

構造工学における数値解析法シンポジウム論文集  
第 11 卷

Proceedings of Symposium on  
Computational Methods in Structural Engineering  
and Related Fields  
Volume, 11

昭和 62 年 7 月

日本鋼構造協会

## 繰り返し塑性モデルによる履歴曲げモーメント-曲率関係の推定

PREDICTION OF HYSTERETIC MOMENT-CURVATURE RELATIONS  
 BY A CYCLIC PLASTICITY MODEL

○皆川 勝<sup>1)</sup>, 西脇成夫<sup>2)</sup>, 増田陳紀<sup>3)</sup>

### 1. はじめに

地震などにより複雑な変動荷重を受ける骨組構造物の変形状を評価するためには、はり、はり-柱、それらの接合部における変形特性等を把握する必要があり、その基本は素材の応力-ひずみ関係である。このために、著者らは多曲面塑性モデルを基本として新たな繰り返し塑性モデルを既に提案した<sup>1)</sup>。Petersson および Popov によって提案されたモデル<sup>2)</sup>に若干の修正を加えることによって構築されたこのモデルでは、鋼材の履歴引張圧縮応力-ひずみ関係を非常に精度良く推定することができる<sup>3)</sup>。

本研究では、提案した繰り返し塑性モデルの部材解析への適用を目標とし、その第1段階として、H型鋼はりの弾塑性履歴曲げモーメント-曲率関係の推定に対して本モデルの適用性を検証する。そのために、まず、H型鋼により製作されたはり試験体を用いて、部材断面の一部が塑性化するような激しい繰り返し曲げを受ける場合の曲げモーメントと曲率の関係を測定した。材料特性は試験体から切り出した試験片の引張試験と基本的な引張圧縮試験から決定した。試験体の残留応力は孔あけ法<sup>4)</sup>により測定した。測定された材料特性と残留応力を用いて、繰り返し塑性モデルを単軸応力状態に適用した上で、接線剛性法<sup>5)</sup>によって履歴曲げモーメント-曲率関係を計算した。これと実測結果を比較することによって、はり断面の履歴挙動の推定に対する著者らが提案した繰り返し塑性モデルの有効性を検討した。

### 2. 繰り返し塑性モデル<sup>1), 2)</sup>

履歴応力-ひずみ挙動は主応力空間に定義された曲面の拡大・縮小ならびに移動によって表現される。各々の曲面はその大きさを表す関数 $\kappa$ と、中心座標を表すベクトル $\{\alpha\}$ によって定義される。 $\kappa$ および $\{\alpha\}$ は履歴の進展を示す状態変数 $\bar{\epsilon}_p$ および $\bar{\epsilon}_{pi}$ の関数であり、それによって $\kappa$ および $\{\alpha\}$ に履歴の効果が導入される。 $\bar{\epsilon}_p$ および $\bar{\epsilon}_{pi}$ は次式で定義され、それぞれ累積相当塑性ひずみおよび相当塑性ひずみ増分と呼ぶ。

$$\bar{\epsilon}_p = \int_{t_0}^{t_i} d\bar{\epsilon}_p, \quad \bar{\epsilon}_{pi} = \int_{t_0}^{t_i} d\bar{\epsilon}_{pi} \quad (1)$$

ここで、 $\bar{\epsilon}_p$ は最近に除荷が生じた時間 $t_0$ までの相当塑性ひずみの累積である。また、 $\bar{\epsilon}_{pi}$ は $t_0$ から時間 $t_i$ まで“monotonic outward loading”した時の相当塑性ひずみの増分である。ここでいう“monotonic outward loading”とは、単調に多曲面の外側へ向かう載荷のことである。

これらの2つの状態変数は、時間 $t_i$ までに材料に発生した相当塑性ひずみの総和 $\bar{\epsilon}_{p, total}$ の一部分であり、これらの間には次の関係が成立つと考えられる。

$$\bar{\epsilon}_{p, total} \geq \bar{\epsilon}_p + \bar{\epsilon}_{pi} \quad (2)$$

ここで、材料に発生した相当塑性ひずみのすべてが材料の履歴効果に寄与する場合に、上式の等号が成立する。提案したモデルでは、単軸引張圧縮載荷試験においてしばしば観察される“復帰現象”を表現するために、状態変数のひとつである累積相当塑性ひずみを次のように評価することとした。

“ある応力-ひずみ径路において生じる相当塑性ひずみのうち、それまでに生じた相当塑性ひずみ幅 $\Delta\bar{\epsilon}_p$ の最大値を越える量のみがその後の履歴に影響する。そして、それらを累積した量を累積相当塑性ひずみと定義する。”

ここで、相当塑性ひずみ幅 $\Delta\bar{\epsilon}_p$ とは除荷が発生してから次の除荷が発生するまでに生じる塑性ひずみから計算される相当塑性ひずみ幅のことを指す。

1) 武蔵工業大学工学部助手, 2) 同教授, 3) 同助教授, 世田谷区玉堤1-28-1(〒158)

曲面の拡大および縮小を表す $\kappa$ は、次式によって定義される。

$$\kappa = W_i \kappa_i + (1 - W_i) \kappa_j \quad (3)$$

ここで、 $\kappa_i$ および $\kappa_j$ は基本曲面サイズ関数であり、 $W_i$ は履歴による曲面サイズの変化を表す重み関数である。

累積相当塑性ひずみのある限定された範囲での曲面サイズ関数の変化は、その範囲の境界における曲面サイズ関数として定義される基本曲面サイズ関数 $\kappa_i$ および $\kappa_j$ と、その範囲に対する重み関数 $W_i$ を用いて表現できるものとするということを上式は意味する。

基本的には境界の数は任意に設定することができる。この場合、Fig.1に示すように設定された境界の数を $N_b$ とすれば、 $N_b$ 個の重み関数と、 $N_b+1$ 個の基本曲面サイズ関数が必要となる。境界が多く設定されればそれだけ重み関数の精度上の要求は緩和される。その一方、境界を多く設定することは、数値計算において記憶すべき基本曲面サイズ関数の数が増え、手続きが煩雑となる。したがって、一般的には両者の兼ねあい境界の数を設定することになる。

基本曲面サイズ関数は相当塑性ひずみ増分の関数として定義され、重み関数は累積相当塑性ひずみと相当塑性ひずみ増分の関数として定義されている。ある累積相当塑性ひずみに相当する履歴を受けた材料の曲面サイズ関数が相当塑性ひずみ増分の関数として求められていれば、それに対応する重み関数の値が累積相当塑性ひずみの関数として決定されることになる。これらのことから、材料特性を決定する基本的な試験は①単調引張載荷試験、および②ただ1回の荷重反転を含む引張圧縮載荷試験のみとなる。

### 3. 曲げモーメント曲率関係の数値計算方法

W.F.Chenらによる接線剛性法<sup>5)</sup>(Tangent Stiffness Approach)に若干の修正を加え、先に提案した繰返し塑性モデルを単軸応力状態に適用してこれに導入し、はりおよびはり一柱の断面挙動を推定する。数値計算においては、以下の仮定を導入した。

- 仮定①：部材断面に直角方向の垂直応力以外の応力成分は無視する。
- 仮定②：断面の形状は不変である。
- 仮定③：局部座屈などの不安定現象は生じない。
- 仮定④：残留応力が存在する。

接線剛性法によれば、2軸対称断面の一般化応力と一般化ひずみの関係は、次式で表される。

$$\{df\} = [K] \{d\phi\} \quad (4.1)$$

ここで  $\{df\}^T = \{dP, dM_x, dM_y, dM_w\}$  (4.2)

$$\{d\phi\}^T = \{d\varepsilon_0, d\phi_x, d\phi_y, d\phi_w\} \quad (4.3)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \int A E_t dA & \int A E_t y dA & \int A E_t x dA & \int A E_t xy dA \\ & \int A E_t y^2 dA & \int A E_t xy dA & \int A E_t xy^2 dA \\ & & \int A E_t x^2 dA & \int A E_t x^2 y dA \\ \text{SYM.} & & & \int A E_t x^2 y^2 dA \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

上式で与えられる接線剛性マトリックスを評価するには、断面の各部での接線係数 $E_t$ を用いて、断面に関して積分をする必要がある。本研究では、以下のような方法によって積分を実行した。

まず、断面を微小三角形要素に分割し、かつ、次のように仮定した。

- 仮定⑤：接線係数は要素内で線形変化する。

この仮定を用いると、断面内の微小三角形部分に関する積分値を、要素を構成する三節点での値を用いて解析的に求めることができる。その後、これを全断面にわたって総和すれば、式(4.4)内の各積分値が精

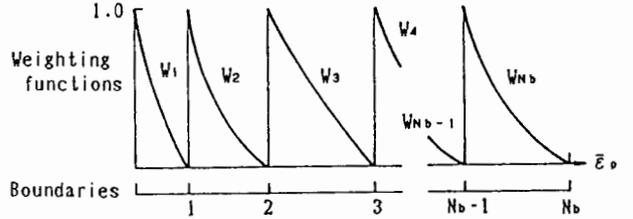


Fig.1 Weighting functions and boundaries.

度良く求められる。残留応力の値は各節点での値として与えた。それに対応して残留ひずみを初期値として与えた。圧延材の場合、残留応力の値は降伏応力に達していないことが、過去の研究<sup>6)</sup>と今回の測定で明らかとなった。したがって、残留応力に対応する残留ひずみは弾性計算で求めた。また、本解析は非線形解析であるので、各増分段階においてNewton-Raphson法によって解を収束させた。

#### 4. 試験体および実験方法

試験体は材質SS41のH型鋼より切り出された試験部と、円筒形の載荷用アームからなる。その形状および寸法をFig.2(a)に示す。試験部と載荷用アームを高力ボルトによって連結し、力の伝達が滑らかになるように連結部の端面は切削仕上げした。

載荷方法はFig.2(b)に示す2点載荷とし、上下フランジでのひずみ速度が約0.0001mm/mm/secとなるようにミニコンによって載荷速度を制御した。

試験部の曲率は三断面にそれぞれFig.3のように貼付したひずみゲージによって検出されたひずみを用いて、平面保持を仮定して算出した。なお、これと同時に、ウェブに装着したパイ型変位計によっても曲率を測定し、測定の信頼性を確認した。本論文においては、測定結果における曲率としては、ひずみゲージによって測定された曲率を示す。

#### 5. 材料特性および残留応力の測定

材料特性を測定するために、試験体から24本(フランジから18本、ウェブから6本)のJIS5号試験片を切り出した。Fig.4にこれの引張試験によって測定された応力-ひずみ関係を示す。

繰り返し塑性モデルに特有の材料特性は、先に述べたように、引張圧縮試

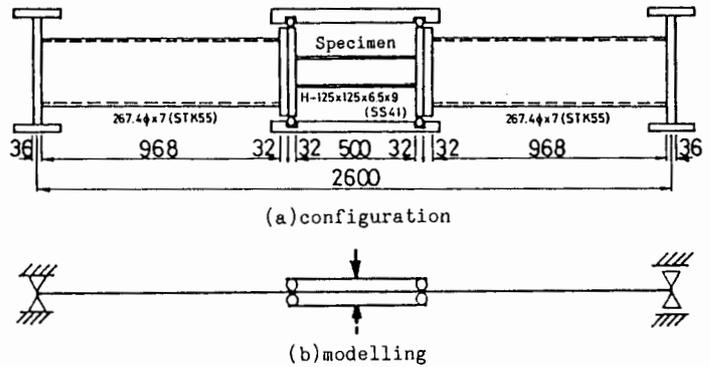


Fig.2 Specimen and its setup.

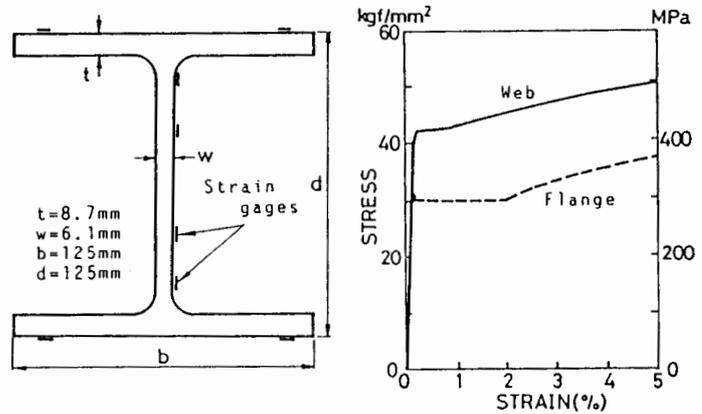


Fig.3 Cross section and measurement points of strain. Fig.4 Tensile stress-strain relations.

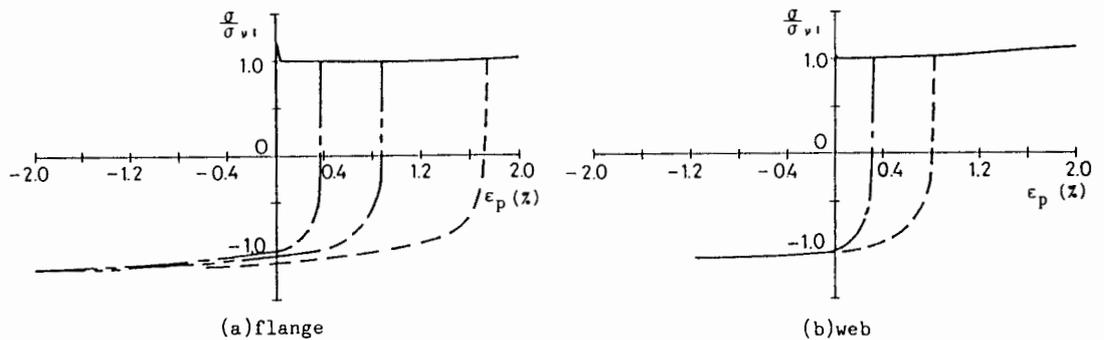


Fig.5 Experimental results to evaluate material properties.

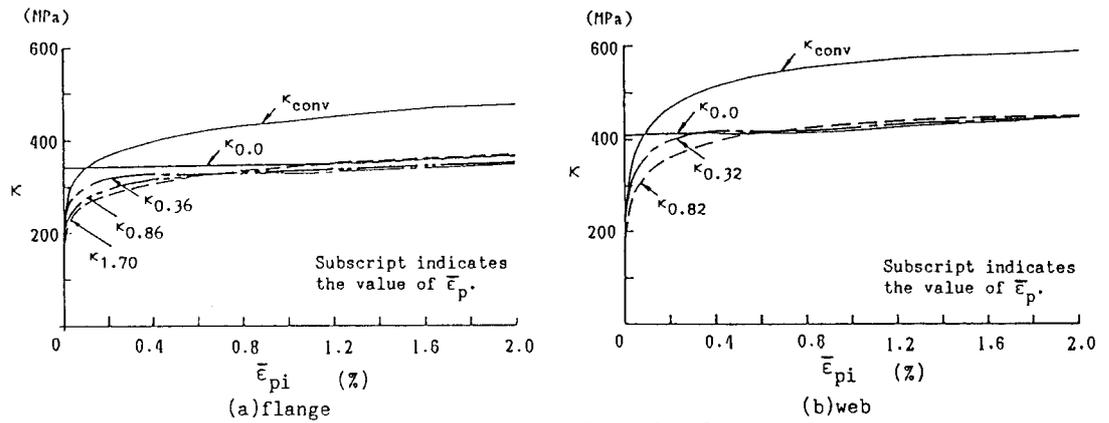


Fig.6 Fundamental surface size functions.

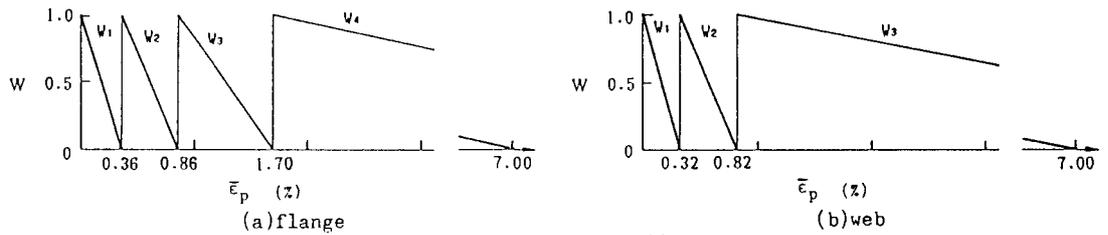


Fig.7 Weighting functions.

験の他に1回の除荷を含む引張圧縮試験を実施して、応力-ひずみ関係を測定しなければならない<sup>1)</sup>。試験片の板厚がフランジで約8mm、ウェブで約6mmと非常に薄いため、圧縮載荷試験は非常に難しい。しかし、本研究の目的からこの材料特性を実際の材料から測定しておくことは不可欠である。そこで、油圧式チャックを持つ万能疲労試験機を用いて、偏心に注意して試験を実施した。Fig.5に実施した試験の結果を、下降伏点で無次元化した応力と塑性ひずみの関係で示す。

試験片による引張試験の場合、鋭い下降伏点は応力の集中した部分に小数の転位が急速に増殖してすべり帯を形成することによって生じる。通常、すべりは試験片の極めて一部分ではじまり、下降伏点で降伏した後、標点間距離全体にリューダース帯が広がる間に下降伏点まで応力が降下する<sup>7),8)</sup>。下降伏点は一般に安定性が乏しく、試験条件の影響を受け易いが、降伏という現象は下降伏点で発生するものとみなせる<sup>9)</sup>。したがって、はりを構成する材料の初期降伏の判定は下降伏点によってなされるべきである。さらに、材料特性を求める試験で用いた板状の試験片による場合と異なり、はりの場合には断面方向に応力勾配が存在する。また、残留応力も存在するため、はりの一部分を構成する材料では下降伏点以降、応力の下降伏点までの急激な低下は生じにくいと思われる。そこで、初期降伏における降伏点および降伏棚での応力としては下降伏点を採用した。

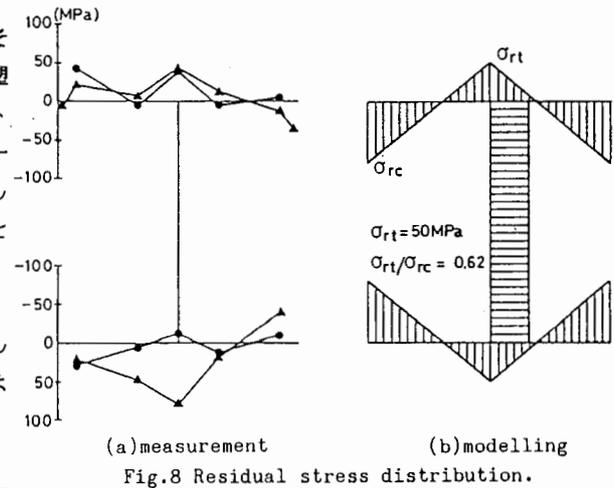
文献1)にしたがって決定した基本曲面サイズ関数をFig.6に示す。履歴が飽和状態になったときの基本曲面サイズ関数としての $\kappa_{conv}$ は測定していないので、著者らが先に実施した軟鋼に関する測定の結果<sup>1)</sup>を参考にして、ひずみ硬化が開始する時点での基本曲面サイズ関数を応力軸方向に30%拡大したものを $\kappa_{conv}$ とした。測定されたすべての曲面サイズ関数を基本曲面サイズ関数として採用したので、重み関数はFig.7に示すようにすべて直線とした。

試験体に生じている残留応力を孔あけ法<sup>4)</sup>によって測定した結果をFig.8(a)に示す。なお、測定器が設置できないためにウェブについては測定していない。測定の結果、残留応力は過去の測定事例<sup>9)</sup>と矛盾のない分布であることが確認された。

### 6. 解析対象のモデル化

断面の要素分割のパターンは、要素数がおおよそ400,200,100の3通りを考えた。そして、完全弾塑性材料が単調曲げを受ける場合の曲げモーメント-曲率関係の理論値と、これらの要素分割パターンを用いて数値計算によって求めたそれを比較した。その結果、いずれの分割においても理論値とほぼ同じ結果が得られたことから、本論文ではFig.9に示す分割パターンを用いることとした。

残留応力分布は、実施した測定の結果を考慮しさらに過去の測定事例<sup>6)</sup>を参考に、Fig.8(b)のようにモデル化した。



(a) measurement (b) modelling  
Fig.8 Residual stress distribution.

### 7. 解析結果と実測結果との比較

断面の強軸まわりの交番曲げを受けた場合の履歴曲げモーメント-曲率関係に関して、実測結果と推定結果を比較してFig.10に示す。(a)図は実測結果を、(b)図は計算結果を示している。推定結果は実測結果と非常に良好に一致している。ひずみ速度を一定としているために、初期降伏時の載荷速度がかなり早い。これに伴って上降伏点のばらつきが比較的大きく、初期降伏における実測結果にバラツキがあるために、ここでの実測値と計算値の相違が生じたものと思われる。しかし、第一の除荷が生じて以後のパウシンガー効果による曲線部分については、非常に精度良くはりの曲げモーメント-曲率関係が推定できることが検証された。さらに、軸力や2軸曲げのようなより複雑な負荷の場合にも、前記の①から④の仮定が成り立つと考えられる載荷範囲においては同様に高精度の推定がなされる可能性が期待できるものと思われる。

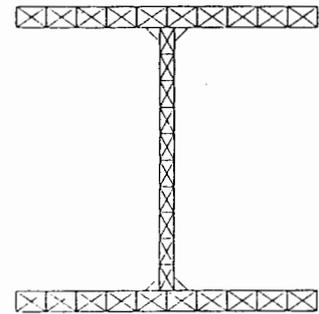


Fig.9 Mesh pattern.

### 8. おわりに

著者らが先に提案した繰返し塑性モデルの適用例として、一軸曲げをうけるはりの断面挙動を計算し、実測結果と比較した。計算された曲げモーメントと曲率の関係は実測結果と非常に良く一致した。実測結果にある程度の誤差が不可避免的に含まれることを考え合わせれば、非常に満足できる結果が得られた。したがって、著者らが先に提案した繰返し塑性モデルによって、部材断面の履歴挙動を非常に良好な精度で推定できることが明らかとなったものとする。

本研究における数値計算は、東京大学大型計算機センターの M-680H/M-682Hおよび武蔵工業大学情報処理センターのM-360を用いて実施された。なお、本研究は昭和61年度文部省科学研究費補助金・一般研究(B)課題番号: 61460157)の交付を受けて実施された。

### 【参考文献】

- 1) 皆川 勝, 西脇威夫, 増田陳紀, 斎藤哲郎: 繰返し荷重に対する構造用鋼材の高精度応力-ひずみモデル, 第9回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, pp.145-150, 昭和60年7月
- 2) Petersson, H. and Popov, E.P.: Constitutive relation for generalized loadings, Proc. of ASCE, Vol.103, No.EM4, pp.611-627, 1977.
- 3) 皆川 勝, 西脇威夫, 増田陳紀: 構造用鋼材の履歴引張圧縮応力-ひずみ関係の推定, 構造工学論文集, Vol.32A, pp.193-206, 1986

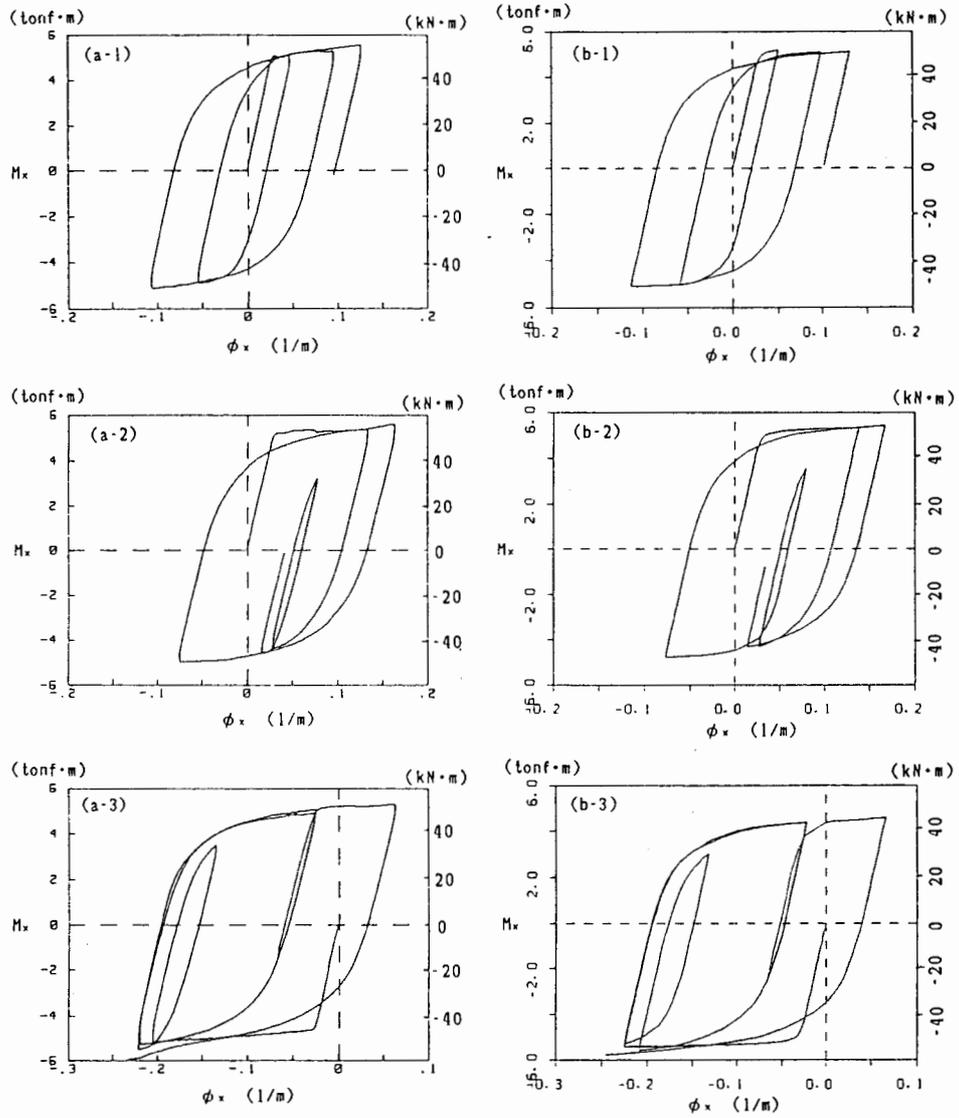


Fig.10 Hysteretic moment curvature relations;  
 (a)experiments and (b)calculations.

- 4) 松橋貞雄, 坂野昌弘, 藤崎恭功, 西村俊夫: 孔あけ法による溶接残留応力の測定、東京工業大学土木工学科研究報告, No.26, pp.21-37, 1980年6月
- 5) Chen, W.F. and Atsuta, T: Theory of Beam-Column Volume2 - Space Behavior and Design, McGraw-Hill Inc., 1977.
- 6) Tebedge, N. and Tall, L.: Contraintes residuelles dans les protils en acier - Synthese des valeurs mesurees, Construction Metallique, No.2, pp.37-48, Paris, June 1974.
- 7) Tetelman, A.S. and McEvily Jr., A.J.: Fracture of Structural Materials, Translated to Japanese by Miyamoto, H., Baihu-kan, pp.169, 1967.
- 8) A.H. コットレル (木村宏訳): コットレルの金属学 (下巻), アグネ, pp.167-170, 1970.
- 9) 山田良之助: 材料試験 (改稿), 内田老鶴園新社, pp.54-59, 1970年

PREDICTION OF HYSTERETIC MOMENT-CURVATURE RELATIONS  
BY A CYCLIC PLASTICITY MODEL

Masaru Minagawa 1 , Takeo Nishiwaki 2 and Nobutoshi Masuda 3

SUMMARY

The authors already proposed a cyclic plasticity model by which elasto-plastic behaviors of uni-axial steel members under complicated repetitive loads can be predicted with high accuracy. On the bases of the proposed model, investigated was the predicted hysteretic moment-curvature relations ( $M-\phi$  relations) of rolled H-shaped steel beams under repetitive bending moments.

The proposed cyclic plasticity model was constructed by the refinements of multi surface model introduced by Petersson and Popov. On the proposed mode, new material property functions were supplemented, and the cumulative equivalent plastic strain as an internal variable was clearly defined. Moreover, the standard measurement method for determining all material property functions was clearly presented and then the model can be applied to all hardening structural metals.

To calculate  $M-\phi$  relations of beams and beam-columns, the tangent stiffness method introduced by Chen and Atsuta was used with some amendments. In order to determine the tangent stiffness of a cross section, tangent modulus at all point on the cross section should be evaluated and then integrated all over the section. In this study, cross sections were divided into some triangular finite elements of which integrals were calculated analytically. Integral over the section can be gained by the summation of integral for each element. In this process, it is supposed that the tangent modulus distributes linearly in each finite element. Since the analysis process is nonlinear, the solution was converged by Newton-Raphson procedure. Material property functions were determined by a combination of tension tests and tension-compression tests each including only one unloading using JIS(Japanese Industrial Standards)-5 type specimens shaped from a H-shaped beam specimen. Residual stress distribution was measured by the drilling method and modelled by a simple type.

The calculated  $M-\phi$  relations were compared with those gained by experiments which the authors carried out and it is verified that hysteretic  $M-\phi$  relations under consideration of history effects can be predicted with high accuracy by means of the proposed method.

---

1.M.JSCE, Research Assoc., 2.M.JSCE, Prof., 3.M.JSCE, Assoc. Prof.  
Dept. of Civil Eng., Musashi Inst. of Tech., Setagaya-ku, Tokyo 158.