の振舞いを示した. 2次元電子密度 n_s 一定の条件下でこのフレームから見た E_F の動きを破線 で示した. $E_F^{(0)}$ はゼロ磁場の値.

ランダウ準位あたりの状態面密度 n_L を求める. y 方向の幅 W_y , x 方向の幅 W_x の領域内で式 (9.12) の波動関数が取りうる状態数を数える. y 方向は平面波であるから, W_y が定める k 空間での k の「存在間隔」は $2\pi/W_y$ である. 一方, x 方向を $0 \leq X \leq W_x$ と区切ると, $-W_x/l_B^2 \leq k \leq 0$ であるから, 面積 $S = W_x W_y$ 内の状態数は,

$$\frac{W_x/l_B^2}{2\pi/W_y} = \frac{S}{2\pi l_B^2} \quad \therefore n_L = \frac{1}{2\pi l_B^2} = \frac{eB}{h} = \frac{B}{\phi_0}, \quad (9.13)$$

すなわち, 磁束密度を磁束量子で測った数になっている. 電子系が何個のランダウ準位を占めているかは,

$$\nu = \frac{\phi_0 n_s}{B} \quad (9.14)$$

で (端数も含めて) 測られ, これを**充填率**と呼ぶ.

絶対零度では電子は低いランダウ準位から占有して行き, 占有された中で最も高いランダウ準位に E_F がロックされる. 磁場を増加させていくと ν がちょうど整数になるところで最上位だった準位が空になり, E_F は下の準位 ($E = \hbar\omega_c(\nu - 1/2)$) に落ちる. 以上から, 図 9.2 で見ると E_F は破線のように振動する. この振動現象, およびこれによって発生する電気抵抗の振動現象を**シュブニコフド・ハース振動** (Shubnikov-de Haas, SdH 振動) と呼ぶ.

9.2.2 波動関数の局在

完全な証明はされていないが, ポテンシャル乱れがあり, 時間反転対称性を有してスピン軌道相互作用もない2次元電子系ではすべての状態が空間的に局在すると信じられている. 磁場が印可されると時間反転対称性が失われアンダーソン局在の意味での局在は解消されるが, 更に磁場が強くなりサイクロトロン半径がポテンシャル乱れの特徴的長さよりも短くなると別の意味での局在が発生する.

その様子を模式的に図 9.3(a) に描いた. サイクロトロン運動している電子に電場を印可すると電場と垂直方向に加速されて「蟹の横這い」運動を生じるが, ポテンシャルの凹凸についてこれを考えると図のように, ポテンシャルの等高線上に捕えられて周回運動をする状態となり, 全体としては局在状態となる. 空間閉じ込めは, フォック-ダウウィン状態で見たと同じようにランダウ準位をエネルギー空間で広げる効果があり, 図 9.3(b) のように, デルタ関数だった状態密度が広がりを持つことになる. 一方, 図 9.3(a) で見ると, ポテンシャルの谷と山の境のところで, 空間的に閉じないような非常に稀な等高線が存在する可能性があることがわかる. このような (古典的には) 等高線に沿って移動する状態は広がった状態ということになる. このような状態は, 実際ランダウ準位の中心に1つだけ存在することがわかっている. これも模式的に描くと, 図 9.3(b) のようになる.

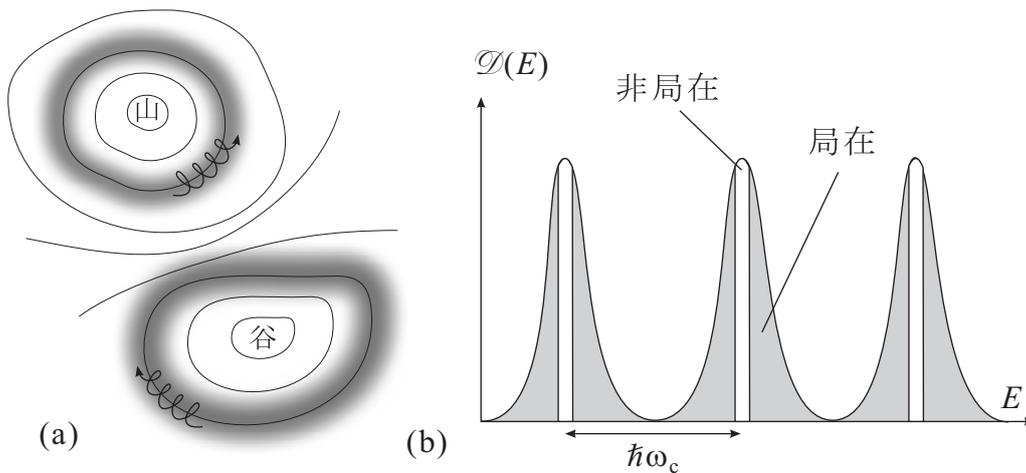


図 9.3 (a) 強磁場中で不純物ポテンシャルによりランダウ準位波動関数が局在する様子を模式的に描いた. 図 9.1(a) の形の波動関数が, 不純物ポテンシャルの等ポテンシャル線の上に束縛される. 回転しながらドリフトする様子を描いた線は, 古典的軌道を描いたもの. (b) ランダウ準位のエネルギー分布が (a) に不純物ポテンシャルにより広がり, 影で示したように局在する. 非局在状態は, ポテンシャルの山谷の間, ランダウ準位の中心付近に存在する.

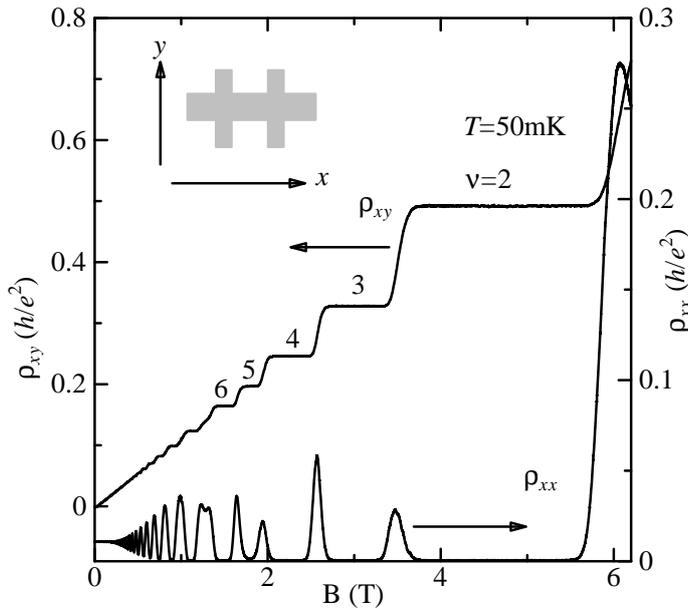


図 9.4 整数量子ホール効果の実験例. Al-GaAs/GaAs 2次元電子系を図中に示したホールバー形状とし、長手 (x) 方向に電流を流して、 x 方向の 2 つの端子に現われる電圧から ρ_{xx} 、 y 方向の対向電極に現われる電圧から ρ_{xy} を得る.

9.2.3 整数量子ホール効果の特徴

図 9.4 は整数量子ホール効果 (IQHE) の測定例で、このように、強磁場電気伝導において、磁場を変化させると弱磁場での古典的ホール効果から外れて明瞭な階段構造が現れる。この階段の高さが精確に

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (R_K) \approx \frac{2.5812 \times 10^4}{n} (\Omega), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9.15)$$

となる。図 9.4 からわかるように、この領域では $\rho_{xx} = 0$ となる。すなわち、超伝導状態と同じく、電圧なし (すなわちエネルギー散逸なし) に電流が流れている。

9.2.4 端状態による説明

強くランダウ量子化したエネルギー準位が図 9.3(b) のように局在していると考えると、図 9.4 の実験結果は、 $\rho_{xx} = 0$ の超電流は E_F がランダウ準位中心間のエネルギーギャップ領域、あるいは局在準位領域にある時に流れ、 E_F が非局在状態位置 (ランダウ準位中心) にある時は ρ_{xx} が有限となり ρ_{xy} には量子化値間の遷移が生じる。すなわち、量子化-超電流は 2次元電子の大部分 (バルク) が絶縁体状態で生じる。

これを端状態の伝導で説明するのが「端状態モデル」である。図 9.4 中に示したような有限幅の試料においては、端状態が生じる*2。これを反映したモデルとして、 x 方向は幅 W の井戸的なポテンシャル $V(x)$ で閉じ込められ、 y 方向に無限に伸びた 2次元電子系に z 方向に強い磁場を印加し、 y 方向に電流を流す状況を考える。

波動方程式は式 9.10 に $V(x)$ を加えたものになる。図 9.5 は、この「樋」型のポテンシャルに磁場による閉じ込めが加わった状況を描いた。試料の十分内部では $V(x) = 0$ で、ランダウ量子化が生じる一方、端の近傍では、 $V(x)$ の影響で、調和振動子ポテンシャルの幅が狭くなり、有効的な ω_c 、従ってエネルギー固有値は上昇する。ガイド中心 X が波動関数の幅 $\sqrt{2n+1}l_B/2$ 程度に近づいたところで n 番目のランダウ準位が上昇し始める。この上昇が生じている位置では、

$$\langle v_y \rangle = dE/\hbar dk = -(l_B^2/\hbar)dE/dX \quad (9.16)$$

*2 端と端をつないだ試料 (平面的につないだものはコルビノ型と呼ばれる) では、端が生じない。

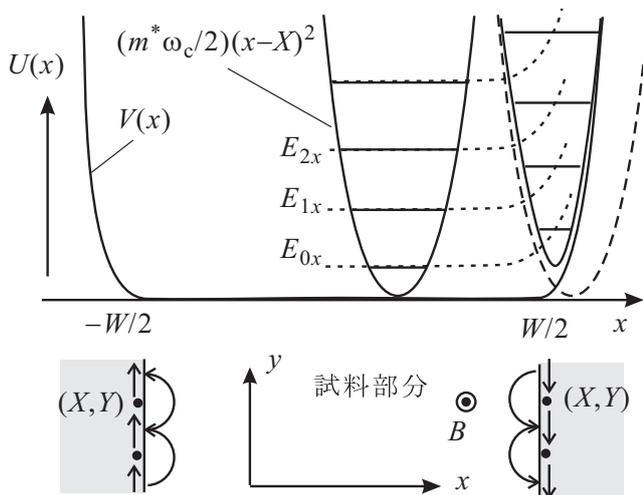


図 9.5 「種」ポテンシャル $V(x)$ がある場合の強磁場下 2 次元電子系の x 方向ポテンシャル $U(x)$. 端状態の形成を破線で示した. $U(x)$ は磁場による調和振動子ポテンシャルと $V(x)$ との和になる. 下は古典描像であるスキッピング軌道の模式図.

が有限になり, 端に沿った運動が可能になる. これは, 図 9.5 の下に模式的に示したように, 古典的には端にぶつかりながら走るスキッピング軌道に対応している. このような状態を端状態 (edge states) と呼ぶ. 端状態では電子の進む方向は磁場の向きによって決まっている.

端状態波動関数を y 方向の長さ L_y に対して規格化すれば, この状態の運ぶ電流は $j = (e/L_y)\langle v_y \rangle$ である. 1 つのランダウ準位に属する片方の端状態の集合に着目する. これらは, 端の電気化学ポテンシャル μ までの状態が電子で占有されているから, バルクでのランダウ準位位置より高い適当な基準値 E_0 よりエネルギーが高い端状態の運ぶ, ランダウ準位あたりの電流は, 式 (9.13) と (9.16) より, 次のようになる.

$$J = \int_{X_0}^{X_\mu} \frac{L_y dX}{2\pi l_B^2} \frac{e}{L_y} \langle v_y \rangle = \frac{e}{h} \int dX \frac{dE}{dX} = \frac{e}{h} (\mu - E_0). \quad (9.17)$$

フェルミ準位が非局在状態間の局在状態位置にある時, 平衡状態では試料の x 方向の両端で化学ポテンシャルは等しいから, 両端を大きさが同じで向きが反対の電流が流れ, バルク状態は局在しているので y 方向に流れる全電流はゼロとなる (遠方にある y の端を考えると, 試料を環状電流が流れていることになる). y 方向に電流 J_y を流す境界条件を与えると, 図 9.6 のようにこれは A 端, B 端の端状態を流れる電流 J_A, J_B の差であるから, (9.17) より, 各端の電気化学ポテンシャル μ_A, μ_B に差が発生する. これが, ホール電圧である. この時,

$$\sigma_{xy} = \frac{J_y}{V_x} = \frac{e(J_A - J_B)}{\mu_A - \mu_B} = \frac{e^2}{h} \quad (9.18)$$

これはランダウ準位が 1 つの時の伝導度であるから, ランダウ準位が ν 個あれば σ_{xy} はこの ν 倍になり, IQHE が説明された.

これは, x と y がクロスしている部分があるだけで, ランダウアー公式の導出とほとんど同じである. QPC の時はそれ程精確な量子化が得られなかったのに, IQHE では極めて精確になるのは端電流の方向性 (カイラリティ) と幾何学的効果である. QPC では反対向きのチャンネルが空間的に重なっているため, 電子の向きを反転させる散乱が容易に起こる. それに対し, IQHE の場合, 端状態間にはマクロな空間的隔たりがあって反転散乱確率は天文学的に

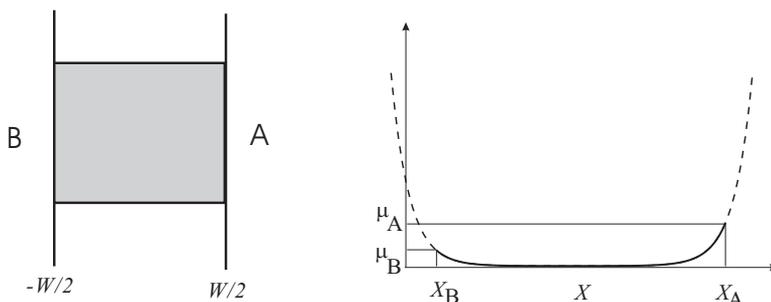


図 9.6 端電流モデルで整数量子ホール効果を考える時のランダウ準位とその占有状態の模式図.

低く、透過率は1である。従って、試料幅を狭めて端状態間の散乱を起こりやすくすると IQHE の量子化も精確でなくなると考えられ、実験でも確かめられている。

上の簡単なモデルでは試料内部にホール電場がかかる可能性を無視していたが、ホール電場によりバルクに dE/dX が生じると電流が流れることになる。しかしこの場合でもこれらの電流は、上で言えば μ_B 以下で試料断面で積分すると相殺してゼロになるので J_y には寄与せず、上述の量子化議論は変わらず成立する。

9.3 トポロジカル不変量による説明

引き続き整数量子ホール効果の理論的な理解を考えるが、やや新しい概念を必要とする部分があるため、節を改める。以下、文献 [4] に沿って説明する。

9.3.1 磁場中のブロッホ電子

磁場中の2次元電子系についてブロッホ電子の概念を拡張して、扱うことを考える。9.1節の扱いが、完全な自由電子を考えていたのに対して強束縛模型を考えるのに近い。2次元直角格子を考え、格子ベクトル \mathbf{R} だけの並進操作をする演算子を $T_{\mathbf{R}}$ と書く。

$$T_{\mathbf{R}}f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \mathbf{R}).$$

$f(\mathbf{r})$ を平面波 $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ で展開し、 $T_{\mathbf{R}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}+\mathbf{R})} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ より、 $T_{\mathbf{R}}$ は

$$T_{\mathbf{R}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{R}\cdot\mathbf{p}\right) \quad (9.19)$$

のように書くことができる。 $T_{\mathbf{R}}$ は、磁場がない時の格子のハミルトニアン \mathcal{H}_0 とは交換し、これらの同時対角化状態がブロッホ状態である。

次に一様な磁場がかかった場合

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}) \quad (9.20)$$

を考える。 $V(\mathbf{r})$ は格子ポテンシャルで、 $T_{\mathbf{R}}$ で不変であるが、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は一般にそうは行かず、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) + \nabla g(\mathbf{r})$$

である。これは無論、サイクロトロン運動で運動量が保存しなくなるためである。そこで、「並進操作」を変更することを考えてみる。磁気並進演算子 (magnetic translation operator) として、(9.19) の \mathbf{p} を $\mathbf{p} + e\mathbf{A}$ で置き換えたもので定義する。ここで、対称ゲージ $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$ を取ると、磁気並進演算子 T_{BR} は

$$T_{BR} \equiv \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathbf{R}\cdot\left[\mathbf{p} + \frac{e}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{B})\right]\right\} = T_{\mathbf{R}} \exp\left[\frac{ie}{\hbar}(\mathbf{B} \times \mathbf{R})\cdot\frac{\mathbf{r}}{2}\right] \quad (9.21)$$

と書くことができる。この T_{BR} は \mathcal{H} と交換するので、これら2つの同時対角化固有状態を考えることができる。ただし、ランダウ量子化でガイド中心座標が相互に交換しなかったのと同様に、磁気並進演算子の各座標要素は一般には交換せず、

$$T_{BRa}T_{BRb} = \exp(2\pi i\phi)T_{BRb}T_{BRa}, \quad \phi = \frac{eB}{h}ab \quad (9.22)$$

と交換に際して位相因子が付く。ここで、 a, b はそれぞれ単位ベクトルの長さであり、したがって、 ϕ は単位胞を貫く磁束を磁束量子 h/e で測ったものである。 ϕ が有理数 p/q であれば、格子が並進ベクトルを連続集合か離散集合に限定したように、互いに交換する限定磁気並進演算子を考えることができる。考えやすくするため、拡大単位胞 (磁気単位胞, magnetic unit cell) を考え、元の単位ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対し、磁気単位ベクトル $q\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を考え、格子ベクトル \mathbf{R}' を

$$\mathbf{R}' = n(q\mathbf{a}) + m\mathbf{b} \quad (9.23)$$

のように表すことにする。すると、この磁気単位胞を p 本の磁束量子が貫いていることになり、磁気並進演算子 $T_{BR'}$ の各要素は交換する。

そこで、 ψ を \mathcal{H} と $T_{BR'}$ の両方を対角化する固有状態とする。 $T_{BR'}$ の各要素 T_{qa} と T_b (簡潔のため BR' を略記) の固有値は

$$T_{qa}\psi = e^{ik_1qa}\psi, \quad (9.24a)$$

$$T_b\psi = e^{ik_2b}\psi \quad (9.24b)$$

と書くことができる。 k_1, k_2 は、一般化結晶運動量であり、還元ゾーン記法では第1磁気ブリルアンゾーン (magnetic Brillouin zone) $0 \leq k_1 < 2\pi/qa, 0 \leq k_2 < 2\pi/b$ に制限することができる。固有状態はブロッホ関数形に

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (9.25)$$

と書くことができる。 n はバンド指数、 \mathbf{k} は一般化運動量である。ただし、 $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ の条件がゼロ磁場とは異なっている。

$$u_{n\mathbf{k}}(x+qa, y) = \exp\left(i\frac{\pi py}{b}\right) u_{n\mathbf{k}}(x, y), \quad (9.26a)$$

$$u_{n\mathbf{k}}(x, y+b) = \exp\left(-i\frac{\pi px}{qa}\right) u_{n\mathbf{k}}(x, y). \quad (9.26b)$$

$u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ を振幅と位相因子とに分けて $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = |u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})| \exp[i\theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})]$ と書くと、

$$p = -\frac{1}{2\pi} \oint dl \cdot \frac{\partial \theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})}{\partial l} \quad (9.27)$$

となる。積分は、磁気単位胞の縁に沿って反時計回りに行う。

9.3.2 線形応答によるホール伝導度

$\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ 摂動では、平面波部分を「ハミルトニアン」演算子に繰り込んで、格子周期関数 $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ に対する方程式を考えた。同じことを磁場中の強束縛模型についても考えることができる。磁気ブロッホ関数 (9.25) に (9.20) のハミルトニアンを作用させるが、正準運動量演算子に対して、 $\mathbf{p}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}(\hbar\mathbf{k} + \mathbf{p})$ であることに注意して計算すると、

$$(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\hbar\mathbf{k} + \mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$$

であるから、

$$\mathcal{H}_{\mathbf{k}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_{n\mathbf{k}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad \mathcal{H}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla + \hbar\mathbf{k} + e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}) \quad (9.28)$$

と書くことができる。

(9B.3) のホール伝導度に対する久保公式を考える。前節で見た磁気ブロッホ関数を固有状態として取り、 α, β などの量子数を表す指数をバンド指数と波数 (n, \mathbf{k}) で指定する。分子の積分をするために、速度演算子 \mathbf{v} は磁場のために $\mathbf{v} = (-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})/m$ となる点に注意して、 $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \rightarrow |n, \mathbf{k}\rangle$ のようにブラケット表示を使い、

$$\langle n, \mathbf{k} | \mathbf{v} | m, \mathbf{k}' \rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \int_0^{qa} dx \int_0^b dy u_{n\mathbf{k}}^* \mathbf{v} u_{m\mathbf{k}'} \equiv \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle n | m \rangle \quad (9.29)$$

とする。積分は \mathbf{k} 空間での周期性から磁気単位胞について行えば十分である。規格化は磁気単位胞について行い、

$$\int_0^{qa} dx \int_0^b dy |u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 = 1$$

とする。

(9.28) の \mathbf{k} 依存ハミルトニアンを使うと, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ として, 次のように書くことができる.

$$\langle n|v_x|m\rangle = \frac{1}{\hbar} \left\langle n \left| \frac{\partial \mathcal{H}_{\mathbf{k}}}{\partial k_x} \right| m \right\rangle, \quad (9.30a)$$

$$\langle n|v_y|m\rangle = \frac{1}{\hbar} \left\langle n \left| \frac{\partial \mathcal{H}_{\mathbf{k}}}{\partial k_y} \right| m \right\rangle. \quad (9.30b)$$

更に,

$$\left\langle n \left| \frac{\partial \mathcal{H}_{\mathbf{k}}}{\partial k_j} \right| m \right\rangle = (E_m - E_n) \left\langle n \left| \frac{\partial u_m}{\partial k_j} \right\rangle = -(E_m - E_n) \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial k_j} \right| m \right\rangle, \quad j = x, y \quad (9.31)$$

である.

久保公式 (9B.3) へ代入することで次の表式が得られる.

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -i \frac{e^2}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \sum_n f(E_{n\mathbf{k}}) \sum_{m(\neq n)} \left[\frac{\langle n\mathbf{k} | \partial \mathcal{H}_{\mathbf{k}} / \partial k_x | m\mathbf{k} \rangle \langle m\mathbf{k} | \partial \mathcal{H}_{\mathbf{k}} / \partial k_y | n\mathbf{k} \rangle}{(E_{n\mathbf{k}} - E_{m\mathbf{k}})^2} - \text{c.c.} \right] \\ &= -i \frac{e^2}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \sum_n f(E_{n\mathbf{k}}) \sum_{m(\neq n)} \left[\left\langle \frac{\partial u_n}{\partial k_x} \right| m \right\rangle \left\langle m \left| \frac{\partial u_n}{\partial k_y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial k_y} \right| m \right\rangle \left\langle m \left| \frac{\partial u_n}{\partial k_x} \right\rangle \right] \\ &= \frac{e^2}{\hbar} \frac{2\pi}{i} \sum_{\mathbf{k}} \sum_n f(E_{n\mathbf{k}}) \left[\left\langle \frac{\partial u_n}{\partial k_x} \right| \frac{\partial u_n}{\partial k_y} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial k_y} \right| \frac{\partial u_n}{\partial k_x} \right]. \end{aligned} \quad (9.32)$$

ここで, ベクトル場 $\mathbf{A}_{n\mathbf{k}}$ を

$$\mathbf{A}_{n\mathbf{k}} = \int d^2r u_{n\mathbf{k}}^* \nabla_{\mathbf{k}} u_{n\mathbf{k}} = \langle u_{n\mathbf{k}} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{n\mathbf{k}} \rangle \quad (9.33)$$

で定義する (実空間積分). ここで, $T = 0$, E_F はランダウバンドの間にあるとし, \mathbf{k} の和を積分で書くと,

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{2\pi i} \sum_{E_n < E_F} \int_{\text{MBZ}} d^2k [\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_{n\mathbf{k}}]_{k_z} = \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{2\pi i} \sum_{E_n < E_F} \int_{\text{MBZ}} d^2k [\text{rot}_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{n\mathbf{k}}]_{k_z} \quad (9.34)$$

となる. 積分は, 磁気ブリルアンゾーン上で行う.

ここで, 磁気ブリルアンゾーンは, トポロジカルには長方形ではなく 2次元トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ と考えることができる. というのは, ブリルアンゾーンの端, $k_x = 0$ と $k_x = 2\pi/qa$, また $k_y = 0$ と $k_y = 2\pi/b$ は同じ点となるからである. もし, $\mathbf{A}_{n\mathbf{k}}$ がこのトーラス上のすべての点で 1 値の値を有していたとすると, (9.34) から計算される σ_{xy} はストークスの定理から 0 となる. $\sigma_{xy} \neq 0$ となるためには, $\mathbf{A}_{n\mathbf{k}}$ がトリビアルでないトポロジを有していなければならない. ここで, 磁気ブリルアンゾーンがトーラスであることも重要である. 積分をする母体のトポロジが連続的に 1 点に収縮可能であるとすると, その上で定義された $\mathbf{A}_{n\mathbf{k}}$ がトリビアルでないトポロジを持つことができないからである.

$\mathbf{A}_{n\mathbf{k}}$ のトポロジを見るために, 局所ゲージ変換を考える. $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ が Schrödinger 方程式 (9.28) の解であったとすると, 任意の連続関数 $f(\mathbf{k})$ を使って

$$u'_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \exp[i f(\mathbf{k})] u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (9.35)$$

とした u' もまた解であり, これらは物理的に全く同等である. 式 (9.33) の定義から, この変換は

$$\mathbf{A}'_{n\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{n\mathbf{k}} + i \nabla_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) \quad (9.36)$$

に相当する.

以上のゲージ変換に起因する不定性を除くため, $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ の位相を 1 つに固定したとする. しかしそれでも, 磁気ブリルアンゾーン全体で位相を固定することはできない. $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ が 1 点 \mathbf{k}_0 でゼロになるとする. 図 9.7 のように, 磁気ブリルアンゾーンを \mathbf{k}_0 を含む領域 H_I とそれ以外の領域 H_{II} に分割する. H_I 内でゼロ点が存在する場合には図のようにゼロ点の周りに回転するような位相を考える必要がある. 一方, H_{II} は境界でトーラス接続されることからこれとは異なる位相を考える必要があり, 結局 2 つの領域で異なるゲージを取ることになる.

バンド n の寄与のみを考えることとし, n も省略すると, (9.34) の積分の部分は, ストークスの定理を 2つの領域に用いて,

$$I = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_I d^2k [\text{rot} \mathbf{A}]_{k_z} + \int_{II} d^2k [\text{rot} \mathbf{A}]_{k_z} \right] = \oint_{\partial H} (\mathbf{A}^{II} - \mathbf{A}^I) \cdot \frac{d\mathbf{k}}{2\pi i} \quad (9.37)$$

となる. 領域 II の外周上の積分はトーラス境界条件のため消える (同じ線上を往復して積分していることになる). 境界 ∂H 上では, ゲージ変換により

$$u_{\mathbf{k}}^I = u_{\mathbf{k}}^{II} e^{i\theta(\mathbf{k})} \quad (9.38)$$

と表されるはずである. (9.33) の定義を思い出しながら計算すると,

$$I = \oint_{\partial H} [\langle u_{\mathbf{k}}^{II} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{\mathbf{k}}^{II} \rangle + (i \nabla_{\mathbf{k}} \theta) \langle u_{\mathbf{k}}^{II} | u_{\mathbf{k}}^{II} \rangle - \langle u_{\mathbf{k}}^{II} | \nabla_{\mathbf{k}} | u_{\mathbf{k}}^{II} \rangle] \cdot \frac{d\mathbf{k}}{2\pi i} = \frac{\Delta_{\partial H} \theta}{2\pi} \quad (9.39)$$

となり, 境界 1 周での位相変化 $\Delta_{\partial H} \theta$ は 2π の整数倍でなければならないから, I は整数に限られる. これを ν_C と書くと, E_F 以下のバンド数を n_B として,

$$\sigma_{xy} = n_B \nu_C \frac{e^2}{h} \quad (9.40)$$

となって, ホール伝導度が e^2/h の整数倍になることが示された. 式 (9.40) を **TKNN 公式** (Thouless-Kohmoto-Nightingale-Nijs) と呼ぶ. ν_C はチャーン数 (Chern number) と呼ばれ, ランダウバンドの場合, 1 となることがわかっており^{*3}, 以上から (9.18) と同じ結果が得られた.

チャーン数は, 波動関数位相の特異点, ゼロ点の数に相当し, トポロジカル不変量 (topological invariant) と呼ばれる量の一種である. エネルギーバンドのトポロジカルな性質に起因する量であり, トーラスを球面に变化させるためには穴をつぶす行為が必要であると同様, バンドギャップを一旦つぶさない限り他のトポロジーを持つバンドに移行することはできない. このため, TKNN 公式で表されるホール伝導度は大変安定で細かな試料の性質によらず精確な値を示す. また, ここで出てきた $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ は付録 H で示したベリー接続, $\text{rot} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ はベリー曲率に相当するものである. この点は, トポロジカル絶縁体の項で再度述べる.

9.3.3 ラフリンの思考実験

ラフリン (Robert Laughlin) が考えたのは, 図 9.8(a) のように 2DEG をくると半径 R の円筒状に丸め, 円筒の端に円状の電極をつける, という試料である. 磁場は円筒の芯から外部に向かって出ており, 2DEG に垂直に印加されている. 図のように x, y 軸を取ると, 電流は x 方向に流れ, y 方向は閉じてしまっているため, 「端」が存在しない. 更に, 円筒の中心に細長いソレノイドを通し, 電流を流すことでこの中に磁束 Φ を通す. この磁束は直接

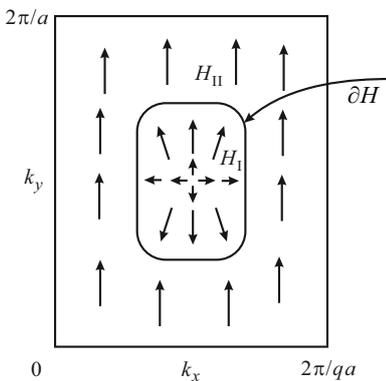


図 9.7 磁気ブリルアンゾーン中にゼロ点がある場合, 本文中のように波動関数位相を決めた場合の位相の様子を模式的に描いたもの.

^{*3} 計算は一般のトポロジカル絶縁体などに比べれば簡明だが, ファイバー束の理論などを要し, この議論ほど簡単でないで略す. 物理的なモデルを用いての議論については次節を参照.

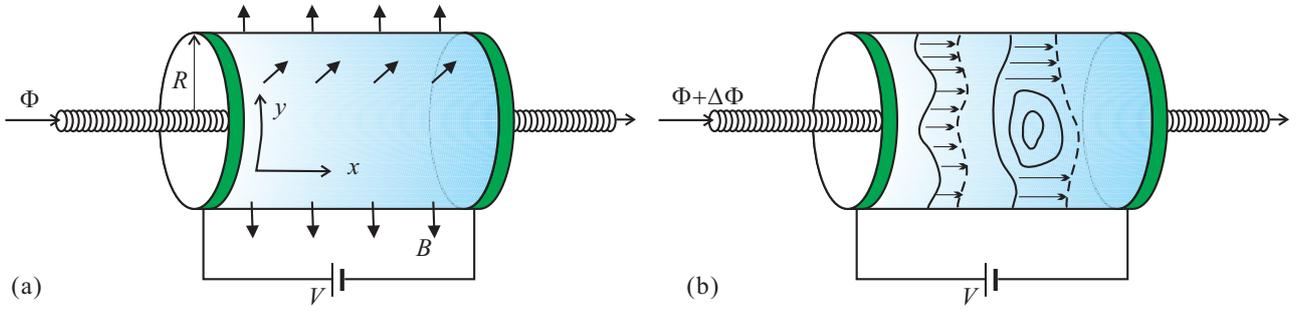


図 9.8 (a) Laughlin の思考実験で使用された「丸められた」2次元系. 2DEG は半径 R の円筒状に丸められ, 2DEG への磁場 B は放射状になって垂直に印加されている. これに, AB 位相を与えるための無限に細長いソレノイドが円筒中心を通っている. 電場は円筒長手方向 (x 方向) にかける. (b) ソレノイド中の磁束を Φ から $\Delta\Phi$ だけ増加させたときの波動関数の変化を模式的に描いたもの.

2DEG に触れることはないが, 2DEG 上, 円筒を一周する軌道に対しては AB 位相を与える. 垂直磁場, およびソレノイド磁場を与えるベクトルポテンシャルは, ランダウ・ゲージを用いて,

$$\mathbf{A} = (0, Bx), \quad \mathbf{A}_\Phi = \left(0, -\frac{\Phi}{2\pi R}\right) \quad (9.41)$$

と書く. 波動関数として, (9.12) の形を取ると, y 方向に系を丸めたため, 波動関数はこれを一周する形になる.

y 方向の電流は

$$j_y = \frac{1}{L_x} \frac{\partial \mathcal{E}_t}{\partial \Phi} \quad (9.42)$$

と表される. \mathcal{E}_t は, x 方向の規格化距離 L_x 分の円筒上の電子系の全エネルギーである^{*4}. ベクトルポテンシャルはランダウゲージで $\mathbf{a} = (0, Bx - \Phi/L_y, 0)$ と表すことができる. 磁場下 2次元電子系のハミルトニアンを基準 \mathcal{H}_0 に取ると, この磁束が入った効果はこのハミルトニアンに対して

$$k_y \rightarrow k_y - \frac{2\pi}{L_y} \frac{\Phi}{\phi_0}, \quad \left(\phi_0 \equiv \frac{h}{e}\right) \quad (9.43)$$

と変換することで取り込まれるが, これは, ガイド中心の X 座標が

$$X \rightarrow X + \left(\frac{\Phi}{\phi_0}\right) \frac{L_x}{N_\phi} \quad (9.44)$$

のように変化することを意味している.

貫通磁束の変化 $\Phi \rightarrow \Phi + \Delta\Phi$ は X の変化 $\Delta X = (L_x/N_\phi)\Delta\Phi/\phi_0$ となる. すなわち, $\Delta\Phi$ が ϕ_0 の整数倍 (q とする) であれば, $\Delta X = qL_x/N_\phi = 2q\pi l_B^2/L_y$ となり, x 方向の固有状態の間隔のちょうど q 倍で q だけ隣の固有状態に移っていくことになり, 磁束増加分は波動関数の位相に吸収される. N 個の Landau 準位が完全に占有されている場合, $\nu = N$ の時, $\Delta\Phi = \phi_0$ の変化を考えると, x 方向の電場 E がある時のエネルギー変化は $\Delta\mathcal{E} = -eE\Delta X N_e$ ($N_e = \nu N_\phi = NN_\phi$) である.

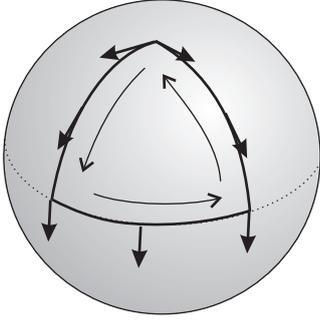
ここで次のように仮定しよう. すなわち, 量子 Hall 状態 (Fermi 準位が Landau 準位の間であって, Landau 準位がちょうどすべて埋まっている) では, 電流値は y 方向の境界条件にはよらない, すなわち Φ の絶対値にはよらない, とする. そうであれば, (9.42) での微分を差分で変更して

$$j_y = \frac{1}{L_x} \frac{\partial \mathcal{E}_t}{\partial \Phi} = \frac{1}{L_x} \frac{\Delta \mathcal{E}_t}{\Delta \Phi} = \frac{1}{L_x} \left(-eE \frac{L_x}{N_\phi}\right) \frac{N_e}{\phi_0} = N \frac{e^2}{h} E \quad (9.45)$$

が示された. すなわち, Hall 伝導度 $\sigma_{xy} = j_y/E_x$ は e^2/h の整数倍に量子化されている. 1 個のバンドあたりの伝導度が e^2/h であることから, 間接的ながらランダウサブバンドのチャーン数が 1 であることを示したことになる.

^{*4} ここではこの表式は簡便に次のように考えておく. 円筒のインダクタンス \mathcal{L} , 電流 J に対して磁場エネルギー $\mathcal{E}_H = \mathcal{L}J^2/2 = \Phi^2/2\mathcal{L}$ で, $\partial \mathcal{E}_H / \partial \Phi = \Phi/\mathcal{L} = J$ 規格化の長さを L_x とすると, $J = L_x j_y$ より, 表式を得る.

付録 9A : ベリー一位相



ベリー一位相に対応する古典的な例として良く挙げられるのが左図のような球面上のベクトルの移動である。3次元空間でベクトルを平行移動させて適当な軌道を描き元の点に戻すとベクトルに変化は生じない。ところが、「平行移動」について、ベクトルが球面内になければいけない(ベクトルがその点での球の接平面内になければいけない)という条件を付け、3次元空間での平行という条件を捨てて球面上で交わらない円に接するという条件に変更すると、左図のように、元の点に戻った時ベクトルの向きは一般に変化している。この変化角がベリー一位相に相当する。

この時、ベクトルの向きの変化角を α 、周回曲線を C とすると、 α は、「あるベクトル量」 \mathbf{A} の C 上の線積分で表すことができる。この \mathbf{A} をベリー接続(ベリー接続は、点が移動した時のベクトルの変化の条件、今の場合は球面上に射影するなど、により異なる)と呼び、また、これは、ストークスの定理により、

$$\alpha = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

と C で囲まれた面 S 上の積分で書くことができる。この $\text{rot} \mathbf{A}$ を、ベリー曲率と呼ぶ。

時間に依存するハミルトニアン $H(t)$ の固有値、固有関数を

$$H(t)|n(t)\rangle = E_n(t)|n(t)\rangle \quad (9A.1)$$

のように書く。両辺の時間微分を取り、固有関数 $\langle k|$ を作用させると、

$$\langle k(t)|\partial|n(t)\rangle/\partial t \equiv \langle k(t)|\dot{n}(t)\rangle = \frac{1}{E_n(t) - E_k(t)} \left\langle k(t) \left| \frac{\partial H}{\partial t} \right| n(t) \right\rangle. \quad (9A.2)$$

$$\therefore \langle \dot{n}|n\rangle + \langle n|\dot{n}\rangle = 0 \quad \therefore \text{Re}(\langle n|\dot{n}\rangle) = 0. \quad (9A.3)$$

$H(t)$ に対する Schrödinger 方程式の解 $\psi(t)$ を $|n(t)\rangle$ で展開する。

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|n(t)\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E'_n(t') dt'\right), \quad (E'_n(t) \equiv E_n(t) - \hbar\eta_n(t), \quad \eta_n(t) = i\langle n|\dot{n}\rangle). \quad (9A.4)$$

Schrödinger 方程式に代入すると、

$$\sum_n i\hbar \left(\dot{c}_n|n\rangle + c_n|\dot{n}\rangle - \frac{i}{\hbar} E'_n c_n|n\rangle \right) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E'_n(t') dt'\right] = \sum_n c_n H|n\rangle \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E'_n(t') dt'\right]. \quad (9A.5)$$

$\langle k|$ を作用させると、式 (9A.2) より、

$$\frac{dc_k}{dt} = \sum_{n \neq k} \frac{\langle k|\partial H/\partial t|n\rangle}{E_k - E_n} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t (E'_k(t') - E'_n(t')) dt'\right] c_n. \quad (9A.6)$$

$\psi(0) = |m(0)\rangle$ から出発し、 $H(t)$ が時間 T の間十分ゆっくりと断熱的に変化したとすると $|\psi(t)\rangle = |m(t)\rangle$ であり、他の固有状態は系に混じり込まない。 H の時間変化をパラメーター集合 $\{\mathbf{R}_i\}$ (ベクトル \mathbf{R} で表す) の時間変化 $\{\mathbf{R}_i(t)\}$ とする。時間 T で $t=0$ で元のパラメーター $\mathbf{R}(0)$ に戻る変化(ループ軌跡)を考える。

$$|\psi(t)\rangle = |m(\mathbf{R}(t))\rangle \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E'_m(t') dt'\right] = |m(\mathbf{R}(t))\rangle \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E'_m(t') dt'\right] e^{i\gamma_m(t)}, \quad (9A.7)$$

$$\text{ただし } \gamma_m(t) = \int_0^t \eta_m(t') dt' = i \int_0^t \langle m(\mathbf{R}(t'))|\dot{m}(\mathbf{R}(t'))\rangle dt'. \quad (9A.8)$$

γ_m は (9A.3) からわかるように、実数である。ループ軌跡について見ると、 $t \rightarrow \mathbf{R}$ の変数変換を行い、

$$\gamma_m(T) = i \int_0^T \langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} m(\mathbf{R}(t)) \rangle \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) dt = i \oint_C \langle m(\mathbf{R}(t)) | \nabla_{\mathbf{R}} m(\mathbf{R}(t)) \rangle \cdot d\mathbf{R}(t) = \gamma_m(C). \quad (9A.9)$$

$\nabla_{\mathbf{R}}$ は \mathbf{R} 空間での勾配である。以下、添字の R は略す。上式は、断熱変化をした後元の点に戻ると、ベリー位相 $\gamma_m(C)$ が波動関数に加わることを意味する。更に、ストークスの定理を使うと、

$$\gamma_m(C) = -\text{Im} \oint_C \langle m(\mathbf{R}) | \nabla m(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R} = -\text{Im} \int_S [\nabla \times \langle m(\mathbf{R}) | \nabla m(\mathbf{R}) \rangle] \cdot d\mathbf{S} \quad (9A.10)$$

という形が得られる。

付録 9B : ホール伝導度の久保公式

20 世紀前半から中盤にかけて展開された線形応答理論の中でも究極の形と言えのが久保公式 (Kubo formula) である。久保公式には数学的に同等な表現が色々あるが、ここでは中野-久保と呼ばれるものを導入する。2 次元系を考え、 y 方向の電場 E によって摂動 eEy が加わったとする。摂動が入る前の固有状態を $|\alpha\rangle$ のように書き、1 次摂動展開状態 $|\alpha'\rangle$ を

$$|\alpha'\rangle = |\alpha\rangle + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\langle \beta | eEy | \alpha \rangle}{E_\alpha - E_\beta} |\beta\rangle \quad (9B.1)$$

と書く。Hall 伝導度を考えるため、各 $|\alpha'\rangle$ による x 方向の電流への寄与を足し上げることで、 x 方向の電流密度は摂動の 1 次で

$$j_x = \frac{1}{L^2} \sum_{\alpha} f(E_{\alpha'}) \langle \alpha' | \hat{j}_x | \alpha' \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_{\alpha} f(E_{\alpha}) \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\langle \alpha | (-ev_x) | \beta \rangle \langle \beta | eEy | \alpha \rangle}{E_{\alpha} - E_{\beta}} + \text{c.c.} \quad (9B.2)$$

と書かれる。 $f(E)$ はフェルミ分布関数、 L^2 は規格化の面積である。また、摂動項が奇関数なので 1 次のエネルギー摂動項はなく $E_{\alpha'} = E_{\alpha}$ である。

$$\langle \beta | v_y | \alpha \rangle = \langle \beta | \hat{y} | \alpha \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \beta | [y, \mathcal{H}] | \alpha \rangle = -\frac{i}{\hbar} (E_{\alpha} - E_{\beta}) \langle \beta | y | \alpha \rangle$$

により、この $\langle \beta | y | \alpha \rangle$ を上に代入して、

$$\sigma_{xy} = \frac{j_x}{E} = \frac{e^2 \hbar}{iL^2} \sum_{\alpha} f(E_{\alpha}) \sum_{\beta} \frac{\langle \alpha | v_x | \beta \rangle \langle \beta | v_y | \alpha \rangle}{(E_{\alpha} - E_{\beta})^2} + \text{c.c.} \quad (9B.3)$$

が得られる。

付録 9C : 分数量子ホール効果

量子ホール効果から様々な新しい現象・アイデアが生じたが、その代表格、分数量子ホール効果について簡単に述べておこう。

9C.1 分数量子ホール効果の実験

分数量子ホール効果 (Fractional Quantum Hall Effect, FQHE) は、移動度の高い 2DEG での実験で発見された。これは、整数量子ホール効果でプラトー構造が現れるホール伝導度 $\sigma_{xy} = nG_q$ (n は整数) に対して

$$\sigma_{xy} = fG_q, \quad f = \frac{m}{n} \quad (n : \text{odd integer}, m : \text{integer}) \quad (9C.1)$$

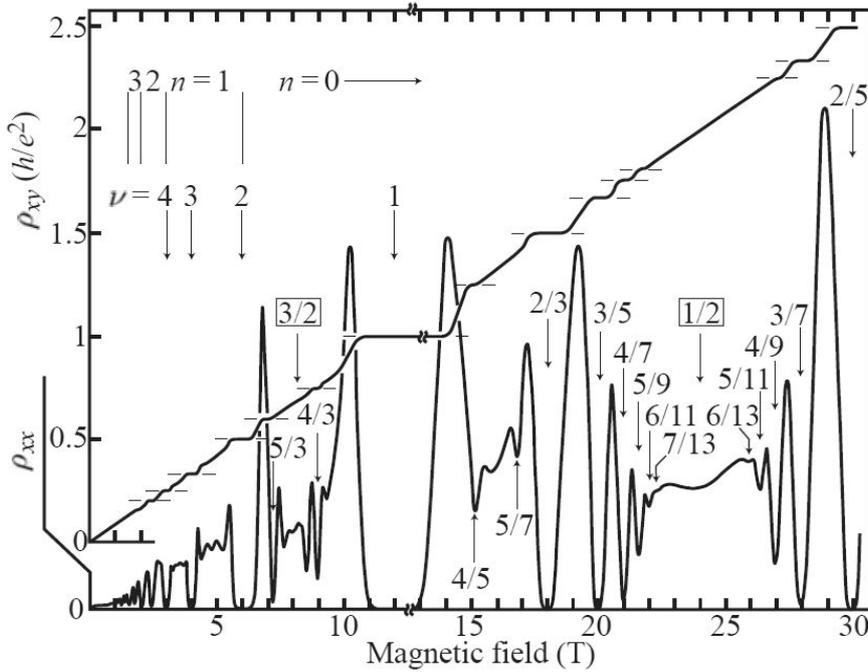


図 9C.1 分数量子ホール効果測定の代表例.

の位置に量子化プラトーが生じる，というものである。

測定の代表例とされるものが図 9C.1 である。IQHE も当然見えてはいるが， ρ_{xy} においては，プラトーの広さはそれほど顕著ではなく，むしろ古典論的な磁場に比例するラインに乗っていて，(9C.1) に相当する位置に短いプラトーが現れている。これに対して， ρ_{xx} の磁場変化は大変劇的であり，(9C.1) 位置の短いプラトーの所でも $\rho_{xx} = 0$ に落ちるため，非常に激しい振動が現れている。IQHE が終了した充填率 $\nu < 1$ の領域でも FQHE の為に変細かい振動が現れており，特に $\nu = 1/2$ を中心に対称的な形状になっていることがわかる。

FQHE は移動度に変敏感であり，移動度の低い試料では観測することができない。また，IQHE に比べても更に低温でのみ観測され，活性化エネルギーは高々数 K のオーダーである。一般に磁場が強い方が観測が容易である。

その物理に進むために，まず，電子間相互作用と電子の局在について簡単に考えておく。強磁場下の 2 次元電子が不純物による乱雑なポテンシャル中にある場合，この電子は，端状態的になって不純物ポテンシャルの等高線に沿って運動する。局在状態は，閉じた等高線に沿って閉軌道を運動する状態であるが，電子間相互作用は不純物ポテンシャルに対してゆらぎを与えるため，軌道が閉じなくなって局在が解ける可能性がある。

9C.2 ラフリン (Laughlin) 状態

FQHE が生じている時の電子状態は，このような電子間相互作用が強く影響した一種の電子液体状態であることがその後の研究により明らかにされてきた。そのような多体状態に対して，BCS 以来とも言える，簡潔な形で非常に良い近似の多体の波動関数を書き下ろしたのがラフリン状態と呼ばれるものである。

IQHE の時と同様，磁場 B 中の xy 平面 2 次元電子系を考える，今度は都合により対称ゲージ $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2)$ を取る。 xy 面を複素平面で表す。また，距離を磁気長で測ることとし $z = (x - iy)/l$ とすると，電子間相互作用を加えたハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_j \left[\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2 + V(z) \right] + \sum_{j < k} \frac{e^2}{|z_j - z_k|} \quad (9C.2)$$

と表すことができる。

まずは，ポテンシャルと電子間相互作用がない場合の最低ランダウ準位の 1 電子波動関数を考えてこれに電子を詰めて多体の関数を作り，これが電子間相互作用の項を小さくするように取ることを考える。 $X^2 + Y^2$ を対角化，従っ

て、角運動量の固有状態となる波動関数は

$$\phi(z) = p(z) \exp\left(-\frac{|z|^2}{l^2}\right) \quad (9C.3)$$

と書くことができる。 $p(z)$ は z の多項式である。今、系の電子数を N_e として、これから多体の波動関数を作ると

$$\psi(z_1, \dots, z_{N_e}) = f(z_1, \dots, z_{N_e}) \exp\left(-\sum_i \frac{|z_i|^2}{4}\right) \quad (9C.4)$$

と書くことができる。パウリ原理によって、多項式 f は $(1, \dots, N_e)$ の交換に対して反対称でなければならない。

f の一般項は、(係数) $\times \prod_i z_i^{m_i}$ という形をしているが、これは、この項が i 番目の電子が $m_i \hbar$ という角運動量を持った状態を表していることを示している。すなわち、この項が表す状態は全角運動量 \hat{M} が $\sum_i m_i \hbar$ であり、これは \mathcal{H} と交換する保存量であるから、 ψ も \mathcal{H} と \hat{M} を同じ対角化する状態であることが望ましい。そのためには f は斉次多項式である必要がある。

更に、相互作用項を小さくするために2体の相関を考える。 i, j 2電子間の距離は $|z_i - z_j|$ であるから、 f を $z_i - z_j$ にのみ依存する関数 g の積と考える。すなわち、

$$f(z_i, \dots, z_{N_e}) = \prod_{i>j} g(z_i - z_j). \quad (9C.5)$$

ここで、 f の反対称性から、 $g(z) = z^q$ で q は奇数でなければならない。以上をまとめた

$$\psi_q(z_1, \dots, z_{N_e}) = \prod_{i>j} (z_i - z_j)^q \exp\left(-\sum_i \frac{|z_i|^2}{4}\right) \quad (9C.6)$$

をラフリン状態という。

強磁場下2次元電子系には強い電子間相関に伴い、様々な基底状態が存在することが明らかになっているが、このラフリン状態は、その嚆矢として、分数量子ホール効果をよく説明する状態として現れたものである。関数形からもわかるように、電子間相互作用を下げるようにできており、厳密対角化を使った有限系での厳密解にも近いことが知られている。

9C.3 ラフリン状態の占有率

式(9C.6)のラフリン状態において、指数の前についている多項式について考えるとひとつの指数 i で指定される電子座標 z_i の最大べきは $M = (N_e - 1)$ である。このべきの項が、電子 i の角運動量が最大値 $M\hbar$ を取る状態を表しており、半径 $\sqrt{2M}l$ の円の周りに l だけ広がった (z 平面では $l = 1$ とする) 軌道を取る。 N_e 個のランダウ準位に対応する面積は $2\pi l^2 N_e$ であるから、この項が表す状態の占有率は

$$\nu = \frac{2\pi l^2 N_e}{\pi \times 2Ml^2} = \frac{N_e}{M} = \frac{N_e}{(N_e - 1)q} \approx \frac{1}{q} \quad (9C.7)$$

であることがわかる。多数の項中で軌道半径が最も大きなものが、このように1つの電子に最大の角運動量を与えるタイプのものであるから、この項の占有率が ψ_q 自身の占有率になると考えられる。すなわち、逆に言うと、占有率によって対応するラフリン状態の q が決定されてしまう。

9C.4 励起状態

(9C.6) からの励起について考える．各電子の角運動量が 1 だけ増加する状態を考え， $\prod_i z_i \psi_q$ とする．

$$\prod_i z_i \psi_q = \prod_i z_i \sum A_{m_1, m_2, \dots} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_{N_e}^{m_{N_e}} \exp\left(-\sum_j \frac{|z_j|^2}{4}\right) \quad (9C.8)$$

$$= \sum A_{m_1, m_2, \dots} z_1^{m_1+1} z_2^{m_2+1} \dots z_{N_e}^{m_{N_e}+1} \exp\left(-\sum_j \frac{|z_j|^2}{4}\right) \quad (9C.9)$$

と各項について展開した形に書く．この $\prod_i z_i$ との積をとる操作は，各電子の角運動量を増加させると共に，原点*5に波動関数のゼロ点を導入している．ゼロ点周りでは，最小ランダウ半径 l 程度の大きさで電子波動関数振幅が小さくなるので，負電荷密度が減少し，背景正電荷によりゼロ点付近に正電荷があるように見え，これを準粒子とみなすことができる．

ここで更に $\prod_k (z_k - z_0)^q$ をかけて，点 z_0 に q 個の準粒子を導入する．ここへ，更に z_0 に 1 個の別の空間的広がりが l の電子を付け加える操作を行うと，

$$\prod_k (z_k - z_0)^q \prod_{i < j} (z_i - z_j)^q \exp\left(-\sum_l \frac{|z_l|^2}{4} - \frac{|z_0|^2}{4}\right) \quad (9C.10)$$

となり，結局これは 1 個だけ電子が多く，空間的に一様なラフリン状態に他ならない． q 個の正電荷を持つ準粒子（準正孔）と電荷 $-e$ の電子が対消滅してやや広がったラフリン状態が生じた形であるから，結局準粒子 1 個が持つ電荷を e/q と考えて良いことになる．

9C.5 複合フェルミオン描像

ラフリン状態 ($\nu = 1/q$) では，電子は互いに距離を置こうとするので，ある電子の近傍だけ見れば，一様な磁場中に 1 個の電子があるように見える． $\nu = 1$ のランダウ準位では，ちょうど 1 個の電子あたりに 1 量子磁束 Φ_0 分の磁場がかかっているので，このラフリン状態では 1 個の電子あたりの磁束量子の数は q である．そこで，このような電子を，偶数 ($2k$) 本の量子磁束を元々持っている「粒子」と考えてみる．このような粒子はラフリン波動関数に戻って考えればフェルミ統計に従うので，複合フェルミオン (composite fermion, CF) と呼ぶ．「複合フェルミオン」が感じる磁場は，磁束 $q - 2k$ 本分ということになる．

すなわち， $q - 2k = 1$ は CF の占有率を n として $n = 1$ の IQH 状態とみなせる．同様に， $1/(q - 2k) = n > 1$ の場合， n が整数のところでもやはり IQH 状態が生じる．これらは，CF が広がった状態であるから，すなわち，電子波動関数が広がった状態であると考えられる．この時，元の電子の占有率 ν は

$$\nu = \frac{1}{q} = \frac{1}{2k + 1/n} = \frac{n}{2kn + 1} \quad (9C.11)$$

である．これは， $k = 1$ に対して $2/5, 3/7, 4/9, \dots$ という比較的観測されやすい FQH 系列を与える．更に，これらを次の基底状態とすることで，観測された FQH 状態を説明できる．すなわち，電子の FQH を CF の IQH として解釈することができる． $\nu = 1/2$ まわりの ρ_{xx} が対称で電子のゼロ磁場状態に近く見えるのも，CF の SdH 振動として解釈することができる．

*5 もちろん，これは $\prod_i (z_i - z_0)$ とすれば，任意の点 z_0 にゼロ点を導入できる．

参考文献

- [1] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [2] Z. F. Ezawa, “Quantum Hall Effects: Recent Theoretical and Experimental Developements”, (World Scientific, 2013).
- [3] M. Büttiker, Phys. Rev. B **38**, 9375 (1988).
- [4] M. Kohmoto, Ann. Phys. **160**, 343 (1985).
- [5] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).
- [6] R. B. Laughlin, Phys. Rev. B **23**, 5632 (1981).
- [7] D. J. Thouless, “Topological Quantum Number in Nonrelativistic Physics” (World Scientific, 1998).