

ひずみ軟化材料に対する構成則のひずみ空間における定式化

学生氏名 市川 岳
指導教員 皆川 勝

概要 本研究の目的は、ひずみ軟化挙動を示す土木材料に対し、その材料特有の強い非線形挙動を表現するための構成則を検討することである。まず、一般に応力を状態量として定義されている降伏関数を、ひずみ空間で定義した塑性増分理論を用いてひずみを状態量とした降伏関数の誘導を行った。また応力空間、ひずみ空間それぞれの載荷基準を比較し、ひずみ空間で定式化を行うことの有効性を示した。次いで、それを用いたひずみ空間における増分形の応力 - ひずみ関係式を求め、単軸圧縮状態での数値計算を行った。

Key Words : strain softening , elastic- plastic , constitutive law

1. はじめに

我が国の構造物は地震や台風などの自然からの外力を受け、しばしば被害にあっている。特に兵庫県南部地震では、その時点までの設計基準を見直さなければならない程の多大な被害を受けた。これらの被害の原因として、設計段階における、構造物に使用している土木材料の塑性域に対する考慮の不足が考えられる。また、現在有限要素プログラムを用いた数値シミュレーションは構造解析の多くの分野で広く利用されるようになってきているが、強い材料非線形性を持つ構造物の解析に対して一般的に信頼できる結果を得られる段階には至っていないものと思われる。これらの点を改善し、数値シミュレーションによる構造解析へと応用するためには、強い非線形性を有する材料の弾塑性挙動の検討が重要不可欠であるといえる。材料の有する弾塑性特性を構造解析に応用するためにも、応力 - ひずみ関係の挙動を正確に表現し得る構成則が必要となる。

本研究ではひずみ軟化挙動に着目し、弾塑性挙動を精度よく推定することを目的とする。本稿では、Kiousis¹⁾や Mizuno&Hatanaka²⁾によって提案された手法により、降伏関数を応力空間（応力を状態量として降伏関数を定義）ではなくひずみ空間（ひずみを状態量として降伏関数を定義）において定義し、増分形の応力 - ひずみ関係式を導く過程を示す。降伏関数としては、von Mises の降伏関数、Drucker-Prager の降伏関数を用いた。まず、応力を状態量とした場合の降伏関数、ひずみを状態量とした場合の降伏関数を用いた際の、それぞれの載荷基準を比較し降伏関数をひずみ空間で定式化を行うことの有効性を明確にする。次に、ひずみ空間で定式化を行うことにより得られた、増分形の応力 - ひずみ関係式を単軸圧縮状態に適用させ、数

値シミュレーションを行うことにより、ひずみ軟化挙動を呈する応力 - ひずみ関係を表現できることを示す。またその際に用いた材料パラメータの軟化挙動に対する影響を考察した。最後に、拘束圧が一定または漸増する場合の圧縮載荷における多軸応力状態でのひずみ軟化挙動をシミュレーションした。

2. ひずみ軟化挙動

ひずみ軟化挙動とはFig.1に示すように、最大応力に達した後に見られる勾配が負となる応力-ひずみ挙動である。これは古典的な加工硬化すなわちひずみ硬化理論では数学的に統一的には扱い得ない性質のものである³⁾。このような挙動を示す要因の一つとして、実験装置にある程度原因があるとされるような結果や、供試体寸法に依存する結果が得られていることも事実である。また、ひずみ軟化挙動を示す材料はまた不均質な材料であるので、局所的に生ずる不安定性が全体としての強度を低下させる働きをすることもあり得る⁴⁾。通常、ひずみ硬化理論で用いられているDrucker の安定基準⁵⁾(stability criterion of Drucker)によれば、ピーク応力を越えた後のひずみ軟化域において材料は不安定となる。そのため、ひずみ軟化およびひずみ硬化を統一的に扱うことのできる安定基準として、Il'yushin の仮説⁶⁾(Il'yushin's postulate)が用いられ、Kiousis¹⁾、Mizuno&Hatanaka²⁾、Dafalias⁷⁾、Naghdi&Trap⁸⁾、Chen et. al.⁴⁾などによりこれを用いたひずみ軟化のための構成則の検討がなされている。ひずみ軟化の問題は大いに議論のあるところであるが、当面、材料の劣化に関する簡単な工学的な方法、すなわち最大値に達したあとの降伏曲面の形状変化を仮定することにより処理されている。こ

Table.1 応力を状態量とした場合、
ひずみを状態量とした場合の載荷基準

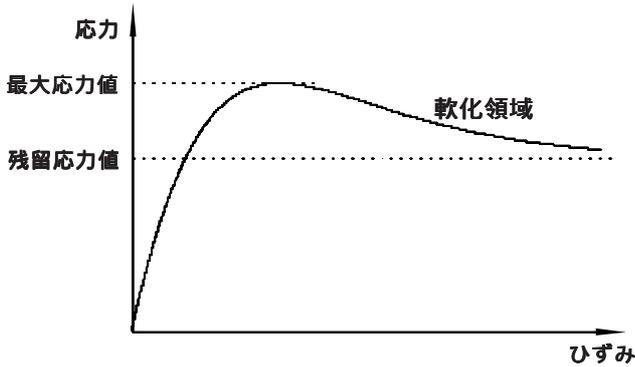


Fig.1 ひずみ軟化材料の応力-ひずみ関係

の場合、ひずみ軟化材料の挙動を表現するには、ひずみ硬化、ひずみ軟化挙動を決定するパラメータを材料モデルに取り入れることが必要であり、これが重要な課題となる。

3. 載荷基準の検討

軟化挙動を示す土木材料の弾塑性挙動を推定する場合、載荷・除荷・中立載荷の移り変わりを正確に判定する必要がある。載荷基準による塑性状態の判定という点に着目し、応力を状態量とした場合、ひずみを状態量とした場合に関し同じ応力状態における載荷基準の比較検討を行う。

Table.1 に応力を状態量とした場合の載荷基準、ひずみを状態量とした場合の載荷基準をそれぞれ示す。これらは降伏曲面上の外向き法線ベクトルと応力増分、ひずみ増分ベクトルとの内積によって定義される関係式である。

3.1 応力を状態量とした降伏関数の載荷基準

Fig.2は応力空間における載荷基準を示したものである。ここで、ひずみ軟化挙動が起こった場合、応力値は最大応力値から減少することになり、後続する降伏曲面 $f + \Delta f$ は現在の降伏曲面 f の内側に配置されることになる。また降伏曲面の法線ベクトル $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ と応力増分ベクトル $d\sigma_{ij}$ との内積を考えてみると、弾性除荷状態では応力増分ベクトルは降伏曲面の内側を向くため内積値は負(a)、中立状態では内積値はゼロ(b)、硬化状態では応力増分ベクトルが外向きに働くため内積値は正(c)となる。また軟化状態を硬化状態と比較して考えてみると、応力値は減少するため弾性除荷状態と同様に応力増分ベクトルは降伏曲面の内側を向くことになる。応力を状態量として降伏関数を定義した場合には、弾性除荷状態と軟化状態を載荷基準により区別する判定がTable.1中の式(a)~(d)ではできないことが分かる。

そこで、田辺ら⁹⁾は、弾性応力増分ベクトルをひずみ増分ベクトルと弾性応力ひずみマトリックスから算出して、これを用いて載荷判定する方法を提案した。この方法では、硬化・軟化にかかわらず除荷と判定することが可能である。しかし、応力増分ベクトルを用いた場合と、弾性応力増分

応力を状態量とした載荷基準		ひずみを状態量とした載荷基準	
弾性除荷状態	$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$ (a)	弾性除荷状態	$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} < 0$ (e)
中立状態	$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$ (b)	中立状態	$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = 0$ (f)
塑性載荷状態(硬化)	$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$ (c)	塑性載荷状態(硬化)	$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} > 0$ (g)
塑性載荷状態(軟化)	$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$ (d)	塑性載荷状態(軟化)	$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} > 0$ (h)

ベクトルを用いた場合とでは一般に判定結果は異なると思われる。ひずみ硬化領域における載荷判定に相違が生じる可能性がある。これについては、実験を含めた詳細な検討を必要とすると思われる。

3.2 ひずみを状態量とした降伏関数の載荷基準

Fig.3はひずみ空間における載荷基準を示したものである。Fig.2で示した応力空間における載荷基準とは異なり、硬化状態、軟化状態のいずれの場合も塑性ひずみの増加に伴い後続する降伏曲面 $F + \Delta F$ は現在の降伏曲面 F の外側に移動することになる。特にひずみ軟化挙動が起こった場合、応力値は減少することになるが、ひずみを状態量としているため降伏曲面は膨張することになる。また中立状態、弾性除荷状態では曲面上、および曲面の内側へ動く。また、降伏曲面の法線ベクトル $\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}$ とひずみ増分ベクトル $d\varepsilon_{ij}$ との内積を考えてみると、弾性除荷状態ではひずみ増分ベクトルが降伏曲面の内側を向くため内積値は負(e)、中立状態では内積値はゼロ(f)、硬化状態、軟化状態ではひずみ増分ベクトルが降伏曲面の外側を向くため内積値は正值をとる(g,h)。

3.3 ひずみ空間において定式化を行う利点

ひずみ軟化挙動を示す材料の単軸応力-ひずみ関係は、最初の線形弾性挙動に続いて非線形な弾塑性挙動を示す。とくに、非線形弾塑性挙動は、ひずみの増加に伴って応力が増加するひずみ硬化現象と、ピーク応力以後のひずみの進展に伴って応力が低下するひずみ軟化現象とに分類できる。

工学材料のひずみ硬化現象のモデル化には、材料の安定性に関するDruckerの安定仮説⁵⁾に基づいた塑性増分理論が広く応用されてきた。しかし、この理論では、ひずみ軟化域は安定となり、また完全塑性域については統一的に取り扱うことができない。ここでは、単軸応力状態に限定し

て、ひずみ空間で定式化を行うことの有効性を示す。

(1) 軟化状態と除荷状態の判定

Fig.4の様な応力ひずみ関係において、応力レベルでは軟化状態、除荷状態共に応力増分が減少していることになる。しかし、この両者をひずみレベルで考えてみると軟化状態ではひずみ増分は増加、除荷状態では減少していることになり、この両者を区別することができる。

(2) 完全塑性状態と中立載荷状態の判定

Fig.5は弾性完全塑性応力-ひずみ関係を表している。応力空間では両者を区別するには、塑性後の二次勾配を多少与えなければならず、完全塑性とひずみ硬化を統一的に扱うことができない(Fig.6)。しかし、ひずみ空間においてはFig.7に示すように完全塑性状態では塑性ひずみ増分が増加、中立載荷状態では塑性ひずみ増分に変化が見られないため、両者を区別することができ、完全塑性に対して特別の取り扱いは不要となる。

4. ひずみ空間における構成則の定式化

4.1 定式化

ひずみ軟化材料の応力-ひずみ関係を推定するために降伏関数をひずみを状態量として定義し、増分形の応力-ひずみ関係式を導く手順を以下に示す。

(1) ひずみ空間における降伏関数

応力を状態量として定義した降伏関数を次式のように表す。

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = 0 \quad (1)$$

ここで κ は硬化を表すパラメータである。応力 σ_{ij} とひずみの弾性成分 ε_{ij}^e との線形関係から次式が得られる。

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn}^e \quad (2)$$

ここで C_{ijmn} は弾性応力ひずみマトリックスである。またひずみは弾性成分と塑性成分に分解できることから次のように表せる。

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (3)$$

ここで ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^p はそれぞれ全ひずみ、ひずみの弾性成分、ひずみの塑性成分である。式(3)により、式(2)は次式のようになる。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (4)$$

Naghdi・Trapp⁸⁾が指摘したように、式(4)により応力により定義された降伏関数である式(1)を、ひずみを状態量とした降伏関数として次式のように表す。

$$f = f[C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p), \kappa] = F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) = 0 \quad (5)$$

(2) 弾塑性構成式¹⁾

いま、材料の応力状態がひずみ硬化またはひずみ軟化状態にあると仮定して、降伏関数の連続性の式(適合条件式)より、

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (6)$$

$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$: 降伏曲面の法線ベクトル

$d\sigma_{ij}$: 応力増分ベクトル

$f=0$: 現在の降伏曲面

$f+\Delta f=0$: 後続の降伏曲面

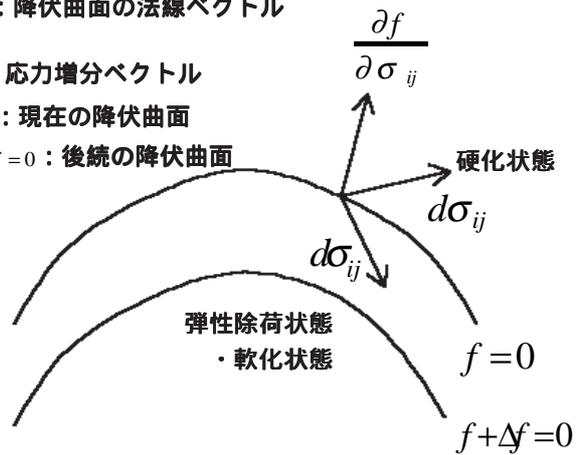


Fig.2 応力空間における荷重基準

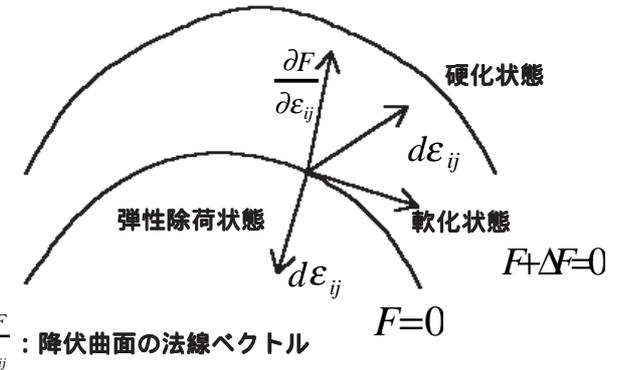


Fig.3 ひずみ空間における荷重基準¹⁰⁾

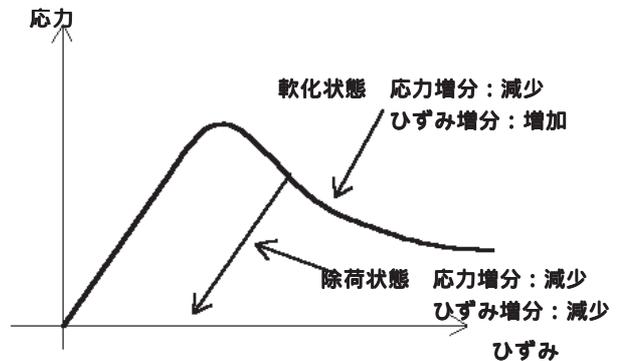


Fig.4 軟化状態、除荷状態の応力増分とひずみ増分の相違点

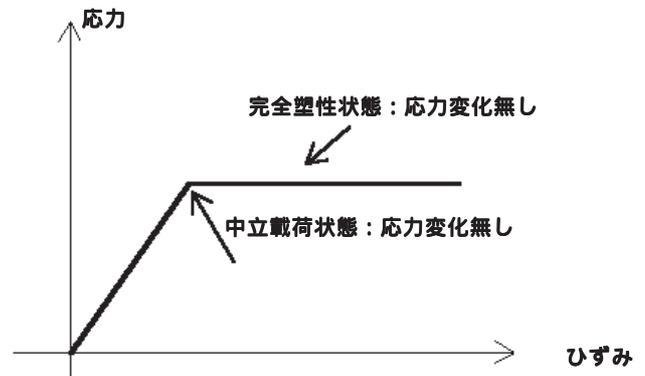


Fig.5 応力空間における完全塑性状態と中立載荷状態の応力変化

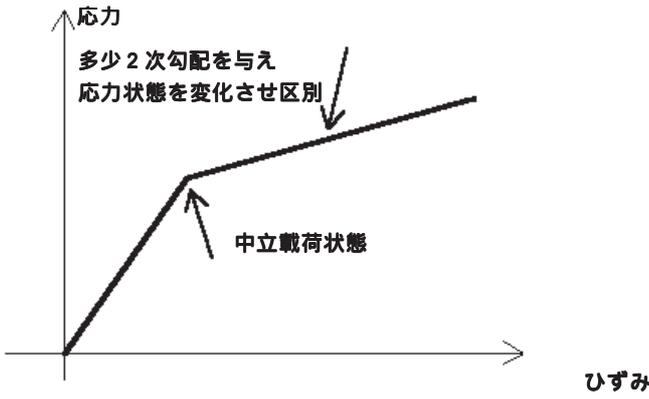


Fig. 6 応力空間における完全塑性状態と中立載荷状態の区別

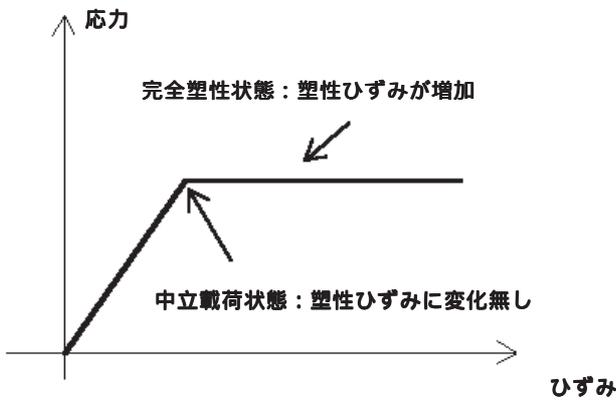


Fig. 7 ひずみ空間における完全塑性状態と中立載荷状態の区別

を得る．ここで，硬化パラメータ κ は塑性ひずみ ϵ_{ij}^p の関数である．また硬化パラメータ増分 $d\kappa$ と塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^p$ は線形関係があることから式 (7) を得る．

$$d\kappa = b_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (7)$$

式 (7) を式 (6) に代入して，

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} b_{ij} \right) d\epsilon_{ij}^p = 0 \quad (8)$$

そこで $G = G(\epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^p)$ を塑性ポテンシャル関数として次式の流れ則を式 (8) に適用させる．

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (9)$$

Mizuno&Hatanaka²⁾, Chen et. al.⁴⁾ は左辺を緩和応力増分として，弾性応力ひずみ関係から塑性ひずみ増分を求めており，この方法は緩和応力増分の降伏曲面への直交性を利用して点から妥当な方法である．上記の式は，Dafalias⁷⁾, Naghdi&Trapp⁸⁾ によって示された非線形弾性をも含んだ一般的な場合の流れ則を簡略化したものである．この二つの流れ則の相違は結局は塑性ポテンシャル関数の相違という形で反映されることになる．後に示す数値計算

例は関連流れ則としているのでこの影響は検討すべき課題であるが，本稿では簡略化のため式 (9) をそのまま用いた．なお，塑性ポテンシャルを応力の関数として定義すると，安定な解を得ることができなくなるため，塑性ポテンシャルもやはりひずみの関数として定義しなければならない．

式 (9) を式 (8) に代入し，式 (10) を得る．

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} + \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} b_{ij} \right) d\lambda \frac{\partial G}{\partial \epsilon_{ij}} = 0 \quad (10)$$

式 (10) を $d\lambda$ について解くと，次式が得られる．

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij}}{-\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ab}^p} \frac{\partial G}{\partial \epsilon_{ab}} - \frac{\partial F}{\partial \kappa} b_{cd} \frac{\partial G}{\partial \epsilon_{cd}}} \quad (11)$$

式 (11) を式 (9) に代入し，さらに，これを次式に示す式 (4) の増分形式に代入して，ひずみ増分 - 応力増分関係式を得る．

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\epsilon_{kl} - d\epsilon_{kl}^p) \quad (12)$$

$$d\sigma_{ij} = [C_{ijkl}^{e-p}] d\epsilon_{kl} = \left(C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial G}{\partial \epsilon_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{kl}}}{\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ab}^p} \frac{\partial G}{\partial \epsilon_{ab}} - \frac{\partial F}{\partial \kappa} b_{cd} \frac{\partial G}{\partial \epsilon_{cd}}} \right) d\epsilon_{kl} \quad (13)$$

ここで，塑性ひずみ増分は

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{\frac{\partial G}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{kl}} d\epsilon_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ab}^p} \frac{\partial G}{\partial \epsilon_{ab}} - \frac{\partial F}{\partial \kappa} b_{cd} \frac{\partial G}{\partial \epsilon_{cd}}} \quad (14)$$

で表される．これと弾性応力-ひずみマトリックスとの積により，緩和応力（軟化挙動に見られる応力の減少値）が求まる．

4.2 ひずみを状態量とした von Mises の降伏関数と Drucker-Prager の降伏関数

4.1 で誘導した増分形の応力-ひずみ関係式に具体的な降伏関数を適用する．ここでは，Kiousis¹⁾ によって定義されたひずみを状態量とした場合の von Mises の降伏関数と，本研究で導出した，ひずみを状態量とした Drucker-Prager の降伏関数を示すと共に，更に，Kiousis¹⁾ の硬化パラメータの概要を示す．

(1) von Mises の降伏関数

応力を状態量とした von Mises の降伏関数は，

$$f(J_2) = J_2 - \kappa - k^2 = 0 \quad (15)$$

である．ここで， J_2 は偏差応力の 2 次の不変量， κ は硬化パラメータである．次に，式 (15) をひずみを状態量として再定義した式を以下に示す．

$$F = F(e_{ij}, e_{ij}^p, \kappa) = 2\mu^2 (e_{ij} - e_{ij}^p)(e_{ij} - e_{ij}^p) - \kappa - k^2 = 0 \quad (16)$$

ここで， μ はせん断弾性係数， e_{ij} は偏差ひずみ， e_{ij}^p は偏差ひずみの塑性成分である．

(2) Drucker-Prager の降伏関数

応力を状態量とした Drucker-Prager の降伏関数は、

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \kappa - k = 0 \quad (17)$$

である。ここで、 I_1 は応力の 1 次不変量、 J_2 は偏差応力の 2 次の不変量、 α 、 k は正の材料定数である。次に、応力の不変量 I_1 および J_2 をひずみ量で表すことを考える。静水圧 p および偏差応力 s_{ij} は、それぞれ次式で与えられる。

$$p = K(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{ii}^p) \quad (18)$$

$$s_{ij} = 2\mu(e_{ij} - e_{ij}^p) \quad (19)$$

ここで、 K 、 μ 、 ε_{ii} 、 ε_{ii}^p 、 e_{ij} 、および e_{ij}^p は、それぞれ、体積弾性係数、せん断弾性係数、体積ひずみ、塑性体積ひずみ、偏差ひずみ、および塑性偏差ひずみを表す。それゆえ、応力の不変量 I_1 および J_2 は、それぞれ、次式のように表される。

$$I_1 = 3p = 3K(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{ii}^p) \quad (20)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = 2\mu^2(e_{ij} - e_{ij}^p)(e_{ij} - e_{ij}^p) \quad (21)$$

式 (20) および (21) を式 (17) に適用させることにより、ひずみ空間で定義された Drucker-Prager の降伏関数を得る。

$$F = 3\alpha K(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{ii}^p) + \sqrt{2\mu^2(e_{ij} - e_{ij}^p)(e_{ij} - e_{ij}^p)} - \kappa - k = 0 \quad (22)$$

(3) Kiousis の硬化パラメータ¹⁾

Kiousis による硬化パラメータ κ は次式のように表される。

$$\kappa = \frac{H}{A} e^{Ax} \left(1 + \frac{1}{PA} - \frac{x}{P} \right) - \frac{H}{A} \left(1 + \frac{1}{PA} \right) \quad (23)$$

式 (23) 中の H 、 A は以下に示す式 (24) 及び (25) から決定されるパラメータであり、式中の σ_p 、 σ_r は軟化挙動を示す応力 - ひずみ曲線の最大応力値と残留応力値である。また式中の p は最大応力値を与える塑性ひずみ (残留ひずみ) の値であり、 x は相当塑性ひずみである。

$$\frac{1}{3}\sigma_p^2 = \frac{He^{Ap}}{A^2P} - \frac{H}{A} - \frac{H}{A^2P} \quad (24)$$

$$\frac{1}{3}\sigma_r^2 = -\frac{H}{A} \left(1 + \frac{1}{PA} \right) \quad (25)$$

また、硬化パラメータ κ の増分は塑性ひずみ ε_{ij}^p の増分と線形関係 (式 (7)) にあることから、式 (7)、式 (24) 及び式 (25) により以下に示す関係式を得る。

$$b_{mn} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{mn}} = He^{Ax} \left(1 - \frac{x}{P} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)^{1/2} \quad (26)$$

5. 適用例

本稿では、一般的に軟化を呈する材料を対象とした構成則を論じていることから、最も基本的な降伏関数として von Mises の降伏関数を用いた場合の応力-ひずみ関

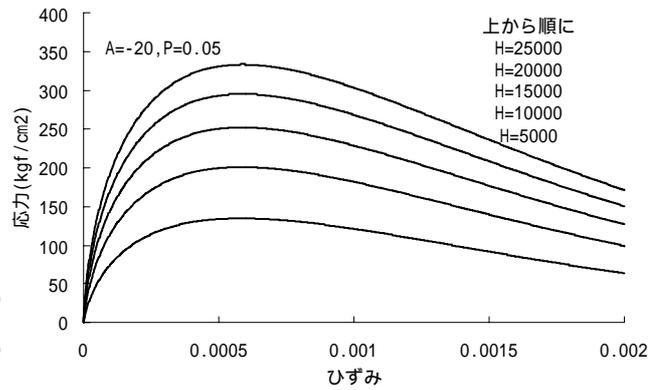


Fig.8 パラメータ H の変化に対する挙動の変化 (von Mises の降伏関数)

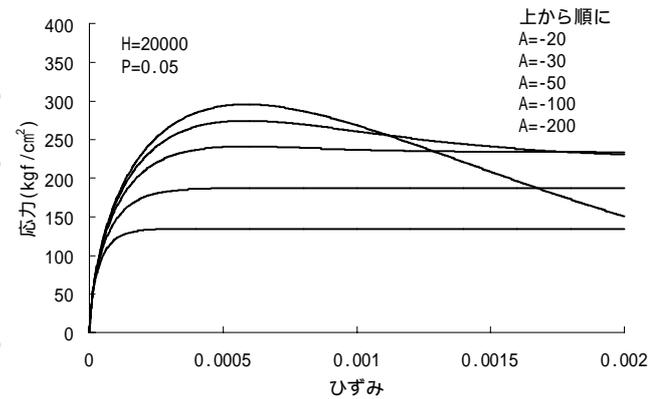


Fig.9 パラメータ A の変化に対する挙動の変化 (von Mises の降伏関数)

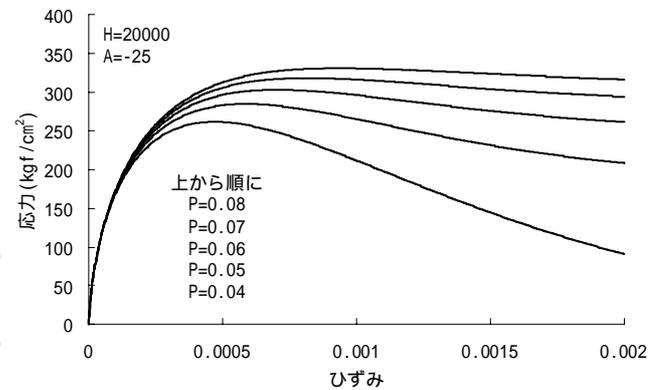


Fig.10 パラメータ P の変化に対する挙動の変化 (von Mises の降伏関数)

係をシミュレートすることとし、更に単軸応力状態の場合については比較のため Drucker-Prager の降伏関数による結果も示す。

5.1 単軸圧縮状態への適用

4.1 で示したひずみ空間における増分形の応力-ひずみ関係式において $F=G$ 、すなわち関連流れ則として、ひずみを状態量とした von Mises の降伏関数、Drucker-Prager の降伏関数をそれぞれ適用させて、単軸圧縮状態の応力-ひずみ

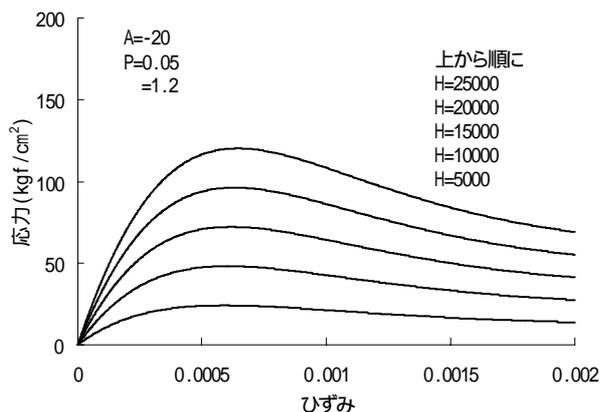


Fig. 11 パラメータHの変化に対する挙動の変化 (Drucker-Prager の降伏関数)

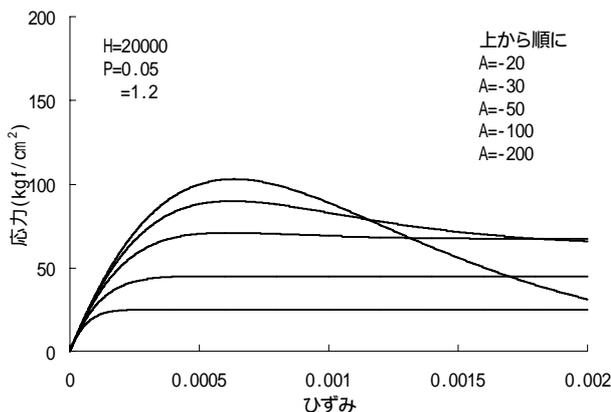


Fig. 12 パラメータAの変化に対する挙動の変化 (Drucker-Prager の降伏関数)

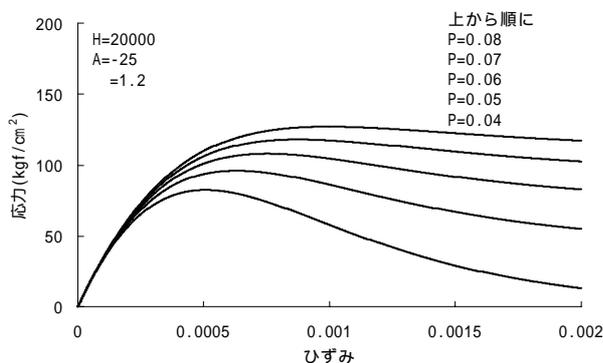


Fig. 13 パラメータPの変化に対する挙動の変化 (Drucker-Prager の降伏関数)

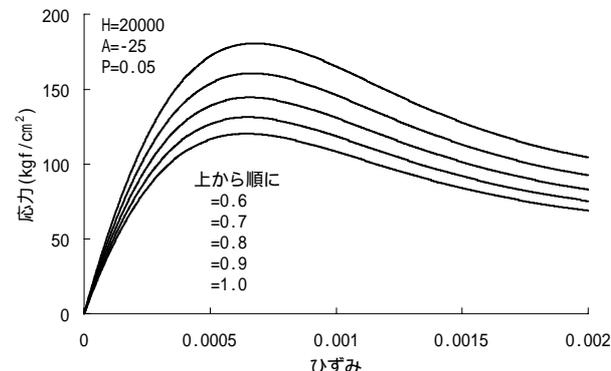


Fig. 14 パラメータ μ の変化に対する挙動の変化 (Drucker-Prager の降伏関数)

関係を求める。

(1) von Mises の降伏関数の適用

ひずみを状態量とした von Mises の降伏関数である式 (15) を、単軸圧縮状態に適用させるため以下に示す式を得る。

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{11}} = 4\mu^2(e_{11} - e_{11}^p), \quad \frac{\partial F}{\partial e_{11}^p} = -\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{11}} = -4\mu^2(e_{11} - e_{11}^p) \quad (27)$$

式 (27) を式 (13) に適用させることにより、von Mises の降伏関数を用いた、単軸圧縮状態の増分形応力 - ひずみ関係式を得る。

$$d\sigma_{11} = E(d\varepsilon_{11} - de_{11}^p) = E \left[d\varepsilon_{11} - \frac{4\mu^2(e_{11} - e_{11}^p)}{4\mu^2(e_{11} - e_{11}^p) + He^{Ax} \left(1 - \frac{x}{P}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}} d\varepsilon_{11} \right] \quad (28)$$

次に式 (28) を用いて数値計算を行った。全ひずみ増分 $d\varepsilon_{11}$ を 0.0001 で step-by-step に増加させることにより塑性ひずみ増分、塑性ひずみ、弾性ひずみ、応力をそれぞれ求め、それにより得られた応力 - ひずみ関係を Fig. 8

から Fig. 10 に示す。ここで、これらの応力 - ひずみ関係はパラメータとなる H, A, P をそれぞれ変化させたものである。なお、数値計算において $E=3.0 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$, $\mu=1.26 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$, $k=0$ としている。

(2) Drucker-Prager の降伏関数の適用

ひずみを状態量とした Drucker-Prager の降伏関数である式 (17) を、単軸圧縮状態に適用させるために以下に示す式を得る。

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{11}} = 3K\alpha + \frac{2\mu^2(e_{11} - e_{11}^p)}{\sqrt{J_2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial e_{11}^p} = -3K\alpha - \frac{2\mu^2(e_{11} - e_{11}^p)}{\sqrt{J_2}} \quad (29)$$

式 (29) を式 (13) に適用させることにより、Drucker-Prager の降伏関数を用いた単軸圧縮状態における増分形応力 - ひずみ関係式を得る。

$$d\sigma_{11} = E(d\varepsilon_{11} - de_{11}^p) = E \left[d\varepsilon_{11} - \frac{\left\{ 3K\alpha + \frac{\mu(e_{11} - e_{11}^p)}{\sqrt{J_2}} \right\}}{\left\{ 3K\alpha + \frac{\mu(e_{11} - e_{11}^p)}{\sqrt{J_2}} \right\} + He^{Ax} \left(1 - \frac{x}{P}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}} d\varepsilon_{11} \right] \quad (30)$$

次に式(30)を用いて数値計算を行った。全ひずみ増分 $d\epsilon_{11}$ を0.0001でstep-by-stepに増加させることにより塑性ひずみ増分、塑性ひずみ、弾性ひずみ、応力をそれぞれ求め、それにより得られた応力-ひずみ関係Fig.11からFig.14に示す。ここで、これらの応力-ひずみ関係はパラメータとなる H, A, P 、をそれぞれ変化させたものである。

(3)考察

これらの結果から、Kiousisの硬化パラメータを用いた場合以下のような特性をもつ応力ひずみ関係を表現できることが分かる。

- ・降伏関数の影響については、von Misesの降伏関数よりもDrucker-Pragerの降伏関数を用いて得られた応力-ひずみ曲線の方がひずみ軟化挙動が顕著に現れている。
- ・パラメータ P の変化は、最大応力値を与える残留ひずみの値に顕著に影響を与えるのみならず、軟化の程度にも強く影響を及ぼす。
- ・パラメータ A (負値)および H が増加するに従って、最大応力値は上昇するが、特に A の値が増加すると軟化現象が顕著になる。

5.2 多軸応力状態への適用

ひずみを状態量としたvon Misesの降伏関数である式(16)を増分形応力ひずみ関係式である式(13)に、多軸応力状態において適用した構成則を用いてシミュレーションを行った。

(1)適用例

Fig.15に示すような側圧 σ_2, σ_3 を加えた条件下で、軸方向(σ_1 方向)に制御ひずみを与えた状態を考える。その際の応力-ひずみ関係式は以下のように表せる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで、

σ_1, ϵ_1 : 既知
 $\sigma_2, \sigma_3, \epsilon_2, \epsilon_3$: 未知

である。ここで、未知の応力成分を σ_A 、既知の応力成分を σ_B 、未知のひずみ成分を ϵ_B 、既知のひずみ成分を ϵ_A として、次式のように表す。

$$\begin{bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{AA} & C_{AB} \\ C_{BA} & C_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_A \\ \epsilon_B \end{bmatrix} \quad (32)$$

上式を展開して、以下の2式を得る。

$$\sigma_A = C_{AA}\epsilon_A + C_{AB}\epsilon_B \quad (33)$$

$$\sigma_B = C_{BA}\epsilon_A + C_{BB}\epsilon_B \quad (34)$$

ここで、

$$\epsilon_B = C_{BB}^{-1}(\sigma_B - C_{BA}\epsilon_A) \quad (35)$$

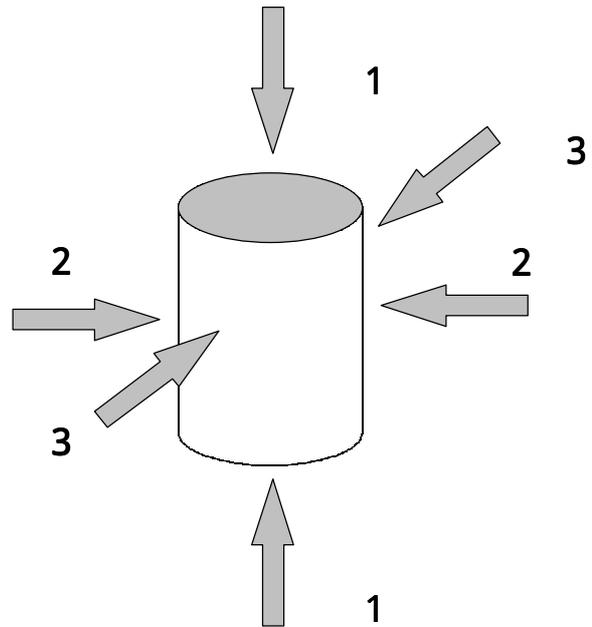


Fig.15 側圧下でのひずみ制御載荷

により、未知のひずみ成分 ϵ_B を求めることができ、 ϵ_B を式(33)に代入することで、未知の応力成分 σ_A を求めることができる。

以上の手順で数値計算を行い、その結果をFig.16からFig.21に示す。ここで、Fig.16及びFig.17は横方向の側圧を一定とした際の結果であり、Fig.18及びFig.19は横方向の側圧を漸増させた際の結果である。ここで、図中の横方向の側圧の増分 $\Delta\sigma_L$ は、全ひずみの増分0.0001に対しての増加量で表している。また、Fig.20は最大応力値を与える残留ひずみから決定されるパラメータ P を変化させた際の結果、Fig.21は横方向のひずみを完全に拘束した際の計算結果を表している。

(2)考察

Fig.16に示すように、側圧を一定とした3軸圧縮試験の結果、側圧を大きくするに従って、ピーク応力が上昇するとともに、材料が硬化するという、一般に認められる結果を得た。側圧が軸力の10%を越えるとFig.17に示したように、次第に横ひずみが減少し圧縮に転ずるとともに、ピーク応力が上昇してついには軟化現象を示さなくなる。

Fig.18に示すように、側圧を一定速度で漸増した場合にも、定性的には一定側圧荷荷の場合と同様の傾向を示す。しかし、一定側圧荷荷に対して、最終的にその一定側圧と同じ側圧に到達する漸増型側圧荷荷を比較すると、一定側圧の場合には1/4程度の側圧でほぼ同様の側圧効果を示していることがFig.16との比較から分かる。

漸増側圧が極端に大きくなると、Fig.19に示すように横ひずみが圧縮に転ずるが、一定側圧荷荷の場合のような、軟化挙動が消失するような現象は現れなかった。

Fig.20にはKiousisの硬化パラメータの中の、ピーク応力時の塑性ひずみに相当する P を変化させた場合の、側圧がない場合の応力-ひずみ関係を示す。他のパラメータに

よっても単軸応力状態の場合と同様、種々の応力-ひずみ関係をシミュレートすることができるが、紙面の都合で割愛する。

Fig.21には、横ひずみをゼロに拘束した場合の応力、側圧と軸方向ひずみの関係を示す。横ひずみの拘束により、側圧が生じ、その大きさはピーク応力の10%以上に達していることが分かる。

このように Kiousisの硬化パラメータは軟化挙動を示す材料の構成則に用いることで柔軟に非線形応力-ひずみ関係をシミュレートすることができる。

6. まとめ

本研究では、ひずみ軟化挙動を推定するために、ひずみ空間において降伏関数を定義して得られる増分型の応力-ひずみ関係を用いて数値シミュレーションを行った。本研究は以下のようにまとめられる。

- ・ 応力空間およびひずみ空間における塑性理論による応力-ひずみ増分関係の定式化の違いについて検討した。
- ・ ひずみ空間で定式化を行った場合には統一的な載荷基準により載荷、中立、除荷を判定することが容易にできる。
- ・ ひずみを状態量とした降伏関数および塑性ポテンシャル関数を用いて流れ則を導入し、ひずみ空間での増分型応力-ひずみ関係式を誘導した。
- ・ 誘導した増分型応力-ひずみ関係式に von Mises, Drucker-Prager の降伏関数および Kiousis の硬化パラメータを単軸圧縮状態で適用して数値計算を行い、単軸ひずみ軟化挙動を柔軟に表現できることを示した。
- ・ 得られた増分型応力-ひずみ関係式を多軸状態へと拡張し、von Mises の降伏関数を適用して数値計算を行い、種々の側圧載荷状態での応力-ひずみ関係を定性的にはあるが表現しうることを示した。
- ・ なお、絶対量である応力とは異なり、材料、または製造過程などの要因により、ひずみの基準を定義することが困

難な場合があることを考慮する必要がある。

参考文献

- 1) Kiousis, P.D. : Strain space approach for softening plasticity, ASCE, Vol.113, No.EM2, pp.210-221, 1987.
- 2) Mizuno, E. and Hatanaka, S. : Compressive softening model for concrete, J. Engineering Mechanics, ASCE, Vol.118, No.8, pp.1546-1562, 1992.
- 3) Chen, W.F. : コンクリート構造物の塑性解析, 色部誠, 河角誠, 安達洋監訳, 丸善株式会社, 1985.
- 4) Chen, W.F., Yamaguchi, E. and Han, D.J. : Constitutive Equations for Engineering Materials -Theory of Concrete Plasticity-, pp.865-874, Elsevier, Amsterdam, 1990.
- 5) Drucker, D.C. : Some implications of work hardening and ideal plasticity, Q. Applied mathematics, pp.411-418, Vol.VII, No.4, 1950.
- 6) Il'yushin A.A. : On the postulate of plasticity, Prikl. Mat. Mekh., Vol.25, pp.503-507, 1961.
- 7) Dafalias, Y.F. : Il'yushin's postulate and resulting thermodynamic conditions on elasto-plastic coupling, Int. J. Solids Structures, Vol.13, pp.239-251, 1977.
- 8) Naghdi, P.M. and Trapp, J.A. : The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surfaces in strain space, Int. J. Engng. Sci., Vol.13, pp.785-797, 1975.
- 9) 田辺忠顕・呉智深・余国雄: コンクリート材料統一弾塑性モデル, 土木学会論文集, No.496/V-24, pp.21-29, 1994.
- 10) 水野英二・畑中重光: 塑性理論によるコンクリートの載荷経路依存型圧縮軟化特性のモデル化, コンクリート工学論文集, Vol.3, No.2, pp.1-13, 1992.

(1998年9月18日受付)

Formulation of Constitutive Law for Strain Softening Materials in Strain Space

Takeshi ICHIKAWA supervised by Masaru MINAGAWA

In the present paper, a formulation of constitutive law is described for strain softening materials. Comparing the loading criterion defined in the stress space with that of the strain space, it is rationalized that the constitutive law is to be formulated in the strain space. By the use of yield functions defined in the strain space, elasto-plastic stress-strain relationships are formulated. The relationships are applied to the uni-axial stress problem and some multi-axial stress problems. Thus, the applicability of the constitutive law is shown.

Key Words: strain softening, elasto-plastic, constitutive law, strain space