

構造工学における数値解析法シンポジウム論文集

第 10 卷

Proceedings of Symposium on  
Computational Methods in Structural Engineering  
and Related Fields  
Volume, 10

昭和 61 年 7 月

日本鋼構造協会

有限要素法における離散化誤差の理論的評価手法について  
 Theoretical Estimation of Discretization Error in FEM

増田 隆紀1)・西脇 威夫2)・皆川 勝3)・○松尾 和則4)

1. はじめに 動的応答解析に際して有限要素法により空間を離散化する場合に生ずる、離散化誤差に起因する応答解析の誤差は、系の固有振動数に対する離散化モデルの近似精度に依存する。有限要素離散化モデルの固有振動数の精度評価に関しては、有限要素法が与える節点関係式 — 離散化漸化式 — をテーラー展開して近似微分方程式に置き換え、原微分方程式と比較することにより微分方程式の形で離散化精度を評価するとともに、境界条件を満たす変位関数を近似微分方程式に代入して、得られる近似解を厳密解と比較して離散化精度を理論的に評価した、Walzらの研究[1]が代表的である。Walzらは、この手法を動的問題と同時に静的問題にも適用しているが、線形の形状関数を有する有限要素のみを対象としており、複数の形式の離散化漸化式が得られる高次の形状関数を有する有限要素については扱われていない。一方、著者ら[2]は、棒の縦振動およびはりの曲げ振動問題などを対象として、より高次の形状関数を有する幾つかの要素について、要素ごとに固有振動数の精度が、当該要素分割の下で表わし得る最高次数で無次元化した振動次数の関数として一義的に表わされることなどを数値実験的に示したが、理論的な精度評価式に関しては、各離散化漸化式に対して独立にWalzらの手法を適用しても正しい結果は得られないことを指摘したものの評価式そのものを誘導するには到っていない。これに対しStrang・Fix [3]は、高次の形状関数を用いた離散化モデルをさらに境界条件を無視したトープリッツ構造として近似し、得られる離散化漸化式を連立させ固有値計算により固有円振動数の近似解を求める方法を示し、はり要素エルミート3次式整合質量モデルを用いたはりの曲げ振動問題を対象に具体的な固有振動数精度評価式を求めている。

本論では、文献[3]と同様に離散化漸化式を連立させ、しかし固有値計算によることなく、固有振動数精度評価式を誘導する方法を提示し、文献[2]で扱った問題のうち棒の縦振動問題およびはりの曲げ振動問題を対象にして、幾つかの要素につき数値計算を行い、理論評価式の妥当性を検証する。

2. 固有円振動数精度評価式の誘導 棒の縦振動問題を例に、固有円振動数精度評価式の誘導過程を述べる。問題を記述する非減衰強制振動方程式は次式で定義される。

$$\rho A \ddot{U}(x, t) = \rho A C_0^2 U''(x, t) + F(x, t) \quad (1)$$

ここで、 $C_0^2 = E/\rho$ 、 $E$ ：ヤング率、 $\rho$ ：単位体積質量、 $A$ ：断面積、 $F(x, t)$ ：単位長さ当たりの分布軸力、 $U(x, t)$ ：軸方向変位、であり材料定数は一定とする。また、ドット(·)とダッシュ(˙)はおおの時間 $t$  ( $\geq 0$ )と座標 $x$  ( $0 \leq x \leq L$ )についての微分を表わす。式(1)の自由振動の一般解は次式で与えられる。

$$U(x_j, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(jh, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n e^{i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}) e^{i\phi_n jh} \quad (2)$$

式(2)は次のように書くことができる。

$$U(x_j, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega_n t) e^{i\phi_n jh} \quad \text{または} \quad U(jh, t) = U(\{j-1\}h, t) e^{i\phi_n h} \quad (3), (4)$$

ただし $\phi_{-n} = -\phi_n$ とする。また、 $\omega_n$ 、 $\phi_n$ ：境界条件を満たす第 $n$ 次の固有円振動数と振動数方程式の根、 $A_n, B_n$ ：初期条件より定まる定数、 $h$ ：空間座標上の距離である。本論では、異なる空間座標上の変位を関係づける関数“ $e^{i\phi_n h}$ ”を空間積分オペレータと定義する。いま、式(3)の第 $n$ 次の解

$$u_n(jh, t) = C_n(\omega_n t) e^{i\phi_n jh} = C_n(\omega_n t) e^{i(\omega_n/C_0) jh} \quad (5)$$

1) 武蔵工業大学・工学部・助教授 2) 同・教授 3) 同・助手 4) 横河技術情報  
 東京都世田谷区玉堤1-28-1 (〒158)

に対し、有限要素法によって空間領域が離散化された近似系の第n次の解を、形式的に次の複素指数関数で仮定する。

$$u_n^*(jh, t) = C_n(\omega_n^* t) \exp [i \phi_n^* j h] = C_n(\omega_n^* t) \exp [i(\omega_n^*/C_0^*) j h] \quad (6)$$

ここで、 $\omega_n^*$   $\phi_n^*$ : 近似系のもつ第n次の固有円振動数と振動数方程式の根である。また、(\*)は有限要素法により空間領域が離散化された近似系であることを示す。

式(5)(6)より、近似空間積分オペレータ  $\exp(i \phi_n^* h)$  は  $\exp(i \phi_n h)$  を近似し、その近似度が高い程  $\omega_n^*$  に生ずる空間領域の離散化誤差が少なく、最終的に応答値の精度が良いと言える。さらに、近似空間積分オペレータが固有円振動数  $\omega_n$  を  $\omega_n^*$  に写像するものと解釈すると、近似系の  $\omega_n^*$  と厳密解  $\omega_n$  の対応を考えることで空間領域の離散化誤差が評価できる。

次に、ラグランジュ2次式整合質量モデルを例に取り、近似系の固有円振動数の誘導手順を示す。非減衰自由振動の運動方程式は次式である。

$$M \ddot{U} + K U = 0 \quad (7)$$

ここで、M: 質量行列, K: 剛性行列, U: 変位ベクトルを表わしている。長さhの要素により、空間領域が等分割された規則的な有限要素の集合を考えると式(7)に対応する本モデルの隔な形は次式となる。ただし、 $u_j = u(jh, t)$  を表わす。

$$\frac{\rho A h}{30} \begin{bmatrix} \cdot & & & & & \\ & 2 & 16 & 2 & & \\ & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ & & & 2 & 16 & 2 \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{j-2} \\ \ddot{u}_{j-1} \\ \ddot{u}_j \\ \ddot{u}_{j+1} \\ \ddot{u}_{j+2} \\ \cdot \end{Bmatrix} + \frac{EA}{3h} \begin{bmatrix} \cdot & & & & & \\ & -8 & 16 & -8 & & \\ & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ & & & -8 & 16 & -8 \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{j-2} \\ u_{j-1} \\ u_j \\ u_{j+1} \\ u_{j+2} \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (8)$$

第n次の有限要素解を式(6)で仮定し、式(8)に代入したのち、式(8)において変位に与えられる境界条件を無視する。これは、解析対象である区間  $[0, L]$  で定義された“両端固定の棒”に対し境界条件  $u_0 = u_n = 0$  を強制せずに、区間  $[0, L]$  を  $(-\infty, \infty)$  まで拡張することに相当する。この時、行列M\*, K\*は至る所で“対角成分が同じ値をもつトープリッツ構造” — ここでは、ブロック3重対角行列である — を持ち、次の2種の離散化漸化式(9)(10)が達成したものとなる。

$$(10E + \rho h^2 \omega_{n\infty}^{*2}) (u_{j-2} + u_{j,2}) - 2(40E + \rho h^2 \omega_{n\infty}^{*2}) (u_{j-1} + u_{j,1}) + 4(35E - 2\rho h^2 \omega_{n\infty}^{*2}) u_j = 0 \quad (9)$$

$$- 2(40E + \rho h^2 \omega_{n\infty}^{*2}) (u_j + u_{j,2}) + 16(10E - \rho h^2 \omega_{n\infty}^{*2}) u_{j,1} = 0 \quad (10)$$

ここで、式(9)(10)は各々外節点  $u_j$  と内節点  $u_{j,1}$  に関する行列の行から得られる式である。 $\omega_{n\infty}^*$  は境界条件を無視した系から得られる固有円振動数であり、区間  $(-\infty, \infty)$  まで拡張したことにより式(11)を満たしている。もし、トープリッツ行列の規則性が境界条件によって変化しないならば、 $\omega_n^* = \omega_{n\infty}^*$  が成立する。

$$\min(\omega_{n\infty}^*) \leq \min(\omega_n^*) \leq \max(\omega_n^*) \leq \max(\omega_{n\infty}^*) \quad (11)$$

式(9)(10)より内節点  $u_{j,1}$  の項を消去すると、外節点のみで構成された離散化漸化式(12)が得られる。この  $\omega_{n\infty}^*$  に関する代数方程式を解くと式(13)が得られる。ここで、複符号のうち正符号は、

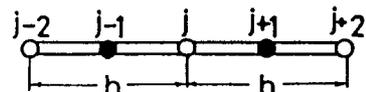


Fig.1 Lagrange 2nd. Model

$$[ (40E + \rho h^2 \omega_{n\infty}^{*2})^2 - 4(10E - \rho h^2 \omega_{n\infty}^{*2})(10E + \rho h^2 \omega_{n\infty}^{*2}) ] (u_{j-2} + u_{j,2}) + [ 2(40E + \rho h^2 \omega_{n\infty}^{*2})^2 - 16(10E - \rho h^2 \omega_{n\infty}^{*2})(35E - 2\rho h^2 \omega_{n\infty}^{*2}) ] u_j = 0 \quad (12)$$

$$\omega_{n\infty}^* = \frac{c_0}{h} \sqrt{\frac{-4(2 \cos \phi_{n\infty}^* h + 13) \pm 4 \sqrt{-11 \cos^2 \phi_{n\infty}^* h + 112 \cos \phi_{n\infty}^* h + 124}}{(\cos \phi_{n\infty}^* h - 3)}} \quad (13)$$

Fig.1 より、ラグランジュ形状関数を仮定した要素では三節点、エルミート形状関数を仮定した要素では二節点が、それぞれ相対変位することで疎密波の最大固有振動モードを表現することが可能となる。このため、 $\phi_{n\infty}^* h$  は次式のように与えられる。

$$\phi_{n\infty}^* h = (\omega_{n\infty}^* / C_n^*) h = (2\pi / T_n^*) (T_n^* / \lambda_n^*) h = 2\pi h / \lambda_n^* \quad (14)$$

ここで、 $\lambda_n^*$  : 第  $n$  次の波長、 $T_n^*$  : 第  $n$  次の固有周期である。式(14)より、ラグランジュ2次式要素では、 $\phi_{n\infty}^* h$  が  $[0 \leq \phi_{n\infty}^* h \leq 2\pi]$  の範囲 — 一般的には、ラグランジュ  $n$  次式要素では  $[0 \leq \phi_{n\infty}^* h \leq n\pi]$  エルミート  $n$  次式要素では  $[0 \leq \phi_{n\infty}^* h \leq (n-1)\pi]$  である — にあることがわかる。

厳密解  $\omega_n = C$ 、 $\phi_n$  を式(13)の右辺に代入すると左辺にひずみを持った近似解  $\omega_{n\infty}^*$  が得られる。提案する精度評価式では、 $\omega_{n\infty}^*$  を新たに  $\omega_n^*$  で記述することとし、 $\omega_n^*$  を  $\omega_n$  で規準化して第  $n$  次の固有円振動数の精度と定義する。

$$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{-4(2c \cos \phi_n h + 13) \pm 4 \sqrt{-11c \cos^2 \phi_n h + 112c \cos \phi_n h + 124}}{(c \cos \phi_n h - 3)}} \quad (15)$$

[  $0 \leq \phi_n h \leq 2\pi$  ]

3. 数値実験による理論精度評価式の妥当性の検証 ここでは、離散化精度評価式を、提案した誤差評価手順に従って陽な形で明示すると共に数値実験結果と比較することにより評価式の妥当性を検証するものとする。軸要素では形状関数の相違、曲げ要素では境界条件の相違に着目した解析をそれぞれ行っている。

(1) 両端を固定された棒の縦振動問題の数値実験結果

(i) 解析対象 Fig.2 に示す一様断面の棒を解析対象とする。境界条件は両端固定とする。

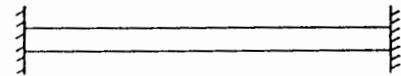


Fig.2 Straight Bar

(ii) 個々のモデルの提案精度評価式 空間領域の離散化は、ラグランジュ族の形状関数を有する1次式、2次式、3次式モデルとエルミート族の形状関数を有する3次式モデルにより行うが、各モデルとも慣性力の離散化の違いを比較するために整合質量(C.M)と集中質量(L.M)を考慮する。

$$u(0,t)=0 \quad u(L,t)=0$$

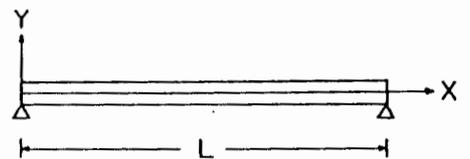
代表例としてラグランジュ2次および3次式モデルの一要素関係式をTab.1 に示し、固有円振動数精度評価式をTab.2 に示す。

(iii) 数値実験結果から得られる固有円振動数誤差 上記離散化モデルに対する数値実験結果を、Tab.2 に与えた精度評価式と共にFig.3 に示す。

図中、実線は固有円振動数精度評価式を表わし、記号は解析対象を10,20,30分割して得られた数値実験結果を表わしている。

(2) はりの曲げ振動問題の数値実験結果

(i) 解析対象 Fig.4 に示す一様断面の梁を解析対象とする。境界条件は図中に示す4種類(a)-(d)を考える。



(ii) 個々のモデルの提案精度評価式 空間領域の離散化は、エルミート族の形状関数を有する3次式モデルにより行ない、整合質量と集中質量を考慮する。モデルの一要素関係式を

Tab.3 に示し、固有円振動数精度評価式をTab.4 に示す。エ

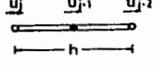
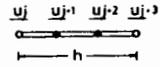
ルミートモデルに集中質量を用いる場合、一般に回転慣性を零とするため質量行列は特異であり、通常の固有値解析のアルゴリズムは使用できない。このため数値計算では、静的縮小法を用いて質量行列を正定値として解を求めた。

- (a)  $u(0,t)=u'(0,t)=u(L,t)=u'(L,t)=0$  (fix-fix)
- (b)  $u(0,t)=u(0,t)=u(L,t)=u'(L,t)=0$  (fix-pin)
- (c)  $u(0,t)=u'(0,t)=u(L,t)=u''(L,t)=0$  (fix-free)
- (d)  $u(0,t)=u'(0,t)=u(L,t)=u'(L,t)=0$  (pin-pin)

Fig.4 Straight beam

(iii) 数値実験結果から得られる固有円振動数誤差 数値実験の結果の中から、境界条件(a) および(d) に対する結果を、Tab.4 に与えた精度評価式と共にFig.5 に示す。

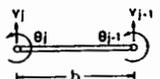
Tab.1 Element Relation of Bar Element

FEM MODEL	ELEMENT RELATION (Consistent/Lumped)	
Lagrange 2nd. 	$\frac{\rho Ah}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j-1} \\ u_{j-2} \end{Bmatrix} + \frac{EA}{3h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j-1} \\ u_{j-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	
Lagrange 3rd. 	$\frac{\rho Ah}{1680} \begin{bmatrix} 128 & 99 & -36 & 19 \\ 99 & 648 & -81 & -36 \\ -36 & -81 & 648 & 99 \\ 19 & -36 & 99 & 128 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j-1} \\ u_{j-2} \\ u_{j-3} \end{Bmatrix} + \frac{EA}{240h} \begin{bmatrix} 888 & -1134 & 324 & -78 \\ -1134 & 2592 & -1782 & 324 \\ 324 & -1782 & 2592 & -1134 \\ -78 & 324 & -1134 & 888 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j-1} \\ u_{j-2} \\ u_{j-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	
	$\frac{\rho Ah}{1680} \begin{bmatrix} 210 & & & \\ & 630 & & \\ & & 630 & \\ & & & 210 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j-1} \\ u_{j-2} \\ u_{j-3} \end{Bmatrix} + \frac{EA}{240h} \begin{bmatrix} 888 & -1134 & 324 & -78 \\ -1134 & 2592 & -1782 & 324 \\ 324 & -1782 & 2592 & -1134 \\ -78 & 324 & -1134 & 888 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j-1} \\ u_{j-2} \\ u_{j-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	

Tab.2 Evaluated Accuracy of Discretized Model for Bar Structure

FEM MODEL	EVALUATED ACCURACY (Consistent/Lumped)	
Lagrange 2nd.	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{-4(2C_1+13)+4\sqrt{-11C_1^2+112C_1+124}}{C_1-3}}$	$[0 < \phi_n h < \pi]$ (16)
	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{-4(2C_1+13)-4\sqrt{-11C_1^2+112C_1+124}}{C_1-3}}$	$[\pi < \phi_n h < 2\pi]$ (17)
	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{C_1+11+\sqrt{C_1^2+70C_1+73}}$	$[0 < \phi_n h < \pi]$ (18)
	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{C_1+11+\sqrt{C_1^2+70C_1+73}}$	$[\pi < \phi_n h < 2\pi]$ (19)
Lagrange 3rd.	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{80(91C_1^2+3108C_1-5964)}{7(C_1+4)^2}} \cdot C_3 \cdot \frac{10(C_1-18)}{(C_1+4)}$	$[0 < \phi_n h < \pi]$ (20)
	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{80(91C_1^2+3108C_1-5964)}{7(C_1+4)^2}} \cdot C_4 \cdot \frac{10(C_1-18)}{(C_1+4)}$	$[\pi < \phi_n h < 2\pi]$ (21)
	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{80(91C_1^2+3108C_1-5964)}{7(C_1+4)^2}} \cdot C_5 \cdot \frac{10(C_1-18)}{(C_1+4)}$	$[2\pi < \phi_n h < 3\pi]$ (22)
	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{60(169C_1^2-20516C_1+68056)}{3375}} \cdot C_6 \cdot \frac{13C_1-436}{15}$	$[0 < \phi_n h < \pi]$ (23)
	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{60(169C_1^2-20516C_1+68056)}{3375}} \cdot C_7 \cdot \frac{13C_1-436}{15}$	$[\pi < \phi_n h < 2\pi]$ (24)
	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{60(169C_1^2-20516C_1+68056)}{3375}} \cdot C_8 \cdot \frac{13C_1-436}{15}$	$[2\pi < \phi_n h < 3\pi]$ (25)
$C_1 = \cos \phi_n h$ $C_2 = \cos 2\phi_n h$ $C_3 = \cos((\pi - \epsilon_1)/3)$ $C_4 = \cos((\pi + \epsilon_1)/3)$ $C_5 = \cos(\epsilon_1/3)$ $C_6 = \cos((\pi - \epsilon_2)/3)$ $C_7 = \cos((\pi + \epsilon_2)/3)$ $C_8 = \cos(\epsilon_2/3)$ $\epsilon_1 = \cos^{-1} \left\{ \frac{10(2009C_1^2+12789C_1+555660C_1-462168)}{-140(91C_1^2+3108C_1-5964)} \right\}$ $\epsilon_2 = \cos^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{-4394C_1^2-800124C_1+33885168C_1-17945192}}{4(-169C_1^2+20516C_1-68056)} \right\}$		

Tab.3 Element Relation of Beam Element

FEM MODEL	ELEMENT RELATION (Consistent/Lumped)	
Hermite 3rd. 	$\frac{\rho Ah}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \\ v_{j-1} \\ \theta_{j-1} \end{Bmatrix} + \frac{2EJ}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & 3h & -6 & 3h \\ 3h & 2h^2 & -3h & -h^2 \\ -6 & -3h & 6 & -3h \\ 3h & h^2 & -3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \\ v_{j-1} \\ \theta_{j-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	
	$\frac{\rho Ah}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \\ v_{j-1} \\ \theta_{j-1} \end{Bmatrix} + \frac{2EJ}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & 3h & -6 & 3h \\ 3h & 2h^2 & -3h & -h^2 \\ -6 & -3h & 6 & -3h \\ 3h & h^2 & -3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \\ v_{j-1} \\ \theta_{j-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	

Tab.4 Evaluated Accuracy of Discretized Model for Beam Structure

FEM MODEL	EVALUATED ACCURACY (Consistent/Lumped)	
Hermite 3rd.	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{(-2520C_2+186480C_1+345240) - \sqrt{30507321600C_1^2-8467200C_1^2+186278400C_1-C_2}}{7C_2-504C_1} - \frac{-3725568000C_2+139725734400C_1+113367340800}{+917}}$	$[0 < \phi_n h < \pi]$ (26)
	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{(-2520C_2+186480C_1+345240) + \sqrt{30507321600C_1^2-8467200C_1^2+186278400C_1-C_2}}{7C_2-504C_1} - \frac{-3725568000C_2+139725734400C_1+113367340800}{+917}}$	$[\pi < \phi_n h < 2\pi]$ (27)
	$\frac{\omega_n^*}{\omega_n} = \frac{1}{\phi_n h} \sqrt{\frac{6(C_2-4C_1+3)}{C_1+2}}$	$[0 < \phi_n h < \pi]$ (28)
$C_1 = \cos \phi_n h$ $C_2 = \cos 2\phi_n h$		

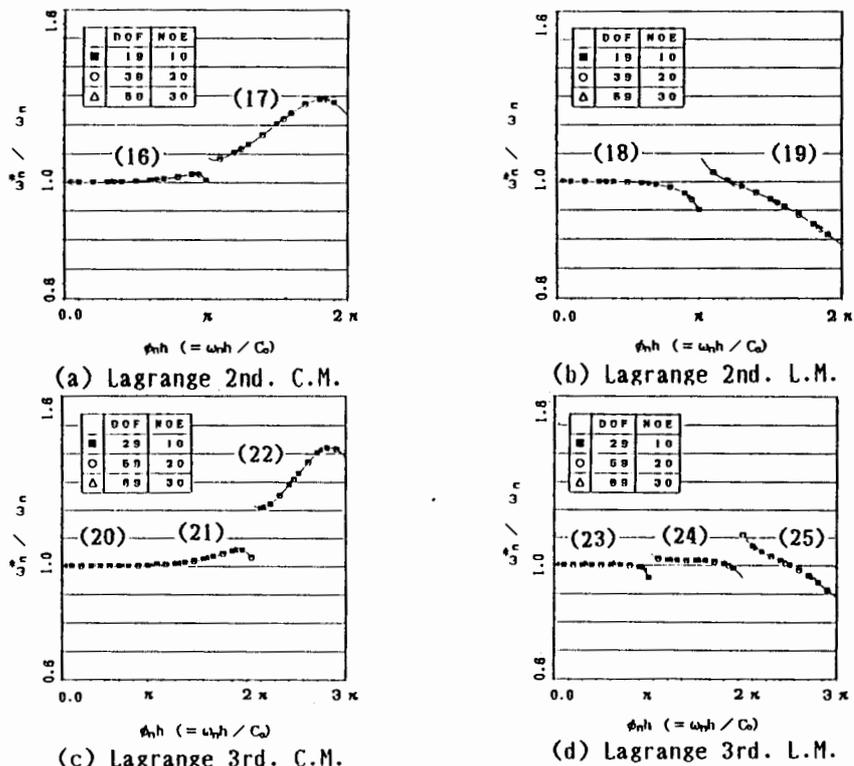


Fig.3 Accuracies of Natural Frequencies for Discretized Bar Structure

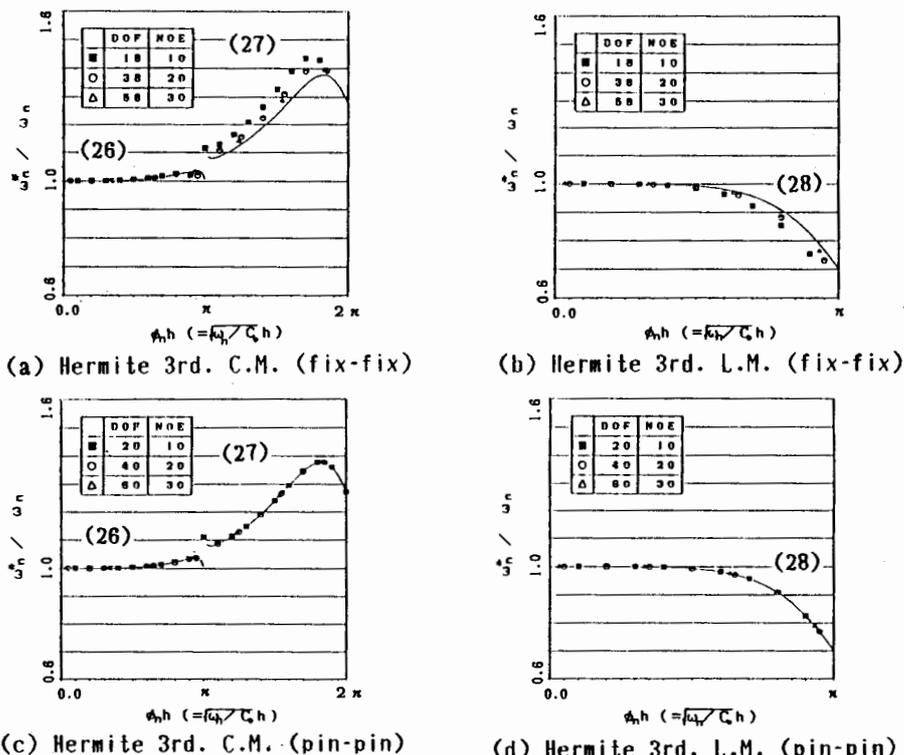


Fig.5 Accuracies of Natural Frequencies for Discretized Beam Structure

### (3) 理論精度評価式の妥当性

(i) 全ての評価式は、 $\phi_n$ 、 $h$ をパラメータとする関数で示されるが、高次の形状関数を用いた要素では、固有円振動数分布のいくつかの領域を異なった関数形で近似している。これに伴い、ラグランジュ $n$ 次の有限要素では $n-1$ 個、自由度の縮小を行わないエルミート $n$ 次の有限要素では $(n-1)/2$ 個の不連続点を境にして固有円振動数の精度が非常に異なる。これらの評価式の特性と計算結果は非常に良く一致している

(ii) 整合質量モデルは、厳密解の上界を常に与えるため周期が短くなる。この傾向は、高次の形状関数を仮定したモデルの高次モード成分ほど強くなる。一方、自由度の縮小を行わないラグランジュ集中質量モデルでは、高次の形状関数になるに従い、得られる固有円振動数は厳密解の回りに分布し始める。これらの特性と計算結果は良く一致している。なお、これより、集中質量モデルは計算効率の点で非常に優れているが要素の近似度が整合質量モデルに劣るため、あまり解析には適さないとする従来の理論は、少なくともラグランジュ集中質量モデルに対しては再考の余地がある。

(iii) トーブリッツ解析による理論的な展開では、境界条件が考慮されないので、曲げ要素の4つの境界条件に対して単一の評価式しか得られない。実際に与えられる境界条件は、トーブリッツ行列の規則性を破るものであるため、各数値実験結果と評価式にずれが生ずるのは、当然と言える。しかし、要素分割数が増すにしたがって境界条件の影響は少なくなり、数値実験結果は精度評価式に漸近する。

4. おわりに 本論では、一次元構造物の時間依存問題の空間有限要素分割による離散化誤差を、固有円振動数について理論的に検討し、数値計算結果との比較を通じて、提案する固有円振動数精度評価式の妥当性を確認した。固有円振動数精度評価式の特長・適用性は以下のようにまとめられる。

(i) ここで採用したトーブリッツ解析は、差分法の誤差解析を基礎とした手法であるため、有限要素は幾何学的に規則的な形状と接続関係を持つ必要がある。

(ii) 本論で提案された離散化誤差評価手法では、最初に、有限要素によって近似された系をさらに境界条件を無視したトーブリッツ構造として近似し、得られる代数方程式を解くことによって近似系の持つ解を定義する。この後、厳密解の周波数特性と近似解の周波数特性の間のひずみから精度評価式を導出する。

(iii) 多自由度系では、応答に寄与する高次モード成分の割合は微小である場合が多いため、高次モードの近似度が問題とされることは少ない。しかし、外力成分が極端に複雑な場合や、振動が局所的な変形によって生ずる場合には、応答に寄与する高次モード成分の割合が高くなるため、精度の良い近似解を得るためには、高次モード成分も無視することができない。本評価法によって得られた結果は、限定された構造系に対してではあるが、現象の支配的なモードを十分な精度で近似するために必要となる要素分割数を与える目安となると思われる。

なお、本論では一切触れていないが、本手法は定常問題に対しても、また、二次元問題に対しても適用可能である。

最後に、計算は全て武蔵工業大学情報処理センター-FACOM M-360 によったこと、および本研究に対して昭和60年度文部省科学研究費・総合研究(A)の給付を受けたことを付記する。

### [参考文献]

- 1) Valz, J.E., Fulton, R.E., Cyrus, N.J. and Eppink, R.J.: Accuracy of Finite Element Approximation to Structural Problems, NASA TN D-5728, 1970.
- 2) 増田・西本・西麻・皆川: 有限要素法による1次元動的応答解析における離散化誤差の一検討, 日本鋼構造協会第17回大会研究集會マトリックス解析法研究発表論文集, pp.43-48, 1983.
- 3) Strang, G. and Fix, G.J.; 三好哲彦, 藤井宏共訳: 有限要素法の理論, pp.186-194, 培風館, 1976.

Nobutoshi MASUDA 1, Takeo NISHIWAKI 2,  
Masaru MINAGAWA 3, Kazunori MATSUO 4

SUMMARY

Though the efficiencies of finite element method are generally recognized, approximate solutions can not be used properly without investigating the accuracy and characters of the finite element solutions.

This study proposes a method to evaluate accuracies of discretized models, and investigates the appropriateness of the proposed method by comparing the accuracy estimation equations derived from the method with the accuracies directly obtained through the results of numerical analyses.

Object problems here are one dimensional dynamic problems in space, namely, longitudinal vibration problem of a straight bar with fixed ends and bending vibration problem of a straight beam.

The proposed method have the following principal features.

(i) The method is composed of two steps. First, finite element approximated system, being ignored boundary conditions, is modeled as Toeplitz structure. And solutions of the approximated Toeplitz structure are obtained. Then, the accuracy estimation equation for the discretized model is derived as the distortion of the frequency response characters of the model from the characteristics of the correct solution.

(ii) The accuracy estimation equations are functions of normalized order of vibration. The normalization is done in regard of the maximum order for each finite element approximated structure.

(iii) As far as the longitudinal vibration of a straight bar problem is concerned, the accuracy estimation equations for both Lagrange type models and Hermite type model perfectly coincide with the numerically obtained accuracies.

(iv) In the case of the bending vibration of beam problem, the estimation equation for Hermite type model coincides well with the numerically obtained accuracies, for several different boundary conditions, especially when number of elements are increased.

(v) The results obtained by the proposed method indicates some directions concerning to the number of elements which is sufficient to approximate superior modes of the problem under consideration.

---

1.M.JSCE, Assoc. Prof., 2.M.JSCE, Prof., 3.M.JSCE, Research Assoc.

Dept. of Civil Eng., Musashi Inst. of Tech., Tokyo 158.

4.M.JSCE, Engineer, Yokokawa Technical Information, Tokyo 108.