

構造工学における数値解析法シンポジウム論文集

第 14 卷

Proceedings of Symposium on
Computational Methods in Structural Engineering
and Related Fields

Volume, 14

平成 2 年 7 月

日本鋼構造協会

動的問題のための時間依存座標系を用いた 定式化とその解法

A FORMULATION FOR DYNAMIC PROBLEMS AND ITS SOLUTION PROCEDURE
USING A TIME-DEPENDENT LOCAL COORDINATE SYSTEM

増田陳紀¹⁾, 高橋広幸²⁾, 西脇威夫³⁾, 皆川 勝⁴⁾
Nobutoshi MASUDA, Hiroyuki TAKAHASHI, Takeo NISHIWAKI, Masaru MINAGAWA

SUMMARY

An incremental equation of motion using a time-dependent co-rotational coordinate system is formulated for geometrically nonlinear dynamic analysis of flexible frame structures. The equation includes the centrifugal force and the Coriolis force which were not considered in the authors' previous papers where inertia force was estimated using updated Lagrangian coordinate system. A solution procedure composed of two-step predictive linearization and following corrective iteration is proposed for the above incremental nonlinear equation. The predictive linearization is essentially based on Runge-Kutta type algorithm. Newmark's- β time integration scheme is combined with this predictive corrective solution procedure.

Key Words: geometrical nonlinearity, co-rotational coordinate system, Coriolis force, incremental equation of motion, predictive-corrective solution procedure.

1. はじめに

著者らは、近年、本シンポジウムなどにおいて、骨組構造の幾何学的非線形動的応答解析に関する一連の研究を発表してきた¹⁾²⁾³⁾。ここでは、復元力を座標表示に基づく幾何学的非線形理論に従って評価し、また慣性力を時間増分ごとに更新される全体座標系での質量行列と全体座標系における加速度との積で現わした増分型の運動方程式を提案してきた。要素座標系の運動を時間に関して離散的に取り扱うものとすれば、このような慣性力の評価が成立する。しかし、変形も大きく剛体的な運動も大きな問題に対してこのような要素座標系を用いた慣性力評価を行なうことは計算効率の面から疑問が残る。

そこで、本研究では、要素座標系の時間依存性を考慮して慣性力の評価を行った場合の運動方程式の定式化とその数値解析アルゴリズムを提案する。ここでいう要素座標系の時間依存性は、常に要素座標系の原点を全体座標系のそれに一致させておくことによって、座標変換行列の時間依存性に置き換えられる。座標変換行列の時間依存性を考慮するために、非線形方程式の数値解法にNewton Raphson 法などのような解法を適用することが困難となる。そこで、本研究では、予測子-修正子型の解法を用いるものとする。また、時間積分法には、Newmark の β 法を用いる。

2. 時間依存性を有する要素座標系を用いた慣性力の評価

平面骨組構造を対象として、時間依存座標系を用いた慣性力の評価方法を述べる。

慣性力の評価に際して、全体座標系の原点を原点とし、要素第1節点から第2節点を望む方向で、部材軸

1) 武蔵工業大学工学部土木工学科・助教授・工博, 2) 武蔵工業大学大学院・修士課程学生(研究当時)

3) 武蔵工業大学工学部土木工学科・教授・工博, 4) 武蔵工業大学工学部土木工学科・講師・工博

(武蔵工業大学 〒158 世田谷区玉堤1丁目28番地1号)

と平行に要素座標系の x^{**} 軸を持つ直交座標系($x^{**}-y^{**}$ 座標系)を要素座標系に用いる。この座標系は、要素の剛体的な回転運動にともなって回転する回転座標系であり、非慣性系である。ここで、回転座標系を用いる理由は、微小ひずみを前提にすれば、この座標系において質量の分布は一定であり、要素質量行列には常に一定な線形質量行列を用いることができることにある。ここで示す慣性力の評価方法では、要素質量行列に一般的な整合質量行列を用いることが可能である。集中質量行列を用いた場合にはさらに簡単な定式化を得ることができるが、本研究においては要素質量行列に特別な制約はつけない。

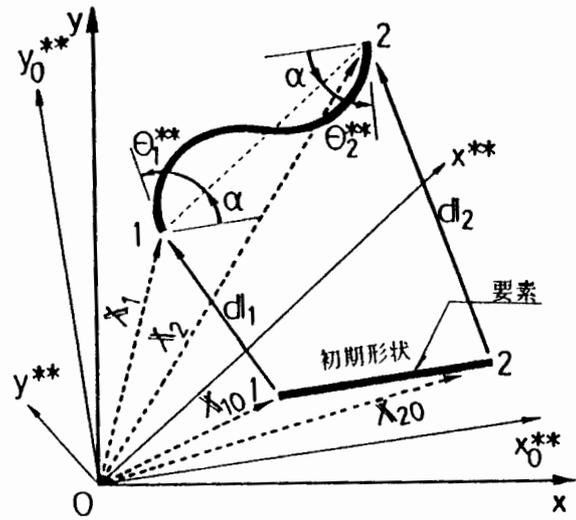


図1に、要素座標系と変位場の概念を示す。図-1 空間固定全体座標系と時間依存要素座標系の関係
 全体座標系と要素座標系の原点を一致させているので、常に座標ベクトルの座標変換関係は通常の座標変換行列を用いて記述することが出来る。一般化座標ベクトル(初期節点座標ベクトル x_0 と節点変位ベクトル u および要素の剛体回転ベクトルに負の符号を付したものを r の和で表わされるベクトル)を x とおけば、

$$x^{**} = T x ; x = X_0 + u + r \quad (1)$$

である。なお、上付きの $**$ は、要素座標系に関する積量であることを示す。これより、要素座標系での速度ベクトル \dot{x}^{**} 、加速度ベクトル \ddot{x}^{**} は、式(1)を時間に関して微分して、それぞれ次のように求められる。

$$\dot{x}^{**} = T \dot{x} + \dot{T} x \quad (2)$$

$$\ddot{x}^{**} = T \ddot{x} + 2 \dot{T} \dot{x} + \ddot{T} x \quad (3)$$

時間とともに回転する座標系での積量を用いて全体座標系での慣性力を表現する場合、見かけの力が作用するのは古典力学に示される通りである。すなわち、全体座標系での慣性力 f_i は、要素座標系での慣性力を座標変換したものに、見かけの力としてのコリオリ力と遠心力を加えた力に等しい。したがって、

$$f_i = T^T M^{**} \ddot{x}^{**} + \{ 2 \dot{T}^T M^{**} \dot{x}^{**} + \ddot{T}^T M^{**} x^{**} \} \quad (4)$$

この式(4)に、式(1)～(3)を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} f_i &= T^T M^{**} T \ddot{x} + 2 \{ T^T M^{**} \dot{T} + \dot{T}^T M^{**} T \} \dot{x} + \{ T^T M^{**} \ddot{T} + 2 \dot{T}^T M^{**} \dot{T} + T^T M^{**} \ddot{T} \} x \\ &= T^T M^{**} T (\ddot{u} + \ddot{r}) + 2 \{ T^T M^{**} \dot{T} + \dot{T}^T M^{**} T \} (\dot{u} + \dot{r}) \\ &\quad + \{ T^T M^{**} \ddot{T} + 2 \dot{T}^T M^{**} \dot{T} + T^T M^{**} \ddot{T} \} x \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる。

3. 増分型支配運動方程式

復元力の評価は、吉田・増田らの研究⁴⁾⁵⁾ に準じて行う。復元力評価の際の要素座標系には、慣性力評価の際のその原点を要素の第1節点に移動したものを使用する。この要素座標系における変位は、全て変形に寄与し、剛体変位を含まないものと考えることができる。この要素座標系を x^*-y^* 座標系とし、これで表わされる諸量を上付きの添え字 $*$ で表わす。式(1)の関係を利用して、

$$u^* = \mathbf{T} \mathbf{G} \mathbf{x} - \mathbf{T}_0 \mathbf{G} \mathbf{x}_0 \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{G} は座標系の原点を要素の第1節点に移動するためのシフト定数行列であり、下付きの添え字0は初期状態における緒量であることを表わす。これにより、要素座標系における剛性行列 \mathbf{K}^* を用いて、全体座標系における復元力ベクトル \mathbf{f}_s は、

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_s^* ; \quad \mathbf{f}_s^* = \mathbf{K}^* (\mathbf{T} \mathbf{G} \mathbf{x} - \mathbf{T}_0 \mathbf{G} \mathbf{x}_0) \quad (7)$$

と書き表せる。

いま、時刻 (t) までの諸量が求められていて、時刻 $(t + \Delta t)$ におけるそれを求めることが要求されているものとするれば、増分方程式を用いる方がより一般性がある。そこで、時刻 $(t + \Delta t)$ における運動方程式より時刻 (t) におけるそれを差し引き、増分型の運動方程式を構成する。運動方程式の作成にあたっては、慣性力と復元力が外力につり合っているものとし、減衰力を無視する。増分量を Δ を用いて表わすと、増分型運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{T}_{(t+\Delta t)} (\Delta \ddot{u} + \Delta \ddot{\mathbf{r}}) + \{ \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \Delta \mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}^T \mathbf{M}^* \mathbf{T} \} (\ddot{u} + \ddot{\mathbf{r}}) \\ & + 2 \{ \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)} + \dot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{T}_{(t+\Delta t)} \} (\Delta \dot{u} + \Delta \dot{\mathbf{r}}) \\ & + 2 \{ \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \Delta \ddot{\mathbf{T}} + \Delta \mathbf{T}^T \mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{T}} + \dot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \Delta \mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{T}} \} (\dot{u} + \dot{\mathbf{r}}) \\ & + \{ \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)} + 2 \ddot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)} + \ddot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \mathbf{T}_{(t+\Delta t)} \} (\Delta u + \Delta \mathbf{r}) \\ & + \{ \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \Delta \ddot{\mathbf{T}} + \Delta \mathbf{T}^T \mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{T}} + 2 \dot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \Delta \dot{\mathbf{T}} + 2 \Delta \dot{\mathbf{T}}^T \mathbf{M}^* \dot{\mathbf{T}} \\ & \quad + \ddot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{M}^* \Delta \mathbf{T} + \Delta \ddot{\mathbf{T}}^T \mathbf{M}^* \mathbf{T} \} \mathbf{x} \\ & + \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^T \mathbf{K}^* \{ \mathbf{T}_{(t+\Delta t)} \mathbf{G} (\Delta u + \Delta \mathbf{r}) + \Delta \mathbf{T} \mathbf{G} \mathbf{x} \} + \Delta \mathbf{T}^T \mathbf{f}_s^* = \Delta \mathbf{f} \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $\mathbf{M}^{**} \doteq \mathbf{M}^*$ である。

4. 増分型運動方程式の解法

本研究では、非線形方程式の数値解法として、線形化近似による2段階の推定過程と反復修正過程からなる予測子-修正子型の解法を提案する。また、時間積分法には、ここではNewmarkの β 法を用いる。

(1) 推定過程

推定過程は、2段階の線形化によって行う。まず第1近似として時刻(t)において線形化し、そのつり合い点を第1近似解とする。第2近似では、第1近似解点と時刻(t)におけるつり合い点との中点で再び線形化を行ない、そのつり合い点を第2近似解とする。

a) 第1近似解の計算

座標変換行列および剛体回転行列の増分項は、時刻(t)において変位ベクトルに関して線形化して評価する。すなわち、

$$\Delta \mathbf{T} \approx \dot{\mathbf{T}} \Delta t \approx \left. \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{(t)} \Delta \mathbf{u} \quad (9)$$

ここで、 $\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{(t)}$ は時刻(t)において評価したことを示し、 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^T}$ は変位ベクトルに関して微分した量であることを示す。また、この増分の時間微分項に関しては、以下の式をもって評価する。

$$\Delta \dot{\mathbf{T}} \approx \ddot{\mathbf{T}} \Delta t \approx \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{(t)} \Delta \dot{\mathbf{u}} + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}^T \partial \mathbf{u}^T} \right|_{(t)} \dot{\mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{T}} &\approx \ddot{\mathbf{T}} \Delta t \\ &\approx \left. \frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{(t)} \Delta \ddot{\mathbf{u}} + 2 \left. \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{u}^T \partial \mathbf{u}^T} \right|_{(t)} \dot{\mathbf{u}} \Delta \dot{\mathbf{u}} \\ &\quad + \left. \frac{\partial^2 \ddot{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{u}^T \partial \mathbf{u}^T} \right|_{(t)} \ddot{\mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \left. \frac{\partial^3 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}^T \partial \mathbf{u}^T \partial \mathbf{u}^T} \right|_{(t)} \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (11)$$

時刻(t)における座標変換行列の時間微分項は、直接時間で微分するのではなく、初めに変位で微分してから変位の時間微分項をかけて評価する。具体的に示せば以下の通りである。

$$\mathbf{T}_{(t+\Delta t)} \approx \mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}} \Delta t \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \left. \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{(t)} \dot{\mathbf{u}} \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)} \approx \dot{\mathbf{T}} + \ddot{\mathbf{T}} \Delta t \quad (14)$$

$$\ddot{\mathbf{T}} = \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{u}^T} \right|_{(t)} \ddot{\mathbf{u}} + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}^T \partial \mathbf{u}^T} \right|_{(t)} \dot{\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} \quad (15)$$

$$\ddot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)} \approx \ddot{\mathbf{T}} + \ddot{\mathbf{T}} \Delta t \quad (16)$$

また、newmark-β法によれば、 $\Delta \dot{\mathbf{u}}$ と $\Delta \ddot{\mathbf{u}}$ は以下のように示される。

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = \Delta t \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{(t)} + \alpha \cdot \Delta t \cdot \Delta \ddot{\mathbf{u}} \quad (17)$$

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}} = \frac{\Delta \mathbf{u}}{\beta \cdot (\Delta t)^2} - \left[\frac{\dot{\mathbf{u}}_{(t)}}{\beta \cdot \Delta t} + \frac{\ddot{\mathbf{u}}_{(t)}}{2\beta} \right] \quad (18)$$

(9)式から(18)式までを(8)式に代入すれば、各要素に関する線形化された増分型運動方程式が

得られる。それらを重ね合わせて、第1近似解を求める。

b) 第2近似解の計算

第2近似計算では、第1近似解点と時刻(t)におけるつり合い点との中点で、 \mathbf{T} と u の増分に関して線形化を行なう。すなわち、

$$\Delta \mathbf{T} \approx \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^T} \Big|_{\langle \frac{1}{2} \rangle} \Delta u \quad (19)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{T}} \approx \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^T} \Big|_{\langle \frac{1}{2} \rangle} \Delta \dot{u} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial u^T \partial u^T} \Big|_{\langle \frac{1}{2} \rangle} \dot{u} \Delta u \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{T}} \approx & \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^T} \Big|_{\langle \frac{1}{2} \rangle} \Delta \ddot{u} + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial u^T \partial u^T} \Big|_{\langle \frac{1}{2} \rangle} \ddot{u} \Delta u \\ & + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial u^T \partial u^T} \Big|_{\langle \frac{1}{2} \rangle} \dot{u} \Delta \dot{u} + \frac{\partial^3 \mathbf{T}}{\partial u^T \partial u^T \partial u^T} \Big|_{\langle \frac{1}{2} \rangle} \dot{u} \dot{u} \Delta u \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{T}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}} \Big|_{\langle \frac{1}{2} \rangle} \Delta t \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^T} \Big|_{(t)} \dot{u}(t) \quad (23)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)} \approx \dot{\mathbf{T}} + \ddot{\mathbf{T}} \Big|_{\langle \frac{1}{2} \rangle} \Delta t \quad (24)$$

$$\ddot{\mathbf{T}} = \ddot{\mathbf{T}} + \dddot{\mathbf{T}} \Big|_{\langle \frac{1}{2} \rangle} \Delta t \quad (25)$$

ここで、 $\Big|_{\langle \frac{1}{2} \rangle}$ は、第一近似解点と時刻(t)における釣合点の中点で評価したことを示す。第1近似と同様に得られた諸量を式(8)に代入して変位ベクトルに関する連立方程式として解を求める。

(2) 反復修正過程³⁾⁴⁾

第3近似以降の諸項の評価に関しては、時刻(t)に関する諸項は時刻(t)に関する近似解で評価をして、時刻(t+Δt)の諸量に関しては、1つ前の近似解(繰返し計算のk+1回目の近似解を求めるときはk回めの近似解)を用いて諸量を評価する。また増分項に関しては、1つ前の諸量から時刻(t)の近似解を差し引いた値を用いる。すなわち、

$$\Delta \mathbf{T} \approx \mathbf{T}_{\langle k \rangle} - \mathbf{T}(t) \quad \Delta \dot{\mathbf{T}} \approx \dot{\mathbf{T}}_{\langle k \rangle} - \dot{\mathbf{T}}(t) \quad \Delta \ddot{\mathbf{T}} \approx \ddot{\mathbf{T}}_{\langle k \rangle} - \ddot{\mathbf{T}}(t) \quad (26) \sim (28)$$

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^T} \Big|_{(t)} \dot{u}(t) \quad (29)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{(t+\Delta t)} \approx \dot{\mathbf{T}}_{\langle k \rangle} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^T} \Big|_{\langle k \rangle} \dot{u}_{\langle k \rangle} \quad (30)$$

$$\ddot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial u^T} \Big|_{(t)} \ddot{u}(t) + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial u^T \partial u^T} \Big|_{(t)} \dot{u}(t) \dot{u}(t) \quad (31)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t+\Delta t) \approx \ddot{\mathbf{u}}(k) = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}^T} \bigg|_{\langle k \rangle} \ddot{\mathbf{u}}(k) + \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial \mathbf{u}^T \partial \mathbf{u}^T} \bigg|_{\langle k \rangle} \ddot{\mathbf{u}}(k) \quad (32)$$

ここで $\langle k \rangle$ は繰返し計算K回目の諸量を用いていることを示している。上記のように評価したものを、第1近似および第2近似と同様に、(8)式に代入して変位を求める。

(3) 収束判定

収束判定は、不釣り合い力ベクトル \mathbf{Q} のノルムと外力増分ベクトル $\Delta \mathbf{f}$ との比(ε)と、変位増分 $\Delta \mathbf{u}$ のノルムの漸近度(ε_d)との二つをもって行い、設定した基準値を両者が満たしたとき収束したと判断する。ただし、外力増分がない場合には不釣り合い力ノルムによってそれを行なうものとする。また、収束条件を満足した後に残る不釣り合い力を次の増分段階に持ち越し、残差の累積を防ぐ。ここでのノルムは、ユークリッドノルムを用いる。

$$\varepsilon = \left(\frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}}{\Delta \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{f}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

$$\varepsilon_d = \left| \frac{(\Delta \mathbf{u}_{\langle k+1 \rangle} \cdot \Delta \mathbf{u}_{\langle k+1 \rangle})^{1/2} - (\Delta \mathbf{u}_{\langle k \rangle} \cdot \Delta \mathbf{u}_{\langle k \rangle})^{1/2}}{(\Delta \mathbf{u}_{\langle k+1 \rangle} \cdot \Delta \mathbf{u}_{\langle k+1 \rangle})^{1/2}} \right| \quad (34)$$

5. まとめ

以上に、慣性力を時間に依存する回転座標系を用いて評価した増分型の運動方程式を定式化し、その運動方程式の解法を提示した。

慣性力の評価に際して時間依存の座標系を導入することにより同一の時間増分に対してより精度の高い解が求められることを期待したものであるが、当然定式化が複雑になることによって必然的に計算時間が増すことになる。ここで定式化した方程式をどのように簡略化し、どのような解法を用いれば計算効率のよい解法が得られるかということが今後の課題の1つとなる。

式の校正および原稿の作成に際して武蔵工業大学大学院修士課程平野健二君に協力にいただきました。ここに謝意を表します。

◆ 参考文献 ◆

- 1) 増田陳紀・西脇威夫・皆川 勝・山本英男：骨組構造の幾何学的非線形動的応答解析のための1方法，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第10巻，pp.431~436，昭和61年7月。
- 2) Masuda, N., Nishiwaki, T. and Minagawa, M. : Nonlinear Dynamic Analysis of Frame Structures , Computers & Structures, Vol. 27, No. 1, pp.103-110, 1987.
- 3) 増田陳紀・西脇威夫・皆川 勝・高橋広幸：幾何学的非線形動的応答解析の一手法と平面骨組解析への応用，構造工学論文集，Vol. 35A, pp.185-194, 1989年3月。
- 4) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法，土木学会論文報告集，第228号，pp.41~55, 1979年8月。
- 5) 吉田 裕・増田陳紀・森本 剛・広沢規行：立体骨組構造の増分釣り合い方程式とその解法，土木学会論文報告集，第300号，pp.21~31, 1980年8月。